משוואות דיפרנציאליות רגילות

תשובות 12

שאלה 1

פתרו (פתרון מלא) את המד"רים הבאים.

א. $\ddot{x}-2\dot{x}+x=(t-3)e^t$

ב. $\ddot{x}+6\dot{x}+13x=75\sin 2t$

ג. $\ddot{x}-6\dot{x}+8x=1+e^{2t}$

ד. $x^{(4)}-8\dot{x}=t^2$

תשובה 1

א. e^t, te^t הם הפתרונות של ההומוגנית, ולכן נחפש פתרון מהצורה: $t^2(At+B)e^t$ (כי יש תהודה). נציב את הפתרון הפרטי במשוואה ונקבל: $A=\frac{1}{6}, B=-\frac{3}{2}$. והפתרון הכללי

$$x=c_1e^t+c_2te^t+\left(\frac{t^3}{6}-\frac{3t^2}{2}\right)e^t$$

ב. הפולינום המתאים למשוואה זו הוא $p(s)=s^2+6s+13$ השורשים הם $-3\pm 2i$, ולכן הפתרון הכללי להומוגנית הוא $x=c_1e^{-3t}\cos 2t+c_2e^{-3t}\sin 2t$. נחפש פתרון פרטי מהצורה: $A\sin 2t+B\cos 2t$. נציב את הפתרון הפרטי במשוואה ונקבל: $A=3, B=-4$. והפתרון הכללי $y=c_1e^{-3t}\cos 2t+c_2e^{-3t}\sin 2t+3\sin 2t-4\cos 2t$.

ג. הפולינום המתאים למשוואה זו הוא $s^2-6s+8=0$, שורשיו $2,4$ ומכאן הפתרון הכללי: $x=c_1e^{2t}+c_2e^{4t}$. מכיוון ש e^{2t} פותר את המשוואה ההומוגנית נחפש פתרון מהצורה: $A+Bte^{2t}$ (כלומר יש תהודה עבור e^{2t}). נציב את הפתרון הפרטי במשוואה ונקבל: $A=\frac{1}{8}, B=-\frac{1}{2}$ והפתרון הכללי: $y=c_1e^{2t}+c_2e^{4t}+\frac{1}{8}-\frac{te^{2t}}{2}$

ד. הפולינום המתאים למשוואה זו הוא $s^4-8s=0$, שורשיו $0,2,-1\pm\sqrt{3}$ ומכאן הפתרון הכללי: $x=c_1+c_2e^{2t}+c_3e^{-t}\sin\sqrt{3}t+c_4e^{-t}\cos\sqrt{3}t$. מכיוון ש1 הוא פתרון של ההומוגנית(כלומר יש תהודה עבור 1), נחפש פתרון מהצורה: $t\left(At^2+Bt+C\right)$ נציב במשוואה ונקבל $A=\frac{-1}{24}, B=C=0$: הפתרון הכללי:

$$x=c_1+c_2e^{2t}+c_3e^{-t}\sin\sqrt{3}t+c_4e^{-t}\cos\sqrt{3}t-\frac{t^3}{24}.$$

שאלה 2

פתרו 2 מהמשוואות פתרון מלא, והשאר הסבירו איך פותרים.

א. $\begin{cases}\dot{x}=y+2e^t\\ \dot{y}=x+t^2\end{cases}$

ב. $\begin{cases}\dot{x}=3x+2y+4e^{5t}\\ \dot{y}=x+2y\end{cases}$

ג. $\begin{cases}\dot{x}=x+y+1+e^{t}\\ \dot{y}=3x-y\end{cases}$

ד. $\begin{cases}\dot{x}=2x+3y+5t\\ \dot{y}=3x+2y+8e^{t}\end{cases}$

ה. $\begin{cases}\dot{x}=2x-y\\ \dot{y}=2y-x-5e^{t}\sin t\end{cases}$

תשובה 2

א. נרשום את המשוואה בצורה וקטורית $(1)\,\dot{\underline{x}}=A\underline{x}+F$

כאשר $F=\begin{pmatrix}2e^{t}\\ t^{2}\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. הע"ע של A הם ± 1. פתרון כללי

