אוניברסיטת תל-אביב

הפקולטה להנדסה, תשפ"א, סמ' א', 4 ינואר 2020

מטלת סוף הסמסטר במשוואות דיפרנציאליות רגילות להנדסת חשמל ואלקטרוניקה, 0509174510

המורה: פרופ' א. לבנט

משך ביצוע העבודה: שבוע

כל שאלות 1-4 שוות ל-25 נקודות. שאלה 5 היא בונוס עד ל15 נקודות. אם לא נאמר אחרת צריך לחפש פתרונות ממשיים.

לא חייבים לפשט ביטוים בתשובות סופיות (למשל אפשר לא להכפיל מטריצות).

פתרונות

אני מראש מבקש לסלוח לי על השגיאות האריתמטיות שעלולות להופיע למטה. בהתאם לכך אני גם לא מוריד נקודות על שגיאות כאלה של הסטודנטים.

שאלה 1. . מצאו את הפתרון הכללי ופתרון לבעיית קושי כאשר תנאי התחלה נתונים:

$\ddot{y}-\frac{t+1}{t-1}\dot{y}+\frac{2}{t-1}y=1$, $t<1$, $y(0)=1,\ \dot{y}(0)=0,$ נתונים שני פתרונות פרטיים: $y=t, y=t+e^t$;

$t^2\ddot{y}-4t\dot{y}+6y=-t^4e^t$, $t>0$, $y(1)=0,\ \dot{y}(1)=1,$.

$\ddot{y}-\frac{t+1}{t-1}\dot{y}+\frac{2}{t-1}y=1$, $t<1$, $y(0)=1,\ \dot{y}(0)=0,$ נתונים שני פתרונות פרטיים: $y=t, y=t+e^t$

התוכנית של הפתרון היא למצוא את הפתרון הכללי כסכום של הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית y_h ואחד מפתרונות הפרטיים הנתונים.

ההפרש $t+e^t-t=e^t$ הוא בהכרח פתרון פרטי לבעיה ההומוגנית. כדי לחשב את הפתרון הכללי y_h צריך למצוא עוד פתרון פרטי נוסף בלתי תלוי לאותה משוואה הומוגנית. מחפשים אותו דרך הורדת סדר.

נשתמש בנוסחת Abel. נשים לב שהנוסחה דורשת שהמקדם של הנגזרת הגבוהה שווה 1, וזה מתקיים פה. לפי נוסחת אבל $\dot{w}=-(-\frac{t+1}{t-1})w$, כאשר w הוא ורונסקיאן של שני פתרונות כלשהן לבעיה ההומוגנית. נפריד משתנים $\frac{\dot{w}}{w}=\frac{t+1}{t-1}=1+\frac{2}{t-1}$ ונזכור ש- $w(t)=0$ פתרון. מ- $-\int(-\frac{t+1}{t-1})dt=\int(1+\frac{2}{t-1})dt=t+\ln|t-1|+\tilde{c}$ נקבל $w(t)=\hat{c}e^{t+2\ln(t-1)}=\hat{c}e^t(t-1)^2$, $\hat{c}=0,e^{\tilde{c}}$.

ניקח את e^t כהפתרון הראשון ו $y(t)$ כהפתרון השיני.

מכאן $\begin{vmatrix} e^t & y \\ e^t & \dot{y}\end{vmatrix}=\hat{c}e^t(t-1)^2$. ניקח $\hat{c}=1$ ונקבל $e^{2t}\left(\frac{y}{e^t}\right)^{\bullet}=\begin{vmatrix} e^t & y \\ e^t & \dot{y}\end{vmatrix}=e^t(t^2-2t+1)$ (שיטה סטנדרטית מהרצאות),

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{y}{e^t}\right)=\int e^{-t}(t^2-2t+1)dt=\int t^2e^{-t}dt-2\int te^{-t}dt+\int e^{-t}dt=\\
&-t^2e^{-t}+2\int te^{-t}dt-2\int te^{-t}dt-e^{-t}+\overline{c}=-t^2e^{-t}-e^{-t}+\overline{c};\\
&y=e^t(-t^2e^{-t}-e^{-t}+\overline{c})=-t^2-1+\overline{c}e^t,\ \overline{c}\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

מכוון ש- e^t הוא הפתרון הידוע לבעיה ההומוגנית, רק $y=t^2+1$ יכול לשמש את הפתרון הנוסף. הבדיקה מראה שהוא באמת מקיים את המשוואה ההומוגנית. מכאן מקבלים את הפתרון הכללי: $y=y_h+t=c_1(t^2+1)+c_2e^t+t,\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

$y(1)=0,\ \dot y(1)=1,\ t>0\ ,\ t^2\ddot y-4t\dot y+6y=-t^4e^t$

דרך החלפת הזמן $t=e^\tau$ או הצבת $y=t^\lambda$ במשוואה ההומוגנית נקבל את הפולינום האופייני $\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-3)(\lambda-2)$

