משוואות דיפרנציאליות רגילות

תרגיל+פתרון 14

שאלה 1

א. מצא פתרון טורי למשוואה: $\ddot{x} - x = 0$.
ב. הראה כי הפונקציות המתקבלות הן הפתרונות המוכרים למשוואה.

תשובה 1

א. נציב $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ במשוואה ונקבל: $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} - a_n\right)x^n = 0$.

ונקבל נוסחת נסיגה: $a_{n+2} = \dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$.

פתרון נוסחת הנסיגה: $x(t) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n)!} t^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}$.

ב. הפונקציות שהתקבלו הן $\sinh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ ו- $\cosh(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

שאלה 2

פתור ע"י שיטת וריאציית הפרמטרים את המשוואות הבאות:
א. $\ddot{x} + x = \tan t$ כאשר $0 < t < \pi$.
ב. $\dddot{x} + \dot{x} = \dfrac{1}{\sin t}$ כאשר $0 < t < \pi$.

תשובה 2

א. הפתרונות להומוגנית: $\xi_1(t) = \cos t, \xi_2(t) = \sin(t)$. נחפש $x_p = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ (כך שגם הנגזרות מקיימות $\forall 1 \le i \le n-1: x_p^{(i)} = c_1\xi^{(i)}_1 + c_2\xi_2^{(i)}$ ונקבל את מערכת המשוואות: $\begin{cases} \dot{c}_1\cos(t) + \dot{c}_2\sin(t) = 0 \\ -\dot{c}_1\sin(t) + \dot{c}_2\cos(t) = \tan t \end{cases}$ נחלץ את $\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix}$ (ע"י הכפלת $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}^{-1}$ ונקבל: $\dot{c}_1 = \dfrac{-\sin^2 t}{\cos t}$, $c_1 = \sin t - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)$.

$\dot{c}_2 = \sin t$ ולכן $c_2 = -\cos t$ ומכאן הפתרון הכללי:

$$x(t) = \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t - \frac{\cos t}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right).$$

ב. הפתרונות להומוגנית: $\xi_1(t)=\cos t, \xi_2(t)=\sin(t), \xi_3(t)=1$. נחפש $x_p=c_1\xi_1+c_2\xi_2+c_3\xi_3$ ונקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \dot{c}_1\cos(t)+\dot{c}_2\sin(t)+\dot{c}_3=0 \\ -\dot{c}_1\sin(t)+\dot{c}_2\cos(t)=0 \\ -\dot{c}_1\cos(t)-\dot{c}_2\sin(t)=(\sin t)^{-1} \end{cases}$$

גם כאן נוכל למצוא את ההפכית ל-

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 1 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{pmatrix}$$

ואז להכפיל בה. ואז נקבל, $\dot{c}_2=-1$ ומכאן $c_2=-t$.

$\dot{c}_1=-\dfrac{\cos t}{\sin t}$ או $c_1=-\ln(\sin t)$. $\dot{c}_3=\dfrac{1}{\sin t}$ ומכאן $c_3=\dfrac{-1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\cos t}{1-\cos t}\right)$.

ומכאן הפתרון הכללי:

$$x(t)=\alpha_1\cos t+\alpha_2\sin t+\alpha_3-t\sin t-\cos t\ln(\sin t)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right)$$

שאלה 3

נתונה המשוואה $t^2\ddot{x}+t\dot{x}+\left(t^2-\dfrac{1}{4}\right)x=0$. נתון כי $\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}$ הוא פתרון שלה. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה בעזרת שיטת הורדת הסדר (התבונן בתחום $t>0$ בלבד).

תשובה 3

נציב: $x=\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}u(t)$ במשוואה ונקבל עבור $\dot{u}$ את המשוואה הליניארית:

$\ddot{u}\sin t+2\dot{u}\cos t=0$ שפתרונה (ללא הקבוע) $\dot{u}=\dfrac{1}{\sin^2 t}$ $\Leftarrow$ $u=-\cot(t)$, נציב ונקבל

פתרון נוסף למד״ר $y_2(x)=-\dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}$, ופתרון כללי למד״ר: $\dfrac{c_1\sin t+c_2\cos t}{\sqrt{t}}$.

הערה חשובה: באופן כללי כל השיטות שלמדנו תקפות לגבי משוואות מתוקנות. (הערה זו לא קשורה לתרגיל זה).

שאלה 4

נתונה המשוואה $\ddot{x}+x\sin t=e^t$ עם תנאי התחלה $\dot{x}(0)=2, x(0)=1$.

א. מצאו פתרון טורי בסביבת $t=0$ עד קרוב $o\left(t^3\right)$.

ב. העריכו את השגיאה, ומצאו $\varepsilon>0$ כך שלכל $|t|\le\varepsilon$ מתקיימת ההערכה.

תשובה 4

א. נסמן $x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ $\Leftarrow$ $\dot{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} t^n$ $\Leftarrow$

$\ddot{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} t^n$. $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \cdots$, $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \cdots$.

