משוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרון 10

שאלה 1

מצאו בסיס למרחב הפתרונות **המרוכב** של המשוואה

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 5 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} x$$

וממנו מצאו בסיס למרחב הפתרונות הממשי ע״י שימוש בפונקציות $\operatorname{Re} x, \operatorname{Im} x$.

תשובה 1

הע״ע הם $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 4+4i,\ \lambda_3 = 4-4i$, נמצא ו״ע:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 59\times16 \\ 80 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftarrow A+4I = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 5 & 11 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 0 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & -59 & 0 \\ 0 & -16 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(4+4i)I - A = \begin{pmatrix} 3+4i & 5 & 3 \\ -5 & -3+4i & 4 \\ 0 & 0 & 8+i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3+4i & 5 & 0 \\ -5 & -3+4i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ולכן הו״ע הוא $v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3+4i \\ 0 \end{pmatrix}$.

וכמובן $v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3-4i \\ 0 \end{pmatrix}$. והבסיס למרחב הפתרונות המרוכבים הוא

$$x_1 = v_1 e^{-4t} = \begin{pmatrix} 59\times16e^{-4t} \\ 80e^{-4t} \\ 5e^{-4t} \end{pmatrix},\quad \mathrm{x}_2 = v_2 e^{(4+4i)t} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5e^{(4+4i)t} \\ (3+4i)e^{(4+4i)t} \\ 0 \end{pmatrix},\quad \mathrm{x}_3 = \overline{x}_2 = v_3 e^{(4-4i)t} = \begin{pmatrix} -5e^{(4-4i)t} \\ (3-4i)e^{(4-4i)t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

והבסיס למרחב הפתרונות הממשיים הוא:

$$x_1 = v_1 e^{-4t} = \begin{pmatrix} 59\times16e^{-4t} \\ 80e^{-4t} \\ 5e^{-4t} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Re}(\mathrm{x}_2) = \operatorname{Re}\left(v_2 e^{(4+4i)t}\right) = \begin{pmatrix} -5e^{4t}\cos(4t) \\ 3e^{4t}\cos(4t) - 4e^{4t}\sin(4t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im}(\mathrm{x}_2) = \begin{pmatrix} -5e^{4t}\sin(4t) \\ 4e^{4t}\cos(4t) + 3e^{4t}\sin(4t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

הארה: הבסיס למרחב הפתרונות הממשיים הוא **גם** בסיס למרחב הפתרונות המרוכבים (למה?)

שאלה 2

הסבירו מילולית מהם כל אחד מהשלבים בפתרון לפי שיטת המקדמים הבלתי ידועים, של המערכת הבאה:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

כאשר נתון כי הפולינום האופייני של המטריצה A (מטריצה ממשית) הוא $P(t)=[(t-3)^2+4]^2$.

תשובה 2

1. שלב 1. ע״ע: פה כבר נתון לנו הפולינום האופייני ולכן הע״ע הם $\begin{matrix} \lambda = 3+2i \\ \bar{\lambda} = 3-2i \end{matrix}$ כאשר הריבוב של כל ע״ע הוא 2.
2. שלב 2. הפונקציות היוצרות את הפתרונות: הע״ע $\begin{matrix} \lambda = 3+2i \\ \bar{\lambda} = 3-2i \end{matrix}$ תורמים $\begin{matrix} e^{3t}\cos 2t \\ e^{3t}\sin 2t \end{matrix}$, ומכיוון שריבובם 2 אז הם נותנים עוד שתי פונקציות $\begin{matrix} te^{3t}\cos 2t \\ te^{3t}\sin 2t \end{matrix}$.
3. שלב 3. הצגת הפתרון: נציג את פתרון $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ע״ס הפונקציות משלב 2:

(1)

$$x_i = a_i e^{3t}\cos 2t + b_i te^{3t}\cos 2t + c_i e^{3t}\sin 2t + d_i te^{3t}\sin 2t$$

$$\dot{x}_i = \left(3a_i + b_i + 2c_i\right)e^{3t}\cos 2t + \left(3b_i + 2d_i\right)te^{3t}\cos 2t + \left(-2a_i + 3c_i + d_i\right)e^{3t}\sin 2t + \left(-2b_i + 3d_i\right)te^{3t}\sin 2t$$

4. שלב 4. נדרוש ש- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ יהיה פתרון כלומר נדרוש כי $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.
5. שלב 5. נשווה מקדמים של הפונקציות $e^{3t}\cos 2t, e^{3t}\sin 2t$, $te^{3t}\cos 2t, te^{3t}\sin 2t$ בשורות $i=1,\dots,4$:

   המקדמים של $e^{3t}\cos 2t$:

   $$3a_i + b_i + 2c_i = a_{i1}a_1 + a_{i2}a_2 + a_{i3}a_3 + a_{i4}a_4$$

   המקדמים של $te^{3t}\cos 2t$:

   $$3b_i + d_i = a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + a_{i3}b_3 + a_{i4}b_4$$

   המקדמים של $e^{3t}\sin 2t$:

   $$-2a_i + 3c_i + d_i = a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + a_{i3}c_3 + a_{i4}c_4$$

   המקדמים של $te^{3t}\sin 2t$:

   $$-2b_i + 3d_i = a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + a_{i3}d_3 + a_{i4}d_4$$

   ואלה הן 16 משוואות ב-16 נעלמים.
6. שלב 6. שלב אחרון: פותרים את המערכת שקיבלנו בשלב 5, ומקבלים את הפתרון הכללי.