מכאן הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית הוא $y_h=c_1t^3+c_2t^2$ ו $\dot{\vec y}_h=A(t)\vec y_h$ כאשר $\vec y_h(t)=\begin{pmatrix} y_h(t)\\ \dot y_h(t)\end{pmatrix}$,

$A(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -6t^{-2} & 4t^{-1}\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} y_h\\ \dot y_h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1t^3+c_2t^2\\ c_13t^2+c_22t\end{pmatrix}=\Phi(t)\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\Phi(t)c$, $\dot\Phi=A(t)\Phi(t)$. נשאר למצוא פתרון פרטי

$\vec y_p(t)=\begin{pmatrix} y_p(t)\\ \dot y_p(t)\end{pmatrix}$ כלשהו למשוואה הווקטורית $\dot{\vec y}=A(t)\vec y+\vec b(t)$, $\vec b(t)=\begin{pmatrix}0\\ -t^2e^t\end{pmatrix}$, השקולה למד"ר המקורית.

נשתמש בשיטת וריאציית המקדמים $\vec y_p(t)=\Phi(t)\tilde c(t)$, $\tilde c(t)=\begin{pmatrix}\tilde c_1(t)\\ \tilde c_2(t)\end{pmatrix}$. מכאן $\dot\Phi\tilde c+\Phi\dot{\tilde c}=A(t)\Phi\tilde c+\vec b(t)$

ו- $\Phi\dot{\tilde c}=\vec b(t)$, $\begin{pmatrix}t^3\dot{\tilde c}_1+t^2\dot{\tilde c}_2\\ 3t^2\dot{\tilde c}_1+2t\dot{\tilde c}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -t^2e^t\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}\dot{\tilde c}_1\\ \dot{\tilde c}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-e^t\\ te^t\end{pmatrix}$. לכן

$$\tilde c_2=\int_1^t se^sdt=se^s\Big|_1^t-e^s\Big|_1^t=te^t-e^t\ ,\tilde c_1=-\int_1^t e^tdt=-e^t+e$$

והפתרון הכללי הוא $y=y_h+y_p=c_1t^3+c_2t^2+(e-e^t)t^3+(te^t-e^t)t^2$.

נשים לב ש- $\vec y_p(1)=\Phi(1)\tilde c(1)=\Phi(1)\int_1^1\dot{\tilde c}(t)dt=0$ לכן מתנאי ההתחלה מקבלים $\vec y(1)=\Phi(1)c=\begin{pmatrix}c_1+c_2\\ 3c_1+2c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

מכאן $c_1=1,\ c_2=-1$ והפתרון לבעיית קושי הוא $y=t^3-t^2+(e-e^t)t^3+(te^t-e^t)t^2$.

שאלה 2.

א. מהו זוג הפונקציות הווקטוריות $\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sin t+2\\ -\cos t\end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sin t+1\\ \cos t\end{pmatrix}$ אשר יכול לשמש זוג פתרונות למשוואה דיפרנציאלית $y\in\mathbb{R}^2$, $\dot y=A(t)y$ עם $A(t)$ ממשית רציפה בכל $t\in\mathbb{R}$? יש לנמק ולמצוא את המטריצה $A(t)$.

ב. מהו זוג הפונקציות e^t,te^{-t} או $e^t,(t^2+t+1)e^{-t}$ אשר יכול לשמש זוג פתרונות למשוואה דיפרנציאלית $y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)y=0$ עם $a_1(t),\ldots,a_n(t)$ ממשיים ורציפים בכל $t\in\mathbb{R}$ ל $n=2$? מהו n הקטן ביותר שבשבילו זה אפשרי? יש לנמק ולתת דוגמא במקרים של תשובה חיובית.

א. זה ידוע שהוורונסקיאן $W(t)$ של כל שני פתרונות למד"ר $\dot y=A(t)y$, $y\in\mathbb{R}^2$, עם $A(t)$ רציפה שווה לאפס זהותי או אף פעם לא מתאפס.

נחשב $W=|\Phi(t)|=\begin{vmatrix}\sin t+2 & \cos t\\ -\cos t & \sin t-2\end{vmatrix}=\sin^2 t-4+\cos^2 t=-3$ אשר איננו סותר את התכונה. אם אכן $\dot y=A(t)y$,

אז $\dot\Phi=A(t)\Phi(t)$. מכאן $A(t)=\dot\Phi(t)\Phi^{-1}(t)=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin t-2 & -\cos t\\ \cos t & \sin t+2\end{pmatrix}$.