להומוגנית נחפש ע"י שנציב במשוואה ההומוגנית את $\underline{x}_h=\underline{c}_1e^{t}+\underline{c}_2e^{-t}$, ופתרון פרטי

למשוואה (1) נמצא ע"י שנציב ב- (1) את $\underline{x}_p=\left(\underline{d}_0+\underline{d}_1t\right)e^{t}+\left(\underline{d}_2+\underline{d}_3t+\underline{d}_4t^{2}\right)$

(הערה המקדם של e^{t} הוא פולינום ממעלה אחת כי יש תהודה). נוכל לעשות את שני השלבים

גם יחד ע"י שנציב ב- (1) את $\underline{x}=\left(\underline{d}_0+\underline{d}_1t\right)e^{t}+\underline{d}_2e^{-t}+\left(\underline{d}_3+\underline{d}_4t+\underline{d}_5t^{2}\right)$ (כאשר

$\underline{d}_j=\begin{pmatrix}a_j\\b_j\end{pmatrix}$) נגזור $\dot{\underline{x}}=\left(\underline{d}_0+\underline{d}_1+\underline{d}_1t\right)e^{t}-\underline{d}_2e^{-t}+\left(\underline{d}_4+2\underline{d}_5t\right)$ ונציב ב- (1)

כלומר

$$\dot{\underline{x}}=\left(\underline{d}_0+\underline{d}_1\right)e^{t}+\underline{d}_1te^{t}-\underline{d}_2e^{-t}+\left(\underline{d}_4+2\underline{d}_5t\right)=$$
$$=A\underline{x}+F=$$
$$=\left(A\underline{d}_0+\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right)e^{t}+te^{t}A\underline{d}_1+A\underline{d}_2e^{-t}+\left(A\underline{d}_3+A\underline{d}_4t+\left(A\underline{d}_5+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)t^{2}\right)$$

נשווה מקדמים: $e^{t}\rightarrow \underline{d}_0+\underline{d}_1=A\underline{d}_0+\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ ובצורה לא וקטורית

$e^{t}\rightarrow \begin{matrix}a_0+a_1=b_0+2\\ b_0+b_1=a_0\end{matrix}$ נמשיך: $te^{t}\rightarrow \begin{matrix}a_1=b_1\\ b_1=a_1\end{matrix}$, $e^{-t}\rightarrow \begin{matrix}-a_2=b_2\\ -b_2=a_2\end{matrix}$, $1\rightarrow \begin{matrix}a_4=b_3\\ b_4=a_3\end{matrix}$,

$t\rightarrow \begin{matrix}2a_5=b_4\\ 2b_5=a_4\end{matrix}$, $t^{2}\rightarrow \begin{matrix}0=b_5\\ 0=a_5+1\end{matrix}$. כלומר קיבלנו כי

$\begin{matrix}a_0=b_0+1, a_1=b_1=1, a_2=-b_2,\\ a_3=-2, b_3=0, a_4=0, b_4=-2, a_5=-1, b_5=0\end{matrix}$, ולכן הפתרון הכללי יהיה:

$$\underline{x}=\begin{pmatrix}c_0+1\\c_0\end{pmatrix}e^{t}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}te^{t}+\begin{pmatrix}c_2\\-c_2\end{pmatrix}e^{-t}+\begin{pmatrix}-2-t^{2}\\-2t\end{pmatrix}$$

משל.