נציב את כל אלה במשוואה ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} t^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) \left(t - \frac{t^3}{3!} + \cdots \right) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \cdots.$$

נשווה מקדמים (מספיק לדעת את שלושת המקדמים הראשונים כי אנו מעוניינים בקרוב $o(t^3)$) $t^0 : 2c_2 = 1$, $t^1 : 6c_3 + c_0 = 1$ תנאי התחלה $x(0) = c_0 = 1, \dot{x}(0) = c_1 = 2$

$\Leftarrow c_2 = 0.5$, $c_3 = 0$. ולכן $x = 1 + 2t + \frac{t^2}{2 \cdot 2!} + 0 \cdot t^3 + R_3(t)$, ומתקיים

$$R_3(t) = \frac{x^{(4)}(\theta t)}{4!} t^4, \quad 0 < \theta < 1.$$

ב. בסעיף זה אנו צריכים להעריך את $R_3(t)$. ראשית המשוואה שלנו היא מהצורה $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ כאשר $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1} - x_2 \sin x_1$. נשתמש בהוכחת משפט הקיום והיחידות כדי להעריך את השגיאה. ראשית נקח מלבן סביב נקודת ההתחלה $(0,1,2)$ למשל $D = [-1,1] \times [-2,2] \times [-3,3]$ (ניתן לבחור מלבן יותר קטן אך לא הכרחי). נעריך את f במלבן הנ"ל: $\left| f(x_1, x_2, x_3) \right| = \left| e^{x_1} - x_2 \sin x_1 \right| \le e + 2$ (ברור כי זה החסם גם של $\ddot{x}$).

ועכשיו נבחר ε (לפי קיום ויחידות) כך שאם $|t| \le \varepsilon$ אז $(t, x(t), \dot{x}(t)) \in D$. תנאי ראשון על ε הוא כמובן $0 < \varepsilon \le 1$. בשביל התנאי השני נשתמש בכלל ליבניץ:

$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(s) ds$ ולכן

$\left| x(t) \right| \le \left| x(0) \right| + \left| \int_0^t \dot{x}(s) ds \right| \underset{|t| \le \varepsilon}{\le} 1 + \varepsilon \max_D \dot{x} \le 1 + 3\varepsilon$, ולכן נדרוש $1 + 3\varepsilon \le 3$

כלומר נדרוש $\varepsilon \le \frac{2}{3}$. תנאי שלישי $\dot{x}(t) = \dot{x}(0) + \int_0^t \ddot{x}(s) ds$ ולכן

$$\left| \dot{x}(t) \right| = \left| \dot{x}(0) \right| + \left| \int_0^t \ddot{x}(s) ds \right| \le 2 + \varepsilon \max_D \left| \ddot{x} \right| \le 2 + \varepsilon \max_D \left| f \right| \le 2 + \varepsilon (e + 2)$$

ולכן נדרוש $\varepsilon \le \frac{1}{e+2}$. סה"כ יש שלושה תנאים ולמשל $\varepsilon = 0.1$ עונה על כולם. נעבוד עכשיו במלבן היותר קטן

$D_1 = [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-2,2] \times [-3,3] = [-0.1, 0.1] \times [-2,2] \times [-3,3]$, מתקיים

$\dddot{x} = \frac{d}{dt} \ddot{x} = \frac{d}{dt} f(t, x, \dot{x}) = f'_{x_1} + f'_{x_2} \dot{x} + f'_{x_3} \ddot{x}$ נעריך בנפרד את כל אחד מהגורמים:

$\left|f'_{x_1}\right| = \left|e^{x_1} - x_2\cos x_1\right| \le \left|e^{x_1}\right| + \left|x_2\cos x_1\right| \le e^{0.1} + 2 \le 4$, $\left|f'_{x_2}\right| = \left|-\sin x_1\right| \le 1$,
$f'_{x_3} = 0$.

ולכן $\left|\ddot{x}\right| = \left|f'_{x_1} + f'_{x_2}\dot{x} + f'_{x_3}\ddot{x}\right| \le \left|f'_{x_1}\right| + \left|f'_{x_2}\right|\left|\dot{x}\right| + \left|f'_{x_3}\right|\left|\ddot{x}\right| \le 4 + 1\cdot 2 \le 6$.

$$\dddot{x} = \frac{d}{dt}\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(f'_{x_1} + f'_{x_2}\dot{x}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^t - x\cos t - \dot{x}\sin t\right) =$$
$$= e^t - \dot{x}\cos t + x\sin t - \ddot{x}\sin t - \dot{x}\cos t ,$$

ולכן $\left|\dddot{x}\right| \le \left|e^t\right| + \left|\dot{x}\right| + \left|x\right| + \left|\ddot{x}\right| + \left|\dot{x}\right| \le e^{0.1} + 3 + 2 + e + 2 + 2 \le 20$ לכל $\left|t\right| \le \varepsilon$.

לסיכום: בקטע $t \in [-0.1, 0.1]$ אנו יכולים לתת הערכה לשגיאה והיא
$\left|R_3(t)\right| = \left|\frac{\dddot{x}(\theta t)}{4!}t^4\right| \le \frac{20}{24}t^4$. מש״ל