במקרה של הזוג השני מקבלים $W(t)=\begin{vmatrix}\sin t+1 & \cos t\\ \cos t & \sin t-1\end{vmatrix}=\sin^2 t-1-\cos^2 t=-(\cos(2t)+1)$. לכן הוורונסקיאן מתאפס בנקודות בדדות והמטריצה $A(t)$ ממשית רציפה מתאימה ואיננה ק"מת, למשל, בסביבת $t=\frac{\pi}{2}$.

ב. בדומה לסעיף הקודם, נחשב את הוורונסקיאן $W(t)=\begin{vmatrix}e^t & te^{-t}\\ e^t & e^{-t}-te^{-t}\end{vmatrix}=1-2t$ של הזוג הראשון של פונקציות. ברור שהוא אינו אפס זהותי אבל מתאפס ב-$t=\frac{1}{2}$. לכן הם לא יכולים לשמש זוג פתרונות מד"ר ליניארי הומוגני מסדר 2 בסביבת נקודה $t=\frac{1}{2}$. לעומת זאת שתי הפונקציות האלה מקיימות מד"ר $p(\frac{d}{dt})y=0$, $\mathrm{p}(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$, מהסדר $n=3$.

במקרה של הזוג השיני מקבלים

$W(t)=\begin{vmatrix}e^t & (t^2+t+1)e^{-t}\\ e^t & (2t+1-(t^2+t+1))e^{-t}\end{vmatrix}=2t+1-(t^2+t+1)-(t^2+t+1)=-2t^2-1$. הפעם הוורונסקיאן לא מתאפס וקיימת המד"ר הליניארית ההומוגנית המתאימה מסדר 2. ובכן הפונקציות האלה אמורות להיות פתרונות יסודיים וכל פתרון $y(t)$ אחר הוא צירוף לינארי של שתי הפונקציות האלה. בהתאם הוורונסקיאן של **שלוש** הפונקציות האלה הוא אפס זהותי אשר מהוה מד"ר

$$\begin{vmatrix}y & e^t & (t^2+t+1)e^{-t}\\ \dot y & e^t & (-t^2+t)e^{-t}\\ \ddot y & e^t & (t^2-3t+1)e^{-t}\end{vmatrix}=-(2t^2+1)\ddot y-\begin{vmatrix}1 & t^2+t+1\\ 1 & t^2-3t+1\end{vmatrix}\dot y+\begin{vmatrix}1 & -t^2+t\\ 1 & t^2-3t+1\end{vmatrix}y=0.$$

מכוון ש- $W(t)=-(2t^2+1)\neq 0$ אחרי חילוק ב- $-(2t^2+1)$ מקבלים את המשוואה הנדרשת מסדר 2.

שאלה 3.

א. מצאו את הפתרון הכללי למשוואה $(t+1)^2\ddot{y}-(t+1)\dot{y}+y=t$ דרך החלפת הזמן המתאימה. כמו כן, ציינו את הפתרונות המקיימים את המשוואה לכל $t\in\mathbb{R}$. האם יש פתרונות יציבים עם תנאי התחלה ב-$t=1$?

ב. מצאו את הפתרונות הכלליים לבעיות ההומוגניות המתאימות למשוואות

$$t^2\ddot{y}+3t\dot{y}+2y=t-1+t\ln^2 t-t^{-1}\ln^3 t\cos(\ln t)+\sin(2\ln t);$$

$$t^2\ddot{y}-3t\dot{y}-5y=t^5\ln^2 t-1+t^{-1}\ln t-t^{-1}\cos(\ln t).$$

מהם הפתרונות המקיימים את המשוואות ההומוגניות לכל $t\in\mathbb{R}$? באיזו צורה מחפשים פתרון פרטי למשוואות עצמן?

רמז: יש להחליף את הזמן בצורה מתאימה.

א.

$$(t+1)^2\ddot{y}-(t+1)\dot{y}+y=t$$

קודם נתרכז במשוואה ההומוגנית

$$(t+1)^2\ddot{y}-(t+1)\dot{y}+y=0. \qquad (1)$$

נחליף את הזמן ל- $t+1=e^\tau$, $t>-1$, ונקבל $y''-2y'+y=0$. מכאן הפולינום האופייני הוא $p(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1$ והפתרון הכללי לבעיה ההומוגנית הוא $y_h=c_1e^\tau+c_2\tau e^\tau$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

הערה: החישוב של תוצאת ההחלפה למשוואת אוילר התבצע בהרצאה. לא צריך לחזור עליו.

לפי התאוריה אחרי ההחלפה $\tau=\ln|t+1|$ הנכונה לכל $t\neq -1$ נקבל את הפתרון הכללי לבעיה ההומוגנית

$$y_h=\begin{cases} c_1(t+1)+c_2(t+1)\ln(t+1), & t>-1\\ \tilde{c}_1|t+1|+\tilde{c}_2|t+1|\ln|t+1|, & t<-1\end{cases},\quad c_1,c_2,\tilde{c}_1,\tilde{c}_2\in\mathbb{R}.$$

מכוון ש- $\frac{d^2}{dt^2}[(t+1)\ln(t+1)]$ איננו חסום כאשר $t\to+0$ הפתרונות המקיימים את (1) בכל t הם מהצורה $y_h=c(t+1)$, $c\in\mathbb{R}$, בלבד.

