אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה להנדסה
בחינה במשוואות דיפרנציאליות רגילות מועד א', 25.07.2002
המורה: דר' א. לבנט

משך הבחינה: 3 שעות
חומר מותר לשימוש: דף A4 אישי הממולא בכתב יד משני הצדדים.
יש לענות על 5 שאלות בלבד ולציין את מספרי השאלות במחברת.
כל שאלה שווה ל-20 נקודות.

1. פתור את המשוואות

א. 10 נק' $$xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$$

ב. 10 נק' $$y'''=(y'')^2$$

2. פתור בעיית קושי

$$x^2y''+4xy'+2y=xe^x,\quad y(1)=0,\ y'(1)=1,\ x>0$$

3. מצא פתרון כללי

$$\begin{cases} y_1'=2y_1+4y_2-8 \\ y_2'=3y_1+6y_2 \end{cases}$$

4.

א. מצא פתרון כללי (11 נק')

$$y''+y=4\sin x$$

ב. באיזו צורה מחפשים פתרון פרטי למשוואה (9 נק')

$$y'''+y'=x^2-e^x\cos x+x\sin x$$

5.

א. מצא פתרון בעזרת טורי חזקות בסביבה של $x=0$ עם דיוק עד $o(x^3)$ (12 נק')

$$y''-x^2y=\sin x,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$$

ב. הערך את השארית על-ידי פונקציה של x. הצבע על $\varepsilon>0$ המגדיר את הסביבה $|x|\le\varepsilon$ שבה מתקיימת ההערכה (8 נק').

6.

א. מצא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות של בעיית השפה (10 נק')

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0,\ \lambda\in\Re \\ y'(0)=y'(2)=0 \end{cases}$$

ב. הצג את הפונקציה $y=\sin x$, $x\in[0,2]$, כטור לפי הפונקציות העצמיות. האם הטור מתכנס ל- $y=\sin x$ בכל הנקודות? (10 נק')

בהצלחה!

פתרונות

1 א

$$xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$$

$$y' - \frac{y}{x} = \left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)$$ הומוגנית

$$\Rightarrow \quad z = \frac{y}{x}, \quad y' = (xz)' = xz' + z$$

בדיקה:

$$xz' + \cancel{z} - \cancel{z} = (1+z)\ln(1+z) \qquad 1+z>0 \quad \ln(1+z)=0$$

$$\Leftarrow \quad z=0 \quad \text{פתרון}$$

$$\int \frac{z'\,dx}{(1+z)\ln(1+z)} = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{d(z+1)}{(z+1)\ln(1+z)} = \int \frac{d\ln(z+1)}{\ln(1+z)} = \ln|\ln(1+z)| = \ln|x| + c$$

$$\ln(1+z) = \tilde{c}x, \quad \tilde{c} = e^c, -e^c, 0$$

$\tilde{c}=0 \Rightarrow z=0$ מוכל

$$1+z = e^{\tilde{c}x} \rightarrow z = e^{\tilde{c}x} - 1$$

$$\boxed{y = x\left(e^{\tilde{c}x}-1\right), \quad \tilde{c}\in\mathbb{R}}$$

1 ב.

הצבה,

$$y''' = (y'')^2, \quad y'' = z$$

בדיקה: $z=0$

$\Rightarrow y''=0 \Rightarrow y = c_1x + c_2$ פתרון

$$z' = z^2, \quad \frac{dz}{z^2} = dx$$

$$-\frac{1}{z} = x + c$$

$$y'' = -\frac{1}{x+c}$$

$$y' = -\ln|x+c| + c_1$$

$$y = -\int \ln|x+c|\,dx + c_1x = -\ln|x+c|\cdot x + \int\frac{x}{x+c}\,dx + c_1x$$

$$= -\ln|x+c|\,x + c_1x + \int dx - c\int\frac{dx}{x+c} = -x\ln|x+c| + c_1x + x - c\ln|x+c|$$

$$\boxed{y = -\ln|x+c|\cdot(x+c) + c_1x + c_2, \quad y = c_1x + c_2}$$

$x^2y'' + 4xy' + 2y = xe^x, \quad x>0 \;, \; y(1)=0, \; y'(1)=1$ ב.