שאלה 3

יהי L_{k+1} מרחב הקוווזי פולינומים ממעלה $\geq k$ המתאים ל- $\lambda = \alpha + i\beta$, כלומר:

$$L_{k+1} = \left\{ e^{\lambda t}(c_0 + \cdots + c_k t^k) \middle| \forall_{1 \leq j \leq n}\, c_j \in \mathbb{C} \right\}.$$

א. הוכיחו כי L_{k+1} מרחב לינארי מעל $\mathbb{C}$, ומצאו את מימדו.

ב. הוכיחו כי $\left(e_0=e^{\lambda t},e_1=te^{\lambda t},e_2=\frac{t^2}{2!}e^{\lambda t},\cdots,e_k=\frac{t^k}{k!}e^{\lambda t}\right)$ בסיס ל- L_{k+1} מעל $\mathbb{C}$.

נגדיר אופרטור לינארי $\frac{d}{dt}=\mathfrak{D}:L_{k+1}\to L_{k+1}$, אופרטור הגזירה (כלומר כל קווזי פולינום עובר לנגזרתו ובסימונים: $\dot{P}$ $P(t)\overset{\mathfrak{D}}{\mapsto}\frac{dP}{dt}$).

ג. הוכיחו כי אכן תמונת $\mathfrak{D}$ היא ב- L_{k+1}, והוכיחו שאכן $\mathfrak{D}$ אופרטור לינארי.

ד. מצאו את המטריצה המייצגת של $\mathfrak{D}$ ע"פ הבסיס שבסעיף ב'.

תשובה 3

א. סגירות לחיבור:

$$e^{\lambda t}\left(c_0+\cdots+c_kt^k\right)+e^{\lambda t}\left(d_0+\cdots+d_kt^k\right)=e^{\lambda t}\left(\left(c_0+d_0\right)+\cdots+\left(c_k+d_k\right)t^k\right)\in L_{k+1}$$

סגירות לכפל בסקלר: $\alpha e^{\lambda t}\left(c_0+\cdots+c_kt^k\right)=e^{\lambda t}\left(\alpha c_0+\cdots+ac_kt^k\right)\in L_{k+1}$, ולכן L_{k+1} תת מרחב לינארי (של הפונקציות הרציפות למשל) מעל $\mathbb{C}$. $\dim L_{k+1}=k+1$ כפי שנראה בסעיף הבא.

ב. כדי להוכיח ש- $\left(e_0=e^{\lambda t},e_1=te^{\lambda t},e_2=\frac{t^2}{2!}e^{\lambda t},\cdots,e_k=\frac{t^k}{k!}e^{\lambda t}\right)$ בסיס מספיק להוכיח כמובן ש- $\left(v_0=e^{\lambda t},v_1=te^{\lambda t},v_2=te^{\lambda t},\cdots,v_k=t^ke^{\lambda t}\right)$ בסיס (כי רק הכפלנו בסקלרים שונים מאפס כל אחד מאברי e_i). ברור כי $L_{k+1}=\mathrm{Span}\{v_0,...,v_k\}$. נוכיח כי הם בת"ל. אם

$$\alpha_0v_0+\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_\kappa v_k=0$$

$$\alpha_0e^{\lambda t}+\alpha_1te^{\lambda t}+\cdots+\alpha_kt^ke^{\lambda t}=0$$

$$\alpha_0+\alpha_1t+\cdots+\alpha_kt^k=0$$

אבל הפולינום הזה מתאפס על ∞ נקודות $\Leftarrow$הפולינום הוא פולינום האפס $\Leftarrow$ $\alpha_0=\cdots=\alpha_k=0$ כלומר אכן הקבוצה $\left(v_0=e^{\lambda t},v_1=te^{\lambda t},v_2=te^{\lambda t},\cdots,v_k=t^ke^{\lambda t}\right)$ פורשת ובת"ל כלומר בסיס.

ג. $\mathfrak{D}$ הוא אופרטור גזירה והנגזרת היא אופרטור לינארי ולכן $\mathfrak{D}$ לינארי. נבדוק כי תמונת $\mathfrak{D}$ ב- L_{k+1}. מכיוון ש- $\mathfrak{D}$ אופרטור לינארי מספיק לבדוק רק עבור איברי הבסיס:

$$\mathfrak{D}e_o=\frac{d}{dt}e^{\lambda t}=\lambda e^{\lambda t}=\lambda e_0\in L_{k+1}$$

$$\mathfrak{D}e_1=\frac{d}{dt}\left(te^{\lambda t}\right)=\lambda te^{\lambda t}+e^{\lambda t}=\lambda e_1+e_0\in L_{k+1}$$

$$\vdots$$

$$\mathfrak{D}e_k=\frac{d}{dt}\left(\frac{t^k}{k!}e^{\lambda t}\right)=\lambda\frac{t^k}{k!}e^{\lambda t}+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t}=\lambda e_k+e_{k-1}\in L_{k+1}$$

ולכן תמונת $\mathfrak{D}$ ב- L_{k+1}.

ד. בסעיף הקודם עשינו את כל העבודה:

$$[\mathfrak{D}]_{(e)}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}$$