נחזור למד"ר המקורי. נחליף את הזמן ל- $t+1=e^\tau$ עבור $t>-1$ ונקבל $y''-2y'+y=e^\tau-1$, $\tau>0$. יש פה רזוננס וצריך לחפש פתרון פרטי בצורה $y_{p2}=-1$, $y_{p1}=d\tau^2e^\tau$, $y_p=y_{p1}+y_{p2}$, $y''_{p1}=d(\tau^2+4\tau+2)e^\tau$, $y'_{p1}=d(\tau^2+2\tau)e^\tau$.

מציבים ומקבלים $d[\tau^2+4\tau+2-2(\tau^2+2\tau)+\tau^2]=1$ ו $d=\frac{1}{2}$.

עבור $t<-1$ נחליף $\tau=\ln|t+1|$. לפי התאוריה הצד השמאלי לא משתנה, אבל $t=t+1-1=-|t+1|-1$ והמד"ר המתקבלת היא $y''-2y'+y=-e^\tau-1$. שוב מחפשים פתרון פרטי בצורה $y_{p2}=-1$, $y_{p1}=\tilde{d}\tau^2e^\tau$, $y_p=y_{p1}+y_{p2}$. מליניאריות נקבל $\tilde{d}=-\frac{1}{2}$. ולבסוף מהנוסחה $y=y_h+y_p$ נקבל את הפתרון הכללי לבעיה המקורית

$$y=\begin{cases} c_1(t+1)+c_2(t+1)\ln(t+1)+\frac{1}{2}(t+1)\ln^2(t+1)-1, & t>-1\\ \tilde{c}_1|t+1|+\tilde{c}_2|t+1|\ln|t+1|-\frac{1}{2}|t+1|\ln^2|t+1|-1, & t<-1\end{cases},\quad c_1,c_2,\tilde{c}_1,\tilde{c}_2\in\mathbb{R},$$

ואין פה פתרונות מקיימים את המד"ר גם ב-$t=0$.

גם אין פה פתרונות יציבים עם תנאי ההתחלה ב- $t=1$ כי הפרש של כל שני פתרונות Δy מקיים מד"ר (1). למשל אפשר לקחת $\Delta y = c(t+1)$. כאשר $c \neq 0$ וקטן גם הפרש תנאי התחלה $\Delta \dot{y}(1) = c, \Delta y(1) = 2c$ הוא קטן, אבל Δy אף פעם לא חסום.

ב.

$$t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} + 2y = t - 1 + t\ln^2 t - t^{-1}\ln^3 t\cos(\ln t) + \sin(2\ln t)$$

נשים לב שהמשוואה מוגדרת רק ל- $t>0$ ואין לנו שום דרך סביר להגדיר את הצד הימין ל- $t \le 0$.

נבצע את ההחלפה $t = e^{\tau}$, $\tau = \ln t$ עבור $t>0$, ונקבל $y'' + 2y' + 2y = e^{\tau} - 1 + e^{\tau}\tau^2 - e^{-\tau}\tau^3\cos\tau + \sin(2\tau)$. הפולינום האופייני הוא $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$ עם השורשים $-1 \pm i$ והפתרון הכללי לבעיה ההומוגנית הוא

$$y_h = c_1 e^{-\tau}\cos\tau + c_2 e^{-\tau}\sin\tau,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

לכן הפתרון הכללי לבעיה ההומוגנית (בכל $t \neq 0$) הוא

$$y_h = \begin{cases} c_1 t^{-1}\cos\ln t + c_2 t^{-1}\sin\ln t, & t>0 \\ \tilde{c}_1 t^{-1}\cos\ln|t| + \tilde{c}_2 t^{-1}\sin\ln|t|, & t<0 \end{cases},\qquad c_1, c_2, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}.$$

אין פה פתרונות רציפים ב- $t=0$ חוץ מ- $y_h(t) \equiv 0$. הפתרון הפרטי מחפשים רק ל- $t>0$ בצורה

$$\begin{aligned} y_p &= d_1 e^{\tau} + d_2 + e^{\tau}(d_3\tau^2 + d_4\tau + d_5) + d_6\sin(2\tau) + d_7\cos(2\tau) \\ &+ \tau e^{-\tau}[(d_8\tau^3 + d_9\tau^2 + d_{10}\tau + d_{11})\cos\tau + (d_{12}\tau^3 + d_{13}\tau^2 + d_{14}\tau + d_{15})\sin\tau],\ d_j \in \mathbb{R}, j = 1,2,\dots,15 \end{aligned}$$

