משוואות דיפרנציאליות רגילות

תשובות חלקיות 11

שאלה 1

נתונה משוואה לינארית $x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\cdots+a_0x=0$. תנו פתרון כללי כשנתון כי שורשי הפולינום הם:

א. $1,2$

ב. $3,4,5\pm 6i$

ג. $7,7,8\pm 9i,8\pm 9i$ (**הערה:** מספר הפעמים שמספר מופיע = ריבוב האלגברי שלו)

ד. $0,\pm 3i$

תשובות 1

א. הפתרון להומוגנית הוא: $x=c_1e^t+c_2e^{2t}$.

ב. הפתרון להומוגנית הוא: $x=c_1e^{3t}+c_2e^{4t}+c_3e^{5t}\cos 6t+c_4e^{5t}\sin 6t$.

ג. $x=\left(c_1+c_2t\right)e^{7t}+\left(c_3+c_4t\right)e^{8t}\cos 9t+\left(c_5+c_6t\right)e^{8t}\sin 9t$.

ד. $x=c_1+c_2\cos 3t+c_3\sin 3t$.

שאלה 2

נתונה המשוואה $x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\cdots+a_0x=f(t)$. הסבירו איך מחפשים פתרון פרטי + פתרון כללי עבור שורשים של שאלה 1 עבור כל אחד מה- $f(t)$ הבאים:

א. $f(t)=e^{6t}$.

ב. $f(t)=e^{6t}\cos 2t+e^{7t}\sin 3t$.

ג. $f(t)=t^2e^{6t}$.

ד. $f(t)=te^{3t}+3t^2e^{8t}\sin 10t$.

ה. $f(t)=t^3$.

פתרון חלקי ניתן בתרגולים.

שאלה 3

נתונה המשוואה $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}=Ax+F$. הסבירו איך מחפשים פתרון פרטי עבור הע״ע של שאלה 1 עבור כל אחד מה- F הבאים:

א. $f_1=e^{6t},\ f_2=0,\cdots,f_n=0$.

ב. $f_1=e^{6t}\cos 2t,\ f_2=e^{7t}\sin 3t,\ f_3=\cdots=0$.

ג. $f_1=te^{6t},\ f_2=t^3e^{6t},\ f_3=\cdots=0$.

ד. $f_1=5t^2e^{8t}\sin 10t,\ f_2=t^3+\sin 3t$, והשאר אפסים.

ה. $f_1=t,\ f_2=t^2,\ f_3=\cdots=1$.

שאלה 4

פתרו את המערכות+המשוואות הבאות:

א. $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e^{-t}\\0\end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t^2\\1\end{pmatrix}$

ג. $\ddot{x}+5\dot{x}+6x=e^{-2t}+t\cos t$.

ד. $\ddot{x}+4\dot{x}+5x=e^{-2t}\cos t+t$.

ה. $\dddot{x}-x=\sin t+e^t$.

ו. משוואה לסיכום ב- $\mathbb{C}$: $\ddot{x}+x=e^{it}$.

תשובה 4

א. הע״ע של המטריצה הם $-1,4$. הקווזי פולינום מתאים ל- -1. ולכן הפתרון הכללי של המערכת יהיה מהצורה: $\underline{x}=\left(\underline{c}_1+\underline{c}_2t\right)e^{-t}+\underline{c}_3e^{4t}$, כאשר $\underline{c}_i=\begin{pmatrix}c_{1i}\\c_{2i}\end{pmatrix}$ ו- $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

נגזור ונקבל $\underline{\dot{x}}=\left(c_2-c_1-c_2t\right)e^{-t}+4c_3e^{4t}$ נציב במשוואה ונקבל:

$$\underline{\dot{x}}=\left(c_2-c_1-c_2t\right)e^{-t}+4c_3e^{4t}=A\underline{x}+\begin{pmatrix}e^{-t}\\0\end{pmatrix}$$

$$=\left(A\underline{c}_1+A\underline{c}_2t+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)e^{-t}+A\underline{c}_3e^{4t}$$

ועכשיו נשווה מקדמים ונקבל

$$e^{-t}:\quad \underline{c}_2-\underline{c}_1=A\underline{c}_1+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$te^{-t}:\quad -\underline{c}_2=A\underline{c}_2$$

$$e^{4t}:\quad 4\underline{c}_3=A\underline{c}_3$$

ואז פותרים את המערכות הללו (אלו שלוש מערכות לינאריות).

הערה: אם היינו רוצים רק פתרון פרטי למערכת אז היינו יכולים לצמצם קצת את צורת הפתרון הפרטי לצורה הנ״ל: $\underline{x}=\left(\underline{c}_1+\underline{c}_2t\right)e^{-t}$.

ב. ע״ע של המטריצה הם: $1\pm 2i$, הפעם אין תהודה כי הקווזי פולינום מתאים ל- 0.(כלומר הוא פולינום.) הוא ממעלה 2 (כי מסתכלים על המעלה המקסימלית). נחפש פתרון פרטי. הוא יהיה מהצורה $\begin{cases}x=c_0+c_1t+c_2t^2\\ y=d_0+d_1t+d_2t^2\end{cases}$ נגזור $\begin{cases}\dot{x}=c_1+2c_2t\\ \dot{y}=d_1+2d_2\end{cases}$ (זה נכון כי אין תהודה),

נציב במשוואה $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t^2\\1\end{pmatrix}$ ונשווה מקדמים.

$$1\to\begin{cases}c_1=c_0+2d_0\\ d_1=-2c_0+d_0+1\end{cases},\quad t\to\begin{cases}2c_2=c_1+2d_1\\ 2d_2=-2c_1+d_1\end{cases},\quad t^2\to\begin{cases}0=c_2+2d_2+1\\ 0=-2c_2+d_2\end{cases},$$

מהמשוואות של t^2, נובע כי $\begin{matrix} c_2 = 1/5 \\ d_2 = 2/5 \end{matrix}$, נציב במשוואות של t ונקבל $\begin{matrix} c_1 = -6/25 \\ d_1 = 8/25 \end{matrix}$, נציב במשוואות של 1 ונקבל $\begin{matrix} c_0 = 4/25 \\ d_0 = -1/5 \end{matrix}$. מצאנו פתרון פרטי ואת הפתרון הכללי נשאיר לקוראת החרוצה.

ג. למשוואות מהסוגים הנ"ל יהיה פתרון בתרגיל הבא.

ו. הפולינום המתאים הוא $p(s) = s^2 + 1$, שורשיה הם $\pm i$. הפתרון הכללי להומוגנית יהיה $x_h = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$ או $x_h = c_1 \sin t + c_2 \cos t$. נחפש פתרון פרטי הוא יהיה מהצורה $x_p = t^1 \cdot ce^{it} \Leftarrow \dot{x}_p = ce^{it} + icte^{it} \Leftarrow \ddot{x}_p = ice^{it} + ice^{it} - cte^{it}$ נציב במשוואה $ice^{it} + ice^{it} - cte^{it} + tce^{it} = e^{it} \Leftarrow 2ice^{it} = e^{it} \Leftarrow 2ic = 1 \Leftarrow c = \frac{1}{2i}$.