$y = x^r, \; y' = rx^{r-1}, \; y'' = r^2x^{r-2} - rx^{r-2}$

$r^2 + 3r + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = -1, -2$

$y_h = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}$

שיטת מקדמים מערכים: $y_0 := y, \; y_1 = y'$

$$\begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' + \frac{4}{x} y_1 + \frac{2}{x^2} y_0 = \frac{1}{x} e^x \end{cases}$$

פתרון כללי:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = C_1(x) \begin{pmatrix} x^{-1} \\ -x^{-2} \end{pmatrix} + C_2(x) \begin{pmatrix} x^{-2} \\ -2x^{-3} \end{pmatrix}$$

מציבים:

$$\begin{cases} c_1(-x^{-2}) + c_2(-2x^{-3}) + c_1' x^{-1} + c_2' x^{-2} = c_1(-x^{-2}) + c_2(-2x^{-3}) \\ c_1(2x^{-3}) + c_2(6x^{-4}) + \frac{4}{x} c_1(-x^{-2}) + \frac{4}{x} c_2(-2x^{-3}) + \frac{2}{x^2} c_1(x^{-1}) + \frac{2}{x^2} c_2 x^{-2} + c_1'(-x^{-2}) + c_2'(-2x^{-3}) = \frac{1}{x} e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1' x^{-1} + c_2' x^{-2} = 0 \\ c_1'(-x^{-2}) + c_2'(-2x^{-3}) = \frac{1}{x} e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1' x + c_2' = 0 \\ c_1' x + 2c_2' = -x^2 e^x \end{cases}$$

$\det \begin{pmatrix} x & 1 \\ x & 2 \end{pmatrix} = 2x - x = x \qquad c_1' = \frac{1}{x} x^2 e^x = xe^x, \; c_2' = \frac{1}{x} x(-x^2)e^x = -x^2 e^x$

$c_1 = \int_1^x te^t\,dt = te^t\Big|_1^x - \int_1^x e^t\,dt = xe^x - e^x - \cancel{e} + \cancel{e}$

$C_2 = -\int_1^x t^2 e^t\,dt = -t^2e^t\Big|_1^x + 2\int_1^x te^t\,dt = -x^2e^x + e + 2xe^x - 2e^x$

$y_p \overset{=y_{0p}}{=} C_1(x)x^{-1} + C_2(x)x^{-2} = \cancel{e^x} - \frac{e^x}{x} - \cancel{e^x} + 2\frac{e^x}{x} - 2\frac{e^x}{x^2} + \frac{e}{x^2} =$

$= \frac{e^x}{x} - 2\frac{e^x}{x^2} + \frac{e}{x^2}$

לפי הבנייה

$y_p(1) = y_p'(1) = 0$

פתרון כללי:

שאלה 2

$$y = \tilde{c}_1 x^{-1} + \tilde{c}_2 x^{-2} + \frac{e^x}{x} - 2\frac{e^x}{x^2} + \frac{e}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(1) = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 = 0 \\ y'(1) = -\tilde{c}_1 - 2\tilde{c}_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \tilde{c}_2 = -\tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_1 = 1 \Rightarrow \tilde{c}_2 = -1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{y = x^{-1} - x^{-2} + \frac{e^x}{x} - \frac{2}{x^2}e^x + \frac{e}{x^2}}$$

דרך אחרת:

$$x = e^t,\ t = \ln x$$

$$\cancel{\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y' e^t = y' x}$$

$$y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \dot{y}\frac{1}{x}$$

$$y'' = \left(\dot{y}\frac{1}{x}\right)' = \dot{y}'\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\dot{y} = \ddot{y}\cdot\frac{1}{x^2} - \dot{y}\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$\ddot{y} + (\cancel{4}-1)\dot{y} + 2y = e^t e^{(e^t)}$$

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = e^{(t+e^t)}$$

$$\dot{y}(0) = y'(1)\cdot 1 = 1$$

$$y(0) = y\big|_{x=1} = 0$$

$$y_h = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

$$y_0 = y(t),\ y_1 = \dot{y}(t)$$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = c_1(t)\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_2(t)\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} e^{-t}\dot{c}_1 + e^{-2t}\dot{c}_2 = 0 \\ -e^{-t}\dot{c}_1 + (-2e^{-2t})\dot{c}_2 = e^{(t+e^t)} \end{array}\right.$$

אפשר:

$\dot{c}_1 = \dots,\ c_1 = \int_0^t \dots d$

$\dot{c}_2 = \dots \quad c_2 = \int_0^t \dots d$

או אפשר לפתור בהצבות, x:

$$\dot{c}_1 = x\, c_1'(x)$$

$$\dot{c}_2 = x\, c_2'(x),\quad e^{t+e^t} = x e^x$$

3.