אשר בזמן המקורי נותן

$$\begin{aligned} y_p &= d_1 t + d_2 + t(d_3\ln^2 t + d_4\ln t + d_5) + d_6\sin(2\ln t) + d_7\cos(2\ln t) \\ &+ t^{-1}\ln t[(d_8\ln^3 t + d_9\ln^2 t + d_{10}\ln t + d_{11})\cos\ln t + (d_{12}\ln^3 t + d_{13}\ln^2 t + d_{14}\ln t + d_{15})\sin\ln t], \\ &d_j \in \mathbb{R}, j = 1,2,\dots,15 \end{aligned}$$

¶ $$t^2\ddot{y} - 3t\dot{y} - 5y = t^5\ln^2 t - 1 + t^{-1}\ln t - t^{-1}\cos(\ln t)$$

גם פה הצד הימין מוגדר רק ל- $t>0$.

נבצע את ההחלפה $t = e^{\tau}$, $\tau = \ln t$ עבור $t>0$. נקבל $y'' - 4y' - 5y = \tau^2 e^{5\tau} - 1 + \tau e^{-\tau} - e^{-\tau}\cos\tau$. הפולינום האופייני הוא $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$ עם השורשים $5, -1$ והפתרון הכללי לבעיה ההומוגנית הוא $y_h = c_1 e^{-\tau} + c_2 e^{5\tau}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

לכן הפתרון הכללי לבעיה ההומוגנית לכל $t \neq 0$ הוא $y_h = \begin{cases} c_1 t^{-1} + c_2 t^5, & t>0 \\ \tilde{c}_1 t^{-1} + \tilde{c}_2 t^5, & t<0 \end{cases}$, $c_1, c_2, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}$.

והפתרונות המקיימים את המשוואה ההומוגנית לכל t הם מהצורה $y_h(t) = ct^5$, והפתרון הפרטי מחפשים רק ל $t>0$ בצורה

$$y_p = \tau e^{5\tau}(d_1\tau^2 + d_2\tau + d_3) + d_4 + \tau e^{-\tau}(d_5\tau + d_6) + d_7 e^{-\tau}\cos\tau + d_8 e^{-\tau}\sin\tau,\ d_j \in \mathbb{R}, j = 1,2,\dots,8.$$

אשר בזמן המקורי נותן

$$y_p = t^5\ln t(d_1\ln^2 t + d_2\ln t + d_3) + d_4 + t^{-1}\ln t(d_5\ln t + d_6) + t^{-1}d_7\cos\ln t + t^{-1}d_8\ln\tau,\ d_j \in \mathbb{R}, j = 1,2,\dots,8.$$

דוגמא (לא קשורה למטלה):

למשוואת אוילר $t^2\ddot{y}-6t\dot{y}+12y=0$ הפולינום האופייני הוא $p(\lambda)=\lambda^2-7\lambda+12=(\lambda-3)(\lambda-4)$. לכן הפתרונות הם

$$y=\begin{cases} c_1t^3+c_2t^4, & t\ge 0 \\ \tilde{c}_1t^3+\tilde{c}_2t^4, & t<0 \end{cases}\qquad, \ c_1,c_2,\tilde{c}_1,\tilde{c}_2\in\mathbb{R}.$$

הם כולם מקיימים את המשוואה לכל $t\in\mathbb{R}$**, וגם תמיד** $y(0)=\dot{y}(0)=\ddot{y}(0)=0$ **.** "התפירה" פה תמיד מוצלחת. כמובן משפט הקיום והיחידות לא מתקיים ב- $t=0$.

שאלה 4.

א. בדקו את יציבות (יציב, יציב אסימפטוטית, לא יציב) של פתרונות המשוואות. יש להסתפק בבדיקת הפתרון לבעיית קושי אם נתונים תנאיי התחלה. יש לנמק בכמה מילים.

$$y^{(5)}+\dddot{y}-2\ddot{y}+\dot{y}+y=e^t;\quad y^{(11)}-|\cos t|\,y^{(10)}+3t^3y\arctan t=1;\quad \ddot{y}+\pi^2\dot{y}+y=0;$$

$$\dot{y}=-|y|\,y,\ y(0)=0;\quad \dot{y}=\sin y,\ y(0)=0;\quad \dot{y}=\cos y,\ y(0)=\tfrac{\pi}{2};\quad y^{(5)}=1.$$

ב. לבדוק את היציבות של הפתרון $y(t)=0\in\mathbb{R}^2$ למערכות

$$\begin{cases}\dot{y}_1=\sin(y_1^2+y_2)\\ \dot{y}_2=-\sin(2y_1+y_2)+\cos(y_1y_2)-1\end{cases},\qquad \begin{cases}\dot{y}_1=\sin(2y_1+y_2)\\ \dot{y}_2=\sin(3y_1-y_2)\end{cases}.$$

א.