ב. $\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + F = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} 4e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix}$, ע״ע הם $4,1$ ולכן אין תהודה. נחפש פתרון כללי

להומוגנית מהצורה: $\underline{x}_h = \underline{c}_1 e^t + \underline{c}_2 e^{4t}$ כאשר $\underline{c}_i = \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \end{pmatrix} \Leftarrow \underline{\dot{x}}_h = \underline{c}_1 e^t + 4\underline{c}_2 e^{4t}$ נציב

במשוואה ההומוגנית + נשווה מקדמים ונקבל: $e^t \to \begin{matrix} c_{11} = 3c_{11} + 2c_{12} \\ c_{12} = c_{11} + 2c_{12} \end{matrix}$,

$e^{4t} \to \begin{matrix} 4c_{21} = 3c_{21} + 2c_{22} \\ 4c_{22} = c_{21} + 2c_{22} \end{matrix}$ ולכן $c_{11} = -c_{12}$ ו- $c_{21} = 2c_{22}$ ולכן בפתרון הכללי

להומוגנית הוא $\underline{x}_h = A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t + B\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t}$. נחפש פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית

מהצורה: $\underline{x}_p = \underline{c}e^{5t}$ כאשר $\underline{c} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, נציב במשוואה ונשווה מקדמים

ונקבל: $\begin{matrix} 5a = 3a + 2b + 4 \\ 5b = a + 2b \end{matrix} \Leftarrow a = 3, b = 1$ ולכן הפתרון הפרטי הוא $\underline{x}_p = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{5t}$.

והפתרון הכללי הוא $\underline{x} = \underline{x}_h + \underline{x}_p = A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t + B\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{5t}$.

ג. הע״ע של המטריצה הם $2,-2$ ולכן לא תהיה תהודה. נחפש פתרון הומוגני מהצורה:
$\underline{x}_h = \underline{c}_1 e^{2t} + \underline{c}_2 e^{-2t}$, ופתרון פרטי מהצורה: $\underline{x}_p = \underline{d}_1 + \underline{d}_2 e^t$.

ד. הע״ע של המטריצה הם $5,-1$ ולכן לא תהיה תהודה. נחפש פתרון הומוגני מהצורה:
$\underline{x}_h = \underline{c}_1 e^{5t} + \underline{c}_2 e^{-t}$, ופתרון פרטי מהצורה: $\underline{x}_p = \underline{d}_1 + \underline{d}_2 t + \underline{d}_3 e^t$.

ה. הע״ע של המטריצה הם $3,1$ ולכן לא תהיה תהודה. נחפש פתרון הומוגני מהצורה:
$\underline{x}_h = \underline{c}_1 e^t + \underline{c}_2 e^{3t}$, ופתרון פרטי מהצורה: $\underline{x}_p = \underline{d}_1 e^t \sin t + \underline{d}_2 e^t \cos t$.

שאלה 3

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית : $x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\ldots+a_1\dot{x}+a_0x=0 \qquad (*)$

א. הוכח כי אם $t^k\sin(t)$ פותר את $(*)$ אז $n\ge 2k+2$

ב. מצא פתרון ל $(*)$ המקיים $x(0)=\dot{x}(0)=\cdots=x^{(n-1)}(0)=1$ אם ידוע כי $\sum_{k=0}^{n-1}a_k=-1$

ג. האם הפתרון שמצאת בחלק ב' הוא הפתרון **היחיד** המקיים את תנאי השאלה? נמק את תשובתך.

תשובה 3

א. הפולינום המתאים ל- $(*)$ הוא : $s^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_ks^k$. על מנת ש $t^k\sin(t)$ יהיה פתרון ל $(*)$, נדרוש ש i יהיה שורש של הפולינום בעל ריבוב $k+1$. ולכן גם $-i$ יהיה שורש של הפולינום בעל אותו ריבוב $k+1$ (כי הפולינום ממשי). $\Leftarrow$ $n\ge 2k+2$ כנדרש.

ב. נציב פולינום $s=1$ ונקבל $\sum_{k=0}^{n-1}a_k=-1$ ומכאן $s=1$ הוא שורש של הפולינום $s^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_ks^k$ ולכן e^t פתרון למשוואה $(*)$. ונבדוק כי הוא אכן מקיים את תנאי ההתחלה.

ג. כן הוא הפתרון היחיד, המשוואה ליניארית עם מקדמים קבועים ולכן לכל תנאי התחלה בנקודה מסויימת מהצורה : $x(t_0)=x_0,\ldots,x^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)}$ קיים פתרון יחיד.