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 4y_2 - 8 \\ y_2' = 3y_1 + 6y_2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 12 - 12 = (\lambda - 8)\lambda$$

$\lambda = 8, 0$

$\lambda = 8 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-8 & 4 \\ 3 & 6-8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad 6y_1 = 4y_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\lambda = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}x + C_{21} \\ C_{12}x + C_{22} \end{pmatrix}$$

יש רזוננס ⇐ צריך לנחש

מציבים ומקבלים

$C_{21} = 1, \quad C_{22} = 0, \quad C_{12} = 3, \quad C_{11} = -6$

$$y = \tilde{C}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{8x} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6x + 1 \\ 3x \end{pmatrix}$$

4.ג

$$y'' + y = 4\sin x$$

$y_h = C_1\cos x + C_2 \sin x$, $\lambda = \pm i$ $(\lambda^2+1=0)$

$\Leftarrow$ כי רזוננס

$y_p = \alpha x\cos x + \beta x \sin x$

מציבים ומקבלים

$$y'' + y = 2\beta\cos x - 2\alpha\sin x \overset{\text{צ"ל}}{=} 4\sin x$$

$$\Rightarrow \beta = 0 \ , \ \alpha = -2$$

$$\boxed{y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x}$$

ג.ד

$$y''' + y' = x^2 \quad e^x\cos x + x\cdot\sin x$$

$\lambda^3 + \lambda = 0$ $x^2 \downarrow$ $\lambda = 0$ רזוננס $e^x\cos x \downarrow$ $\lambda = 1\pm i$ $x\sin x \downarrow$ $\lambda = \pm i$ רזוננס

$\lambda = \pm i, 0$

מחפשים ~~…~~ פתרון (גם) ג.ו. רזוננס

$$\boxed{\begin{aligned} y = {} & C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 e^x\cos x + C_5 e^x \sin x + \\ & + C_6 x^2\cos x + C_7 x^2 \sin x + C_8 x\cos x + C_9 x \sin x \end{aligned}}$$

תר. 5

$$y'' - x^2 y = \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + R(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots$$

לפי טיילור

נוסחת טיילור

$$R(x) = \frac{1}{4!} y^{IV}(\theta x)\, x^4, \quad 0 < \theta < 1$$

$\theta = \theta(x)$ - בעצם פונקציה לא ידועה

$$y(0) = c_0 \Rightarrow c_0 = 1$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \underbrace{\dots}_{5c_5 x^4 \dots} \qquad y'(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

$\cancel{2c_2 + 6c_3 x + \dots}$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12 c_4 x^2 + \underbrace{\dots}_{20 c_5 x^3 \dots}$$

$$2c_2 + 6c_3 x + 12 c_4 x^2 + \underbrace{\dots}_{20 c_5 x^3} - x^2(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

$x^0: \quad 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$x^1: \quad 6c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{6}$

$x^2: \quad 12 c_4 - c_0 = 0 \Rightarrow c_4 = \frac{1}{12} c_0 = \frac{1}{12}$

$x^3: \quad 20 c_5 - \underbrace{c_1}_{=0} = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6} \Rightarrow c_5 = -\frac{1}{120}$

לא היה צריך

...

$$y = 1 + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) = 1 + \frac{1}{6} x^3 + R(x)$$

$x=0 \Rightarrow y(0)=1,\ y'(0)=0 \Rightarrow (0,1,0)$

$\Omega = \{(x,y,y') \mid |x| \le 1,\ |y| \le 2,\ |y'| \le 1\}$ נגדיר

ונמצא $\varepsilon > 0$ כך ש-

$$\boxed{(x, y(x), y'(x)) \in \Omega \quad \Leftarrow |x| \le \varepsilon}$$

נדרוש ש- $\varepsilon \le 1$ (כי $|x| \le 1$)

$$y(x) = y(0) + \int_0^x y'(x)\,dx$$

$$\Rightarrow |y(x)| \le |y(0)| + \max_{\Omega} |y'| \cdot \varepsilon = 1 + \varepsilon$$

צריך $1+\varepsilon \le 2 \Leftarrow \varepsilon \le 1$ כאשר מתקיים

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x y''(x)\,dx$$

$$|y'(x)| \le |y'(0)| + \max_{\Omega} |y''| \cdot \varepsilon$$

$$\max_{\Omega} |y''| = \max_{\Omega} |\sin x + x^2 y| \le 1 + 2 = 3$$

$$\Rightarrow |y'(x)| \le 0 + 3\varepsilon, \quad 3\varepsilon \le 1 \Rightarrow \varepsilon \le \frac{1}{3}$$

$$\varepsilon = \min\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \frac{1}{3}$$

$\Omega_1 : \{|x| \le \frac{1}{3},\ |y| \le 2,\ |y'| \le 1\}, \quad \Omega_1 < \Omega$

$$y''' = x^2 y' + 2xy + \cos x = f(x,y,y')$$

$$|y'''(x)| \le \max_{\Omega} |f| \le \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \cdot 2 + 1 \le 3$$

$$y^{IV} = x^2 y'' + 2xy' + 2y - \sin x = f_1(x,y,y')$$

$$|y^{IV}(x)| \le \max_{\Omega_1} |f_1| \le \frac{1}{9} \cdot 3 + \frac{4}{3} \cdot 1 + 4 + 1 \le 7$$

$$|R(x)| \le \frac{\max_{|x| \le \frac{1}{3}} |y^{IV}(x)|}{24} x^4 \Rightarrow \boxed{|R(x)| \le \frac{7}{24} x^4}$$

כאשר $|x| < \frac{1}{3}$

5. המסקנה: סיכום ~~ש~~התשובה מלאה.

$$\boxed{\begin{gathered} \text{כאשר } |x| \le \tfrac{1}{2} \\ y = 1 + \tfrac{1}{6}x^3 + R(x) \\ |R(x)| \le \tfrac{7}{24}x^4 \end{gathered}}$$

א.6

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \lambda \in \mathbb{R} \\ y'(0) = y'(2) = 0 \end{cases}$$

a. $\lambda > 0$ $\quad y = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$

$y'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$y'(2) = 0 \Rightarrow C_2 \sin 2\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{\lambda} = k\pi \Rightarrow \lambda = \frac{k^2\pi^2}{4}$

$y_k = \cos\frac{k\pi}{2}x \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$

b. $\lambda = 0 \Rightarrow y'' = 0 \quad y = C_1 + C_2 x$

$y'(0) = y'(2) = C_2 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$

c. $\lambda < 0 \quad y = C_1 e^{-\mu x} + C_2 e^{\mu x} \qquad \mu = \sqrt{|\lambda|} \neq 0$

$y'(0) = -\mu C_1 + \mu C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 \neq 0$

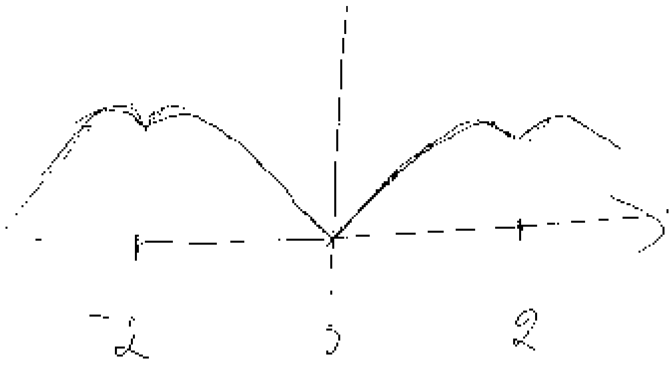
$y'(2) = -\mu C_1 e^{-2\mu} + \mu C_2 e^{2\mu} = 0 \Rightarrow \mu C_1 (e^{2\mu} - e^{-2\mu}) = 0$

$\Rightarrow e^{2\mu} = e^{-2\mu} \Rightarrow \mu = 0$

סתירה

א | ערכים עצמיים

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{4}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ &y_k = \cos\frac{k\pi}{2}x \qquad (y_0 = 1) \end{aligned}}$$



לכן ממשיכים את $y=\sin x$
לפונקציה זוגית

לכן אפשר לפתח
$y=\sin|x|$
לטור פוריה לפי $y_k=\cos\frac{k\pi}{2}x$ על $[-2,2]$
או (שקול לזה) על $[0,2]$

$$\sin x=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi}{2}x+a_2\cos\frac{2\pi}{2}x+\dots$$

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2\sin x\cdot 1\,dx=1-\cos 2$$

$k\geq 1$

$$a_k=\frac{2}{2}\int_0^2\sin x\cos\frac{k\pi}{2}x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(\sin\frac{k\pi+2}{2}x+\sin\frac{2-k\pi}{2}x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{-\cos\frac{2+k\pi}{2}x}{k\pi+2}+\frac{\cos\frac{k\pi-2}{2}x}{k\pi+2}\right)\Bigg|_0^2=$$

$\cos(2+k\pi)=(-1)^k\cos$
$\cos(k\pi-2)=(-1)^k\cos$

$$=\frac{4}{k^2\pi^2-4}\left((-1)^k\cos 2-1\right)$$