לכל הפתרונות של מד"ר ליניארית יש תמיד אותו סוג של יציבות כמו גם לכל פתרונות של המד"ר ההומוגנית המתאימה לצד שמאל.

$$y^{(5)}+\dddot{y}-2\ddot{y}+\dot{y}+y=e^t$$

פה הפולינום האופייני של המד"ר ההומוגנית הוא $p(\lambda)=\lambda^5+\lambda^3-2\lambda^2+\lambda+1$. יש לו מקדם שלילי ולכן אין יציבות.

$$y^{(11)}-|\cos t|\,y^{(10)}+3t^3y\arctan t=1$$

נבדוק את היציבות של פתרונות למד"ר ההומוגנית. מנוסחת Abel נקבל $\dot{W}=|\cos t|\,W$, $W(t)=W(0)e^{\int_0^t|\cos t|dt}$. לכן כל ורונסקיאן לא אפסי תמיד שואף לאין-סוף. זאת אומרת שלפחות עמודה אחת שלו לא חסומה. לכן $y_h(t)=0$ לא יציב. מכאן כל פתרונות של המד"ר ההומוגנית אינם יציבים ואין פתרונות יציבים גם למד"ר המקורית.

$$\ddot{y}+\pi^2\dot{y}+y=0$$

כל המקדמים של הפולינום האופייני מסדר 2 הם חיוביים. לכן הוא יציב וכל הפתרונות של המד"ר יציבים אסימפטוטית.

$$\dot{y}=-|y|\,y,\ y(0)=0$$

הדיוקן הפזי (ציור כווים פזיים במרחב המצב) הוא $\to\underset{0}{\bullet}\leftarrow$. לכן יש פה יציבות אסימפטוטית של נקודת האיזון $y=0$.

$$\dot{y}=\sin y,\ y(0)=0$$

הדיוקן הפזי הוא $\leftarrow\underset{0}{\bullet}\to$. לכן אין פה יציבות של נקודת האיזון $y=0$.

$$\dot{y}=\cos y,\ y(0)=\tfrac{\pi}{2}$$

הדיוקן הפזי הוא $\to\underset{\pi/2}{\bullet}\leftarrow$. לכן יש פה יציבות אסימפטוטית של נקודת האיזון $y=\frac{\pi}{2}$.

$$y^{(5)}=1$$

הפולינום האופייני של המד"ר ההומוגני הוא $p(\lambda)=\lambda^5$. יש לשורש 0 ריבוי 5. לכן בין הפתרונות המד"ר ההומוגנית יש הפתרון $y_h=ct^4$ לכל c קטן. לכן יש פתרונות שמתחילים קרוב ככול שתרצו ל-0 ועדין בורחים לאין-סוף. לכן הפתרון $y_h=0$ איננו יציב, ואין פתרונות יציבים לא למד"ר ההומוגנית ולא למד"ר המקורית.

ב. נניח נתונה המשוואה $\dot{y} = f(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$, עם f גזירה ברציפה. גם נניח ש- ξ היא נקודת איזון, $f(\xi) = 0$, ו- $A = \frac{\partial f}{\partial y}(\xi)$. אם לכל הערכים העצמיים של A חלקם הממשיים שליליים, אז הנקודה הקריטית ξ (פתרון קבוע $y(t) = \xi$) היא יציבה אסימפטוטית. אם ישנו ערך עצמי עם חלק ממשי חיובי, הנקודה הקריטית ξ לא יציבה בכלל.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \sin(y_1^2 + y_2) \\ \dot{y}_2 = -\sin(2y_1 + y_2) + \cos(y_1 y_2) - 1 \end{cases}$$

נחשב $\frac{\partial f}{\partial y}(y) = \begin{pmatrix} 2\cos(y_1^2 + y_2)y_1 & \cos(y_1^2 + y_2) \\ -2\cos(2y_1 + y_2) - y_2\sin(y_1 y_2) & -\cos(2y_1 + y_2) - y_1\sin(y_1 y_2) \end{pmatrix}$, $A = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

הפולינום האופייני של A הוא $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 2$. לכן יש פה יציבות אסימפטוטית כי פולינום ממשי מסדר 2 $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ יציב עם ורק עם $a_1, a_2 > 0$.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \sin(2y_1 + y_2) \\ \dot{y}_2 = \sin(3y_1 - y_2) \end{cases}$$

נחשב $\frac{\partial f}{\partial y}(y) = \begin{pmatrix} 2\cos(2y_1 + y_2) & \cos(2y_1 + y_2) \\ 3\cos(3y_1 - y_2) & -\cos(3y_1 - y_2) \end{pmatrix}$, $A = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

הפולינום האופייני של A הוא $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 5$. לכן אין פה יציבות בכלל כי יש מקדם שלילי לפולינום.

שאלה 5.

א. מהם המקדמים $c_0,c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$ של פיתוח טיילור $y=c_0+c_1t+c_2t^2+c_3t^3+c_4t^4+o(t^4)$ בסביבת $t=0$ לפתרון בעיית קושי $y(0)=1,\dot{y}(0)=0$ $\quad \ddot{y}-t\dot{y}\cos t+y=\sin t,$.

ב. מצאו את הערכים העצמיים (אפשר בצורה גרפית) ואת הפונקציות העצמיות של בעיית Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u''+u+\lambda u=0 \\ u(0)=0,\ u(\pi/2)+u'(\pi/2)=0 \end{cases}.$$

ג. יש לפתח את הפונקציה $f(x)=1$ לטור פוריה לפי הפונקציות העצמיות של בעיית Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u''+4u+4\lambda u=0 \\ u(0)=0, u'(\pi/2)=0 \end{cases}.$$

א.

מתנאי ההתחלה מקבלם $c_0=1,c_1=0$. נציב את כל טורי החזקות

$$2c_2+6c_3t+12c_4t^2+\ldots-(c_1t+2c_2t^2+3c_3t^3+\ldots)(1-\tfrac{1}{2}t^2+\tfrac{1}{24}t^4+\ldots)+c_0+c_1t+c_2t^2+c_3t^3+\ldots=t-\tfrac{1}{6}t^3+\ldots$$

נשווה מקדמים לפי חזקות t:

$$\begin{array}{l|l} t^0 & 2c_2+c_0=0\Rightarrow c_2=-\frac{1}{2}c_0=-\frac{1}{2} \\ t^1 & 6c_3-c_1+c_1=1\Rightarrow c_3=-\frac{1}{6} \\ t^2 & 12c_4+2c_2+c_2=0\Rightarrow c_4=-\frac{1}{4}c_2=\frac{1}{8} \end{array}.$$

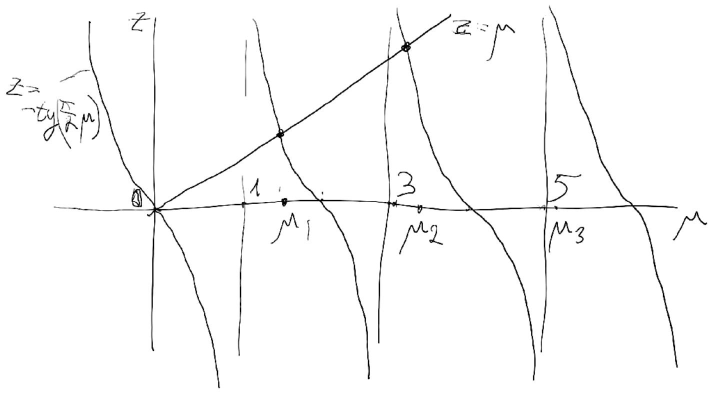
מכאן $y=1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{8}t^4+o(t^4)$

ב. $\begin{cases} u''+u+\lambda u=0 \\ u(0)=0,\ u(\pi/2)+u'(\pi/2)=0 \end{cases}$

ערכים עצמיים λ של בעיית Sturm-Liouville הם מספרים ממשיים. נלך לפי הסימן של $\lambda+1$.

1. $\lambda+1>0$. נסמן $\mu=\sqrt{\lambda+1}>0$. אז הפתרון הכללי של המשוואה הוא $u=c_1\cos(\mu x)+c_2\sin(\mu x)$. מתנאי השפה השמאלי נקבל $c_1=0$, $u=c_2\sin(\mu x),\ c_2\neq 0$, ומהימין נקבל $\sin(\frac{\pi}{2}\mu)+\mu\cos(\frac{\pi}{2}\mu)=0$. מכאן $\mu=-\tan(\frac{\pi}{2}\mu)$.

מן הגרף נמצא $\mu_1<\mu_2<\mu_3<\ldots$,
$\lambda_k=\mu_k^2-1,\ u_k=\sin(\mu_k x)$.



שימו לב שהערך $\mu = 0$ נמצא בחיתוך הגרפים, אבל לא מגדיר ערך עצמי כי המקרה שלנו הוא $\mu = \sqrt{\lambda+1} > 0$.

2. $\lambda + 1 = 0$. אז הפתרון הכללי של המשוואה הוא $u = c_1 x + c_2$. מתנאי השפה השמאלי נקבל $c_2 = 0$, $u = c_1 t$, ומהימין נקבל $c_1(1+\frac{\pi}{2}) = 0$, $c_1 = 0$. אין פה פונקציות עצמיות.

3. $\lambda + 1 < 0$. נסמן $\mu = \sqrt{|\lambda+1|} > 0$. אז הפתרון הכללי של המשוואה הוא $u = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}$. מתנאי השפה מקבלים $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ (1+\mu)e^{\mu\frac{\pi}{2}} c_1 + (1-\mu)e^{-\mu\frac{\pi}{2}} c_2 = 0 \end{cases}$. הדטרמיננטה של המערכת היא

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (1+\mu)e^{\mu\frac{\pi}{2}} & (1-\mu)e^{-\mu\frac{\pi}{2}} \end{vmatrix} = (1-\mu)e^{-\mu\frac{\pi}{2}} - (1+\mu)e^{\mu\frac{\pi}{2}} < 0 .$$

לכן $c_1, c_2 = 0$ ואין פה פונקציות עצמיות.

תשובה: $\lambda_k = \mu_k^2 - 1,\ u_k = \sin(\mu_k x)$, כאשר $0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots$ מוגדרים מן הגרף.

ג. יש לפתח את הפונקציה $f(x) = 1$ לטור Fourier לפי הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם-ליאוביל $\begin{cases} u'' + 4u + 4\lambda u = 0 \\ u(0) = 0, u'(\pi/2) = 0 \end{cases}$.

ערכים עצמיים λ של בעיית שטורם-ליאוויל הם מספרים ממשיים. שוב נלך לפי הסימן של $\lambda + 1$.

1. $\lambda + 1 > 0$. נסמן $\mu = 2\sqrt{\lambda+1} > 0$. אז הפתרון הכללי של המשוואה הוא $u = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$. מתנאי השפה השמאלי שוב נקבל $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$, $u = c_2 \sin(\mu x)$, ומהימין נקבל $\cos(\frac{\pi}{2}\mu) = 0$. מכאן $\mu_n = 2n+1$, $n = 0,1,2,\dots$,

$$\lambda_n = (n+\tfrac{1}{2})^2 - 1 \ ,u_n = \sin((2n+1)x)\, , n = 0,1,2,\dots$$

2. $\lambda + 1 = 0$. אז הפתרון הכללי של המשוואה הוא $u = c_1 x + c_2$. מתנאי השפה הימיני נקבל $c_1 = 0$, $u = c_2$, ומהשמאלי נקבל $c_2 = 0$. אין פה פונקציות עצמיות.

3. $\lambda + 1 < 0$. נסמן $\mu = 2\sqrt{|\lambda+1|} > 0$. אז הפתרון הכללי של המשוואה הוא $u = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}$. מתנאי השפה מקבלים $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \mu e^{\mu\frac{\pi}{2}} c_1 - \mu e^{-\mu\frac{\pi}{2}} c_2 = 0 \end{cases}$. הדטרמיננטה של המערכת $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu\frac{\pi}{2}} & -e^{-\mu\frac{\pi}{2}} \end{vmatrix} = -e^{-\mu\frac{\pi}{2}} - e^{\mu\frac{\pi}{2}} < 0$, לכן $c_1, c_2 = 0$ ואין פה פונקציות עצמיות.

נפתח את הפונקציה $f(x) = 1$ לטור פוריה לפי הפונקציות העצמיות $u_n = \sin((2n+1)x)$, $n = 0,1,2,\dots$.

לפי הנוסחה $a_n=\frac{\int_0^{\pi/2} f(x)\sin((2n+1)x)dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^2((2n+1)x)dx}$, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin((2n+1)x)$, ולכן

$\int_0^{\pi/2} \sin^2((2n+1)x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}[1-\cos((4n+2)x)]dx=\frac{\pi}{4}$, $a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\sin((2n+1)x)dx$.

מחשבים $a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} 1\cdot\sin((2n+1)x)dx=-\frac{4}{\pi(2n+1)}\cos((2n+1)x)\Big|_0^{\pi/2}=-\frac{4}{\pi(2n+1)}[\cos(n\pi+\frac{\pi}{2})-1]=\frac{4}{\pi(2n+1)}$.

והתשובה $1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)}\sin((2n+1)x)$. השוויון מתקיים בכל $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ (התכנסות נקודתית).

דוגמא (לא קשורה למטלה):

זה יכול לקרות שלבעיות Sturm-Liouville יש ערך עצמי שלילי או אפסי:

לבעיות Sturm-Liouville $\begin{cases} u''+\lambda u=0 \\ u'(0)=0, \\ u'(1)=0 \end{cases}$, $\begin{cases} u''+\lambda u=0 \\ u'(0)-u(0)=0, \\ u'(1)-\frac{1}{2}u(0)=0 \end{cases}$ יש ערך עצמי $\lambda=0$ ופונקציה עצמית $u=1$.

לבעיית Sturm-Liouville $\begin{cases} u''+\lambda u=0 \\ u'(0)=0, \\ u'(1)-\frac{\sinh 1}{\cosh 1}u(1)=0 \end{cases}$ יש ערך עצמי $\lambda=-1$ ופונקציה עצמית $u=\cosh x$.
