משוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרון תרגיל 1

שאלה 1

פתור את המשוואה הבאה לכל ערך של $a \in \mathbf{N}$: $\begin{cases} y' = y^a \\ y(a) = a-2 \end{cases}$

תשובה 1

אם $a \neq 1$

$$\frac{dy}{dx} = y^a \Rightarrow \frac{dy}{y^a} = dx \Rightarrow \frac{y^{1-a}}{1-a} = x + c \Rightarrow y = ((1-a)(x+c))^{\frac{1}{1-a}}.$$

אם $a = 1$

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \ln|y| = x + c \Rightarrow y = Ce^x$$

בשני המקרים כיוון שחילקנו ב y^a , יש לבדוק האם $y = 0$ הוא פתרון, והוא פתרון עבור $a \neq 0$.
ובצירוף תנאי ההתחלה :
עבור $a = 1$: $y = -e^{x-1}$
עבור $a = 2$: $y = 0$
אחרת : $y = \left((1-a)\left(x + \left(\frac{a-2}{1-a}\right)^{1-a} - a\right)\right)^{\frac{1}{1-a}}$

שאלה 2

פתור המשוואות הבאות :

א. $2\sqrt{x}\,dx = dt$

ב. $\dot{x}\sin t = x\ln x$ רמז : השתמשו בכך ש- $s = \tan\frac{t}{2} \Rightarrow \frac{ds}{s} = \frac{dt}{\sin t}$

תשובה 2

א. המשוואה כבר מופרדת, ולכן נאנטגרל את שני האגפים

$$\int 2\sqrt{x}dx = \int dt \Rightarrow \tfrac{4}{3}x^{3/2} = t + C \Rightarrow x = \left(\tfrac{3}{4}t + \tilde{C}\right)^{2/3}$$

ב. פה המשוואה לא מופרדת ולכן ראשית נפריד ונקבל $\frac{dx}{x\ln x}=\frac{dt}{\sin t}$

נאנטגרל $\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\int\frac{dy}{y}=\ln y=\ln|\ln x|$

לפי הרמז $s=\tan\frac{t}{2}\Rightarrow\int\frac{dt}{\sin t}=\int\frac{ds}{s}=\ln s=\ln\tan\frac{t}{2}$

ולכן $\ln|\ln x|=\ln\tan\frac{t}{2}+C\Rightarrow\ln x=C\tan\frac{t}{2}\Rightarrow x=\exp\left\{C\tan\frac{t}{2}\right\}$

יש לבדוק ולגלות כי $x\equiv 1,0$ פתרונות (הבדיקה נדרשת כי חלקנו ב- $x\ln x$).

שאלה 3

פתור את המשוואה $y'=\cos^2(y)$, עבור כל אחד מתנאי ההתחלה:

ג. $y(0)=0$

ד. $y(0)=\pi$

ה. $y(0)=0.5\pi$

תשובה 3

$$\frac{dy}{dx}=\cos^2(y)\Rightarrow\frac{dy}{\cos^2(y)}=dx\Rightarrow\tan y=x+c$$

כמו כן יש להוסיף את הפתרון: $y=\frac{\pi}{2}+\pi K,\ K\in\mathbf{Z}$ (חילקנו ב $\cos^2(y)$).

הפתרונות שנקבל עבור תנאי ההתחלה:

א. $y=\arctan(x)$

ב. $y=\pi+\arctan(x)$

ג. $y=\frac{\pi}{2}$

שאלה 4

א. מצא את הפתרון הכללי (כפונקציה של f,a,b) של המשוואה: $y'=f(ax+by+c)$.

ב. פתור את המשוואות הבאות:

1. $y'=\sqrt{5x+2y-3}$

2. $(2x+y+1)dx=(4x+2y-3)dy$

תשובה 4

א. נבצע הצבה $z=ax+by+c$ ונקבל $\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx} \Leftarrow f(z)=\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx}-a\right) \Leftarrow$

$\frac{dz}{dx}=bf(z)+a \Leftarrow dx=\frac{dz}{bf(z)+a} \Leftarrow x=\int_K^{ax+by+c}\frac{dt}{bf(t)+a}$. כמו כן יש לבדוק את

הפתרונות $bf(z)+a=0$

ב. 1.

כאן $f(z)=\sqrt{z}, a=5, b=2, c=-3 \Leftarrow x=\int_K^{5x+2y-3}\frac{dt}{2\sqrt{t}+5} \Leftarrow$

$x+C=\sqrt{5x+2y-3}-2.5\ln\left(2\sqrt{5x+2y-3}+5\right)$. במקרה זה $bf(z)+a>0$, ולכן

אין פתרונות נוספים.

2.

כאן $f(z)=\frac{z+1}{2z-3}, a=2, b=1, c=0 \Leftarrow x=\int_K^{2x+y}\frac{dt}{\frac{t+1}{2t-3}+2}=\int_K^{2x+y}\frac{2t-3}{5t-5}dt \Leftarrow$

$x+C=\frac{2}{5}(2x+y)-\frac{1}{5}\ln(2x+y-1) \Leftarrow Ce^{2y-x}=2x+y-1$.

פתרון $bf(z)+a=0$ יביא לפתרון $y=1-2x$, המתקבל בפתרון הכללי עבור $C=0$.

שאלה 5

א. תהי $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ הפיכה, גזירה ועולה ממש.

פתור את המשוואה: $f'(y)y'=xf(y)$ (תן פתרון כללי).

ב. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאי: $\lim_{x\to\infty}|y(x)|<\infty$.

תשובה 5

א. $f'(y)y'=xf(y) \Leftarrow \frac{f'(y)dy}{f(y)}=xdx$ (עבור $f(y)\neq 0$) $\Leftarrow \ln|f(y)|=\frac{x^2}{2}+c \Leftarrow$

$f(y)=Ke^{\frac{x^2}{2}} \Leftarrow y=f^{-1}\left(Ke^{\frac{x^2}{2}}\right)$.

עבור $f(y)=0$ נקבל פתרון יחיד $y=f^{-1}(0)$, שהוא אכן פתרון המקיים את המשוואה.

ב. מכיוון ש f עולה ועל (הפיכה) גם f^{-1} כזו ולכן לכל $K \neq 0$ מתקיים:

$\lim_{x\to\infty}|y(x)| = \lim_{x\to\infty}\left|f^{-1}\left(Ke^{\frac{x^2}{2}}\right)\right| = \infty$ (השתמשנו בעובדה ש f^{-1} רציפה.

ומכאן הפונקציה אינה חסומה.

הפתרון היחיד, לכן, המקיים את תנאי החסימות הוא הפתרון $y = f^{-1}(0)$.

שאלה 6

פתור את המשוואה $\dot{y} = -y \quad \dot{x} = x$ וצייר את מרחב הפאזה x, y.

תשובה 6

כדי לפתור את המשוואות נעשה הפרדת משתנים ונקבל $\begin{cases} x = e^{t} \\ y = e^{-t} \end{cases}$

כדי לצייר את מישור הפאזה נשים לב כי בכל נקודה (x, y) המשיק הוא $(x, -y)$ ולכן מרחב הפאזה הוא: