אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה להנדסה, תשפ"א, סמ' א', 11 דצמבר 2020
מטלת אמצע סמסטר במשוואות דיפרנציאליות רגילות להנדסת חשמל ואלקטרוניקה, 0509174510
המורה: פרופ' א. לבנט

משך ביצוע העבודה: שבועיים.
כל שאלה שווה ל-20 נקודות. אם לא נאמר אחרת צריך לחפש פתרונות ממשיים.
לא חייבים לפשט ביטוים בתשובות סופיות (למשל אפשר לא להכפיל מטריצות).

פתרונות

אני מראש מבקש לסלוח לי על השגיאות האריתמטיות שעלולות להופיע למטה. בהתאם לכך אני גם לא מוריד נקודות על שגיאות כאלה של הסטודנטים.

שאלה 1. למצוא את הפתרון הכללי ופתרון לבעיית קושי (אפשר כפונקציה סתומה) כאשר תנאי התחלה נתונים:

$2\sin(x^2+y^2)(x+yy')+\cos(x^2+y^2)=x$, $y(0)=1$; $(x\cos^2(y/x)-y)dx+xdy=0$;

$y'=(x^4+y^4)/(xy^3)$, $y(1)=1$, $x>0$; $\left(\frac{y}{1+x^2y^2}+x+\sin y\right)dx+\left(\frac{x}{1+x^2y^2}+y+x\cos y\right)dy=0$;

$y'-y+\frac{1}{3}e^xy^4=0$; $y'-x^2y=x^2/y^2$; $\dot y+\tan(t)y=\sin t$, $y(0)=1$.

$2\sin(x^2+y^2)(x+yy')+\cos(x^2+y^2)=x$, $y(0)=1$;

נרשום את המשוואה בצורה $\frac{d}{dx}\cos(x^2+y^2)+\cos(x^2+y^2)=x$ ונגדיר משתנה חדש $u=\cos(x^2+y^2)$

מכאן $u'+u=x$. אפשר להשתמש בשיטת המקדמים הלא ידועים. בדרך וריאציית המקדמים מקבלים $u_p=\tilde{c}(x)e^{-x}$, $u=ce^{-x}+u_p(x)$. לכן $\tilde{c}'e^{-x}-\tilde{c}e^{-x}+\tilde{c}e^{-x}=x$. מכאן $\tilde{c}'=xe^x$, $\tilde{c}=xe^x-\int_0^x e^x dx=xe^x-e^x$, ו- $u=ce^{-x}+x-1$

עם תנאי התחלה החדש $u(0)=\cos(0^2+1^2)=\cos(1)$. מכאן $c=\cos(1)+1$.

לכן הפתרון הכללי הוא הפונקציה $y(x)$ המוגדרת על-ידי המשוואה $\cos(x^2+y^2)=ce^{-x}+x-1,\ c\in\mathbb{R}$. הפתרון לבעיית קושי מקיים את המשוואה $\cos(x^2+y^2)=(\cos(1)+1)e^{-x}+x-1$.

$(x\cos^2(y/x)-y)dx+xdy=0$

נשים לב ש- $x(y)=0$ הוא אחד מהפתרונות, כי אז $dx=x'_ydy=0,x=0$. נחלק את המשוואה ב- x^2 ונקבל את המשוואה $\frac{1}{x}\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)dx+d\frac{y}{x}=0$. נסמן $u=y/x$ ונפריד את המשתנים: $\frac{dx}{x}=-\frac{du}{\cos^2 u}$. מכאן $\ln|x|=-\tan u+\tilde{c}$, והפתרון הכללי הוא $x=c\exp(-\tan(y/x))$, $c\in\mathbb{R},c\neq 0$, כאשר $c=\pm\exp(\tilde{c})$, וגם $x=x(y)=0$ שמצאנו בהתחלה.

הערה: המשוואה $\frac{dx}{x}=-\frac{du}{\cos^2 u}$ כרגיל הכילה את שני המקרים: $u=u(x),\ du=u'_x dx$ ו $x=x(u),\ dx=x'_u du$. בהתאם לכך אנו לוקחים משני הצדדים אינטגרל לפי dx במקרה הראשון או לפי du במקרה השני. בהמשך מבצעים את ההחלפה $du=u'_x dx$ או $dx=x'_u du$ באחד מהאינטגרלים. זה ההסבר המדויק לאינטגרציית שני הצדדים.

$y'=(x^4+y^4)/(xy^3)$, $y(1)=1$, $x>0$

זאת משוואה הומוגנית: $y'=(1+(y/x)^4)/(y/x)^3$. נסמן $u=y/x,\ y'=(xu)'=u+xu'$ ונקבל $xu'=(1+u^4)u^{-3}-u=u^{-3}$. ברור נדרש $u(x)\neq 0, x\neq 0$.

מפרידים משתנים: $u^3u'=x^{-1}$. לוקחים אינטגרל לפי x משני הצדדים: $\int u^3u'dx=\int x^{-1}dx$. אחרי ההחלפה $u'dx=du$ נקבל $\frac{1}{4}u^4=\ln|x|+\tilde{c}=\ln x+\tilde{c}$. נשים לב שהפתרון **לא קיים** לערכי x המקיימים $\ln x+\tilde{c}\le 0$. לכן נדרש ש- $x>e^{-\tilde{c}}$.

נסמן $c=e^{-\tilde{c}}$ אשר נותן את הפתרון הכללי $c\cdot\exp(\frac{1}{4}(y/x)^4)=x,\ x>c>0$. לא נדרש לבטא מכאן את $y(x)$.

גם $\frac{1}{4}(y/x)^4=\ln x+\tilde{c}$, $\tilde{c}\in\mathbb{R}$, $x>e^{-\tilde{c}}$, היא צורה חוקית לפתרון הכללי.

נקיים תנאי התחלה ב- $x=1$: $ce^{\frac{1}{4}}=1,\ c=e^{-\frac{1}{4}}$. לכן הפתרון לבעיית קושי מוגדר על-ידי המשוואה $e^{-\frac{1}{4}}\exp(\frac{1}{4}(y/x)^4)=x$, ל- $x>e^{-\frac{1}{4}}$. אפשר לבטא מכאן את $y(x)$ אבל זה לא נדרש.

$$\left(\frac{y}{1+x^2y^2}+x+\sin y\right)dx+\left(\frac{x}{1+x^2y^2}+y+x\cos y\right)dy=0$$

קל לראות ש- $d\arctan(xy)=\frac{d(xy)}{1+x^2y^2}=\frac{xdy+ydx}{1+x^2y^2}$. לכן המשוואה מקבלת את הצורה $d\left(\arctan(xy)+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+x\sin y\right)=0$. והפתרון הכללי הוא $\arctan(xy)+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+x\sin y=c$ לכל $c\in\mathbb{R}$.

דרך מסודרת יותר: נסמן $P(x,y)=\frac{y}{1+x^2y^2}+x+\sin y,\ Q(x,y)=\frac{x}{1+x^2y^2}+y+x\cos y$.

הבדיקה מראה ש- $\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)=\frac{1}{1+x^2y^2}-\frac{2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}+\cos y=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$. לכן זה דיפרנציאל שלם. נחפש פונקציה $F(x,y)$ כזו ש- $dF=Pdx+Qdy$. אז הפתרון הכללי יהי מהצורה $F(x,y)=c,\ c\in\mathbb{R}$.

מהמשוואה $F'_x=P(x,y)$ נקבל $F(x,y)=\int\left(\frac{y}{1+x^2y^2}+x+\sin y\right)dx+\varphi(y)$ כאשר $\varphi(y)$ היא פונקציה חלקה שבתוכה אפשר להכניס את קבוע האינטגרציה שיתקבל. לכן $F(x,y)=\arctan(yx)+\frac{1}{2}x^2+x\sin y+\varphi(y)$. מהמשוואה $F'_y=Q$ נקבל $\varphi'(y)=y$ ו- $\varphi(y)=\frac{1}{2}y^2+\tilde{c}$, $F(x,y)=\arctan(xy)+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+x\sin y+\tilde{c}$. הפונקציה $F(x,y)$ מוגדרת עד לקבוע, לכן זורקים את $\tilde{c}$ ושוב מקבלים אותו פתרון כללי $\arctan(xy)+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+x\sin y=c,\ c\in\mathbb{R}$.

$$y' - y + \tfrac{1}{3}e^x y^4 = 0$$

זאת משוואת Bernulli. נזכור ש- $y(x)=0$ הפתרון ונחלק ב- y^4, נגדיר $u = y^{-3}$. המשוואה מקבלת צורה $-u' - 3u + e^x = 0$, $u' + 3u = e^x$. אפשר להשתמש בשיטת וריאציית המקדמים או בשיטת גורם האינטגרציה. נשתמש במקום זה בשיטת המקדמים הלא ידועים. אין פה רזוננס, לכן $u = ce^{-3x} + u_p$ כאשר הפתרון הפרטי הוא מן הצורה $u_p = de^x$ (זה לא ניחוש, זה ידע). הצבה נותנת $4d = 1,\ d = \tfrac{1}{4}$. לכן $u = ce^{-3x} + \tfrac{1}{4}e^x$ והפתרון הכללי הוא $y^{-3} = ce^{-3x} + \tfrac{1}{4}e^x$ או $y = (ce^{-3x} + \tfrac{1}{4}e^x)^{-\frac{1}{3}}$, $c \in \mathbb{R}$. אחרי הוספת הפתרון $y = 0$ מקבלים את התשובה הסופית $y = (ce^{-3x} + \tfrac{1}{4}e^x)^{-\frac{1}{3}},\ c \in \mathbb{R}$ ו $y = 0$.

$$y' - x^2 y = x^2 / y^2$$

גם זו משוואת Bernulli. נזכור ש- $y(x) \neq 0$, נכפיל ב- y^2, נקבל $y^2 y' - x^2 y^3 = x^2$, ובהמשך $u = y^3$, $u' - 3x^2 u = 3x^2$.
הפעם להדגמה נשתמש בשיטת גורם האינטגרציה: $(\mu u)' = 3\mu x^2$ כאשר $\mu' = -3x^2\mu$. מכאן $\mu = e^{-x^3}$, $u = e^{x^3}\int 3x^2 e^{-x^3}dx = e^{x^3}(-e^{-x^3} + c) = ce^{x^3} - 1,\ c \in \mathbb{R}$. והפתרון הכללי הוא $y = (ce^{x^3} - 1)^{\frac{1}{3}},\ c \in \mathbb{R}$.
נשים לב שבנקודות הבודדות שבהן $ce^{x^3} = 1$ הפונקציה לא מקיימת את המשוואה כי אז y מתאפס.

$$\dot{y} + \tan(t)y = \sin t\ ,\ y(0) = 1$$

זאת משוואה ליניארית פשוטה. נשים לב שבנקודות $\cos t = 0$ המשוואה לא מוגדרת. מכאן כרגיל נקבל $\dot{y}_h + \tan(t)y_h = 0$, $\dot{y}_p + \tan(t)y_p = \sin t$, $y = y_h + y_p$, כאשר y_h הוא הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית, ו- y_p הוא פתרון פרטי כלשהו.
נשתמש וריאציית המקדמים. זוכרים ש- $y_h(x) = 0$ הוא פתרון, מפרידים משתנים ומקבלים $\dot{y}_h / y_h = -\tan(t)$, $\ln|y_h| = -\int \frac{\sin t}{\cos t}dt = \int \frac{d\cos t}{\cos t} = \ln|\cos t| + \tilde{c}$. לכן הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית הוא $y_h = c\cos t,\ c \in \mathbb{R},$ כאשר $c = \pm e^{\tilde{c}}, 0$.
נחפש את y_p בצורה $y_p = c_1(t)\cos t$. מציבים אותו ומקבלים $\dot{c}_1(t)\cos t = \sin t$, ולכן $c_1 = \int \frac{\sin t}{\cos t}dt = -\ln|\cos t| + c_2$.
כמובן לוקחים $c_2 = 0$ כי אנו רק צריכים פתרון פרטי אחד.
לכן הפתרון הכללי למשוואה המקורית הוא $y = c\cos t - \cos t \ln|\cos t|$, $c \in \mathbb{R}$.
הפתרון לבעיית Cauchy מתקבל מ- $y(0) = 1$, $c\cos 0 - \ln(1)\cos 0 = 1$ אשר נותן $c = 1$ ו $y = \cos t - \cos t \ln|\cos t|$.

שאלה 2.

א. האם $y_*(t)=(\sin t,t)^T$ יכול לקיים משוואה דיפרנציאלית $y\in\mathbb{R}^2$, $\dot y=A(t)y$ עם $A(t)$ ממשית רציפה בכל $t\in\mathbb{R}$? האם שתי הפונקציות y_* ו $y_*+(t,t)^T$ או y_* ו $2y_*$ יכולים לקיים את המשוואה $\dot y=A(t)y+B(t)$ עם $A(t),B(t)$ רציפים? מהתשובה לאותן השאלות ל $y_*(t)=(\sin t,\cos t)^T$? לנמק

ב. האם $y_*(t)=\sin^2 t$ יכול לקיים משוואה דיפרנציאלית $y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)y=0$ עם $a_1(t),\ldots,a_n(t)$ ממשיים ורציפים בכל $t\in\mathbb{R}$ ל $n=2$? מהו n הקטן ביותר שבשבילו זה אפשרי? מה התשובה לאותן השאלות לגבי $y_*(t)=\sin t+2$ ו $y_*(t)=\cos^2(t+2)$? לנמק ולתת דוגמא במקרים של תשובה חיובית.

א. $y_*(t)=(\sin t,t)^T$ לא יכול לקיים את המשוואה כי $y_*(0)=0\in\mathbb{R}^2$ ולכן הודות למשפט הקיום והיחידות הוא חייב לקיים $y_*(t)=0$ לכל t (הרי $y(t)=0$ הוא תמיד פתרון לכל משוואה ליניארית הומוגנית).

שתי פונקציות y_* ו- $y_*+(t,t)^T$ לא יכולות לקיים $\dot y=A(t)y+B(t)$ כי הן שוות ב- $t=0$ (שוב משפט הקיום והיחידות). אותו דבר נכון גם לגבי y_* ו $2y_*$.

במקרה של $y_*(t)=(\sin t,\cos t)^T$ התשובה הראשונה חיובית. באמת $\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}^{\bullet}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$, כמובן הפונקציה $2y_*$ גם פותרת אותה משוואה (מתאים למקרה $B(t)=0$). לעומת זאת, y_* ו $y_*+(t,t)^T$ שוב לא יכולות לקיים $\dot y=A(t)y+B(t)$ כי אז ההפרש שלהן $(t,t)^T$ עדיין מתאפס ב- $t=0$. זה שוב סותר את משפט הקיום ויחידות כי יש להן תנאי התחלה זהים.

ב. בדומה לסעיף הקודם, הפונקציה $y_*(t)=\sin^2 t$ לא יכולה לקיים מד"ר ליניארית הומוגנית מסדר $n=1,2$ כי תנאי ההתחלה שלה הם $y(0)=0$ ל- $n=1$ ו $y(0)=0,\dot y(0)=0$ ל- $n=2$ (באמת $\frac{d}{dt}\sin^2 t=2\sin t\cos t=\sin 2t$).

לעומת זאת $\ddot y_*(t)=2\cos 2t$ ותנאי ההתחלה $y(0)=0,\dot y(0)=0,\ddot y(0)=2$ לא סותר את משפט הקיום והיחידות ל $n=3$.

נמצא את המשוואה. ברור ש $y_*=\sin^2 t=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t$, לכן $y_*(t)$ מקיים את $p(\frac{d}{dt})y=0$ כאשר $p(\lambda)=\lambda(\lambda^2+4)$.

והמשוואה היא $\dddot y+4\dot y=0$.

המקרה $y_*(t)=\cos^2(t+2)$ זהה למקרה הקודם, כי $\cos^2(t+2)=\sin^2(t+\pi/2+2)$, רק שבמקרה זה צריך לקחת תנאי התחלה ב- $t=-\pi/2-2$. גם $\cos^2(t+2)$ מקיים $\dddot y+4\dot y=0$.

משפט הקיום והיחידות לא מונע מהפונקציה $y_*(t)=\sin t+2$ לקיים משוואה כבר מסדר ראשון. ברור שהיא מקיימת את המשוואה $\dot y=\frac{\cos t}{\sin t+2}y$.

שאלה 3.

א. למצוא את הפתרון הכללי והפתרון לבעיית קושי למשוואות דיפרנציאליות

$\dddot{y}-y=t+\cos t$, $y(0)=\dot{y}(0)=\ddot{y}(0)=0$; $\dddot{y}+2\ddot{y}+\dot{y}=t+e^t$, $y(0)=\dot{y}(0)=\ddot{y}(0)=0$.

ב. למצוא את הפתרון הכללי והפתרון לבעיית קושי למערכות משוואות דיפרנציאליות

$\begin{cases}\dot{y}_1=2y_1+3y_2+1\\ \dot{y}_2=4y_1+3y_2\end{cases}$, $\begin{matrix}y_1(0)=2\\ y_2(0)=0\end{matrix}$; $\begin{cases}\dot{y}_1=y_1+e^t\\ \dot{y}_2=4y_1-5y_2\end{cases}$, $\begin{matrix}y_1(0)=2\\ y_2(0)=0\end{matrix}$; $\begin{cases}\dot{y}_1=3y_1-3y_2+1\\ \dot{y}_2=2y_1-2y_2\end{cases}$, $\begin{matrix}y_1(0)=0\\ y_2(0)=0\end{matrix}$.

א.

$\dddot{y}-y=t+\cos t$, $y(0)=\dot{y}(0)=\ddot{y}(0)=0$

הפולינום האופייני הוא $\lambda^3-1=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$. לכן הפתרון הכללי מקבל את הצורה $y=c_1e^t+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+c_3e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+y_{p1}+y_{p2}$ כאשר $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ ו- y_{p1},y_{p2} הם פתרונות פרטיים המקיימים $\dddot{y}_{p1}-y_{p1}=t$ ו- $\dddot{y}_{p2}-y_{p2}=\cos t$. אין פה רזוננס, לכן קיימים פתרונות פרטיים מן הצורה $y_{p1}=d_1+d_2t$ ו $y_{p2}=f_1\cos t+f_2\sin t$. נמצא את המקדמים הממשיים.

מציבים y_{p1} ומקבלים $-d_1-d_2t=t$, $y_{p1}=-t$. מציבים y_{p2} ומקבלים $f_1\sin t-f_2\cos t=\cos t$. לכן $f_1=0, f_2=-1$, $y_{p2}=-\sin t$. מכאן הפתרון הכללי הוא $y=c_1e^t+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+c_3e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)-t-\sin t$, $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

נקיים תנאיי התחלה. מציבים $t=0$ ומקבלים $y(0)=c_1+c_2=0$. נחשב $\dot{y}(t)$ ונציב $t=0$:

$$\dot{y}=c_1e^t-\tfrac{1}{2}c_2e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t)-\tfrac{\sqrt{3}}{2}c_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t)-\tfrac{1}{2}c_3e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t)+\tfrac{\sqrt{3}}{2}c_3e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t)-1-\cos t,$$

$$\dot{y}(0)=c_1-\tfrac{1}{2}c_2+\tfrac{\sqrt{3}}{2}c_3-2=0\ ;$$

ולבסוף (בחישוב בעל-פה) $\ddot{y}(0)=c_1+\frac{1}{4}c_2-\frac{3}{4}c_2-\frac{\sqrt{3}}{4}c_3-\frac{\sqrt{3}}{4}c_3=0$, $\ddot{y}(0)=c_1-\frac{1}{2}c_2-\frac{\sqrt{3}}{2}c_3=0$.

נסמן $\tilde{c}_2=\frac{1}{2}c_2,\tilde{c}_3=\frac{\sqrt{3}}{2}c_3$ ונקבל

$$\begin{cases}c_1+2\tilde{c}_2=0\\ c_1-\tilde{c}_2+\tilde{c}_3=2\\ c_1-\tilde{c}_2-\tilde{c}_3=0\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}c_1+2\tilde{c}_2=0\\ c_1-\tilde{c}_2=1\\ \tilde{c}_3=1\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}c_1=\frac{2}{3}\\ \tilde{c}_2=-\frac{1}{3}\\ \tilde{c}_3=1\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}c_1=\frac{2}{3}\\ c_2=-\frac{2}{3}\\ c_3=\frac{2}{3}\sqrt{3}\end{cases}$$

והפתרון לבעיית קושי הוא $y=\frac{2}{3}e^t-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+\frac{2}{3}\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)-t-\sin t$.

$\dddot{y}+2\ddot{y}+\dot{y}=t+e^t$, $y(0)=\dot{y}(0)=\ddot{y}(0)=0$

הפולינום האופייני הוא $\lambda^3+2\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda+1)^2$. לכן הפתרון הכללי מקבל את הצורה $y=c_1+c_2e^t+c_3te^t+y_{p1}+y_{p2}$ כאשר $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ ו- y_{p1},y_{p2} הם פתרונות פרטיים המקיימים $\dddot{y}_{p1}+2\ddot{y}_{p1}+\dot{y}_{p1}=t$ ו- $\dddot{y}_{p2}+2\ddot{y}_{p2}+\dot{y}_{p2}=e^t$. יש

פה רזוננס בערך עצמי 0 מריבוי 1 ואין רזוננס בערך עצמי 1, לכן קיימים פתרונות פרטיים מן הצורה $y_{p1}=d_1t+d_2t^2$ ו $y_{p2}=fe^t$. נמצא את המקדמים $d_1,d_2,f\in\mathbb{R}$.

מציבים y_{p1} ומקבלים $\dddot{y}_{p1}=0, \ddot{y}_{p1}=2d_2, \dot{y}_{p1}=d_1+2d_2t$ אשר מניב $4d_2+d_1+2d_2t=t$. מכאן $d_2=\frac{1}{2}, d_1=-4d_2=-2$ ו $y_{p1}=-2t+\frac{1}{2}t^2$.

מציבים y_{p2} ומקבלים $\dddot{y}_{p2}=\ddot{y}_{p2}=\dot{y}_{p2}=fe^t$ אשר מניב $fe^t(1+2+1)=e^t$ ו $y_{p2}=\frac{1}{3}e^t$.

מכאן הפתרון הכללי הוא $y=c_1+c_2e^t+c_3te^t-2t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}e^t$, $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

ב.

$$\begin{cases}\dot{y}_1=2y_1+3y_2+1\\ \dot{y}_2=4y_1+3y_2\end{cases},\ \begin{matrix}y_1(0)=2\\ y_2(0)=0\end{matrix}$$

הפולינום האופייני הוא $\lambda^2-5\lambda-6=(\lambda-6)(\lambda+1)$. וקטורים עצמיים:

$$\begin{pmatrix}2-6 & 3\\ 4 & 3-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\ 4y_1-3y_2=0,\ e_1=\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}2+1 & 3\\ 4 & 3+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\ y_1+y_2=0,\ e_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix};$$

אין פה רזוננס. לכן מחפשים פתרון פרטי בצורה $y_p=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix}$. מציבים: $\begin{cases}0=2d_1+3d_2+1\\ 0=4d_1+3d_2\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}d_1=\frac{1}{2}\\ d_2=-\frac{2}{3}\end{cases}$.

מכאן הפתרון הכללי הוא $y=c_1\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}e^{6t}+c_2\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^{-t}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

מתנאי ההתחלה מקבלים $c_1\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}\Leftarrow\begin{cases}3c_1+c_2=1\frac{1}{2}\\ 4c_1-c_2=\frac{2}{3}\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}c_1=\frac{13}{42}\\ c_2=\frac{52}{42}-\frac{2}{3}=\frac{52-28}{42}=\frac{4}{7}\end{cases}$

והפתרון לבעיית קושי הוא $y=\frac{13}{42}\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}e^{6t}+\frac{4}{7}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^{-t}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases}\dot{y}_1=y_1+e^t\\ \dot{y}_2=4y_1-5y_2\end{cases},\ \begin{matrix}y_1(0)=2\\ y_2(0)=0\end{matrix};$$

הפולינום האופייני הוא $\lambda^2+4\lambda-5=(\lambda+5)(\lambda-1)$. וקטורים עצמיים:

$$\begin{pmatrix}1+5 & 0\\ 4 & -5+5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\ y_1=0,\ e_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1-1 & 0\\ 4 & -5-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\ 4y_1-6y_2=0,\ e_2=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix};$$

יש פה רזוננס עם ריבוי 1, לכן הפתרון הפרטי מחפשים בצורה $y_p=\begin{pmatrix}d_1+f_1t\\ d_2+f_2t\end{pmatrix}e^t$. מכאן $\dot{y}_p=\begin{pmatrix}d_1+f+f_1t\\ d_2+f_2+f_2t\end{pmatrix}e^t$.

מציבים:

$.\begin{cases} f_1=1, & f_2=\frac{2}{3} \\ 6d_2+f_2=4d_1 \end{cases} \Leftarrow \begin{pmatrix} d_1+f_1+f_1t \\ d_2+f_2+f_2t \end{pmatrix}e^t = \begin{pmatrix} d_1+f_1t+1 \\ 4(d_1+f_1t)-5(d_2+f_2t) \end{pmatrix}e^t$ בוחרים $d_1=0$ ומקבלים

$f_1=1, f_2=\frac{2}{3}, d_1=0, d_2=-\frac{1}{9}$, והפתרון הכללי הוא $y=c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-5t}+c_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}e^t+\begin{pmatrix}t\\-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}t\end{pmatrix}e^t$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

מתנאי ההתחלה מקבלים $c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1+3c_2=2 \\ 2c_2=\frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=1\frac{5}{6} \\ c_2=\frac{1}{18} \end{cases}$

והפתרון לבעיית קושי הוא $y=1\frac{5}{6}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-5t}+\frac{1}{18}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}e^t+\begin{pmatrix}t\\-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}t\end{pmatrix}e^t$.

$\begin{cases} \dot{y}_1=3y_1-3y_2+1 \\ \dot{y}_2=2y_1-2y_2 \end{cases}, \begin{matrix} y_1(0)=0 \\ y_2(0)=0 \end{matrix}$

הפולינום האופייני הוא $\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)$. וקטורים עצמיים:

$$\begin{pmatrix}3&-3\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ y_1-y_2=0,\ e_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}3-1&-3\\2&-2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ 2y_1-3y_2=0,\ e_2=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix};$$

יש פה רזוננס עם ריבוי 1, לכן מחפשים פתרון פרטי בצורה $y_p=\begin{pmatrix}d_1+f_1t\\d_2+f_2t\end{pmatrix}$. מציבים:

$\begin{cases} f_1=3(d_1+f_1t)-3(d_2+f_2t)+1 \\ f_2=2(d_1+f_1t)-2(d_2+f_2t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1=3(d_1-d_2)+1, \\ f_2=2(d_1-d_2), \\ f_1=f_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1-d_2=-1, \\ f_1=f_2=-2 \end{cases}.$ ניקח $d_1=0$, אז נקבל

$d_2=1, f_1=f_2=-2$ והפתרון הכללי הוא $y=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}e^t+\begin{pmatrix}-2t\\1-2t\end{pmatrix}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

מתנאי ההתחלה מקבלים $c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1+3c_2=0 \\ c_1+2c_2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=-3 \\ c_2=1 \end{cases}$

והפתרון לבעיית קושי הוא $y=-3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}e^t+\begin{pmatrix}-2t\\1-2t\end{pmatrix}$.

שאלה 4.

א. מה הוא הסדר n המינימלי והמשוואה $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=4$ עם מקדמים ממשיים קבועים, אם ידוע שפונקציות $y=te^t\cos t+1$, $y=te^{-t}+1$ מקיימות אותה? לנמק. מה היא המשוואה? מה הוא הפתרון הכללי שלה?

ב. האם ישנם פתרונות לא חסומים למשוואה $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=-1+\sin t$ אם ידוע שמקדמים ממשיים קבועים, ו $n\geq 1, a_n=0$? לנמק.

א. הפרש של הפתרונות $te^t\cos t-te^{-t}$ חייב להיות פתרון של המשוואה ההומוגנית. לכן $-1,1\pm i$ חייבים להיות שורשי הפולינום האופייני $p(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n$ עם ריבוי 1 לפחות. זה אומר ש- $n\geq 2+2\times 2=6$. הפולינום $p(\lambda)$ חייב להתחלק ב $(\lambda+1)^2(\lambda^2-2\lambda+2)^2$.

המשוואה מהסדר הנמוך ביותר היא $p(\frac{d}{dt})y=4$ כאשר $p(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda^2-2\lambda+2)^2$. קל לראות ש- $p(\frac{d}{dt})1=4$:

$$(\tfrac{d}{dt}+I_O)^2(\tfrac{d^2}{dt^2}-2\tfrac{d}{dt}+2I_O)^2 1=(\tfrac{d}{dt}+I_O)^2(\tfrac{d^2}{dt^2}-2\tfrac{d}{dt}+2I_O)(0+0+2)=(\tfrac{d}{dt}+I_O)^2(0+0+4)=(\tfrac{d}{dt}+I_O)4=4$$

זה היה מאוד מפורט. נזכיר שלפי הגדרתו אופרטור הזהות מקיים את הזהות $I_Oy(t)=y(t)$.

לכן $y=1$ הוא פתרון פרטי ו- $y=te^t\cos t+1$, $y=te^{-t}+1$ מקיימים את המשוואה. **חישוב של** $p(\lambda)$ **לא נדרש.**

בכל זאת החישוב מראה שהמשוואה היא $y^{(6)}-2y^{(5)}+y^{(4)}+4\dddot{y}-4\ddot{y}+4y=4$.

הפתרון הכללי של אותה המשוואה הוא $y=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}+c_3e^t\cos t+c_4te^t\cos t+c_5e^t\sin t+c_6te^t\sin t+1$, $c_1,\ldots,c_6\in\mathbb{R}$.

הערה שאיננה חלק הפתרון: מיד היה אפשר לראות ש- 0 לא יכול לשמש שורש של $p(\lambda)$ כי אז היה $p(\lambda)=\lambda q(\lambda)$ ו- $y=te^{-t}+1$ לא יכול היה לקיים את המשוואה. אכן, אז היינו מקבלים

$$p(\tfrac{d}{dt})(te^{-t}+1)=q(\tfrac{d}{dt})\tfrac{d}{dt}(te^{-t}+1)=q(\tfrac{d}{dt})(-te^{-t}+e^{-t})$$

ו היה אי-אפשר לקבל 4 בצד ימין. לכן היה חייב להתקיים $p(0)=a_n=4$.

ב. נובע מ- $n\geq 1, a_n=0$ ש- 0 הוא שורש של הפולינום האופייני $p(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n$ מריבוי $m_0\geq 1$. לכן הרזוננס גורם לקיום פתרונות לא חסומים המכילים מרכיב $dt^{m_0}, d\neq 0$. **מפורט יותר:** נניח שריבוי השורשים $\pm i$ הוא $m_i\geq 0$. אז לפי המשפט תמיד קיים פתרון פרטי בצורה $y_p(t)=dt^{m_0}+t^{m_i}[f_1\cos t+f_2\sin t]$ עבור $f_1,f_2,d\in\mathbb{R}$ מסוימים ו- $(f_1,f_2), d\neq 0$. הוא לא חסום מכוון ש- $f_1\cos t+f_2\sin t$ מתאפס אין-סוף פעמים כאשר $t\to\infty$.

שאלה 5.

א. באיזו צורה מחפשים פתרון פרטי למשוואה וקטורית $\dot{y} = Ay + B(t)$, $y \in \mathbb{R}^5$ כאשר הערכים העצמיים של המטריצה A ו-$B(t)$ הם $\lambda_{1,2,3,4,5} = 0,2,2,1+i,1-i;\ B = \begin{pmatrix} t+te^t\cos t \\ t\cos t - e^t \\ t^2e^{2t} \\ 2t \\ te^t \end{pmatrix}$ (שיטת המקדמים הלא-ידועים, נוסחה בלבד).

ב. נא לפשט את התשובה לאותה השאלה אם

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 16 & -14 & 6 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ te^t + t^2e^{2t} + 2t + t\cos t - e^t + t + te^t\cos t \end{pmatrix}$$

(אותם ערכם עצמיים).

מהו הפתרון הכללי אם $B = 0$? מספיק לתת מרכיב ראשון של הפתרון ולהסתפק בנוסחה כללית במרכיבים אחרים (לא לחשב נגזרות).

ג. למצוא את האקספוננטה של המטריצה At,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ולמצוא את הפתרון לבעיית קושי $\dot{y} = Ay$, $y(0) = (1,1,-2,2,1)^T$ דרך שימוש בה.

א. קודם נציג את $B(t)$ כסכום קוווזי-פולינומים וקטוריים המתאימים לערכים עצמיים שונים ונציג את הערכים העצמיים וריבוייהם למטה:

$$B = \begin{pmatrix} t+te^t\cos t \\ t\cos t - e^t \\ t^2e^{2t} \\ 2t \\ te^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -e^t \\ 0 \\ 0 \\ te^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t\cos t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^t\cos t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eigenvalues:	$\lambda = 0$	$\lambda = 1$	$\lambda = \pm i$	$\lambda = 1 \pm i$	$\lambda = 2$
multiplicities:	$m = 1$	$m = 0$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$

לכן את הפתרון הפרטי מחפשים בצורה $y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3} + y_{p4} + y_{p5}$, כאשר

$$y_{p1}=\vec{d}_1+\vec{d}_2t+\vec{d}_3t^2,\ \ y_{p2}=e^t(\vec{d}_4+\vec{d}_5t),\ \ y_{p3}=(\vec{d}_6+\vec{d}_7t)\cos t+(\vec{d}_8+\vec{d}_9t)\sin t,$$
$$y_{p4}=e^t\left[(\vec{d}_{10}+\vec{d}_{11}t+\vec{d}_{12}t^2)\cos t+(\vec{d}_{13}+\vec{d}_{14}t+\vec{d}_{15}t^2)\sin t\right],$$
$$y_{p5}=e^{2t}(\vec{d}_{16}+\vec{d}_{17}t+\vec{d}_{18}t^2+\vec{d}_{19}t^3+\vec{d}_{20}t^4),\ \ \vec{d}_1,\vec{d}_2,...,\vec{d}_{20}\in\mathbb{R}^5$$

המקדמים $\vec{d}_1,\vec{d}_2,...,\vec{d}_{20}\in\mathbb{R}^5$ מכילים $5\times 20=100$ מספרים קונקרטיים אשר צריך למצוא כדי למצוא את הפתרון הכללי. הפתרון הכללי תמיד מכיל בדיוק 5 פרמטרים חופשיים (כסדר המערכת) אשר מופיעים בתוך הפתרון הכללי למערכת ההומוגנית.

ב. המערכת שקולה למשוואה סקלרית מסדר 5 מצורה $p(\frac{d}{dt})y_1=b(t)=te^t+t^2e^{2t}+2t+t\cos t-e^t+t+te^t\cos t$ כאשר $y_2=\dot{y}_1, y_3=\ddot{y}_1, y_4=\dddot{y}_1, y_5=\ddddot{y}_1$. הפולינום האופייני לא השתנה כמו גם הרזוננסים והריבויים.

שוב נציג את $b(t)$ כסכום קוואזי-פולינומים. הפעם הקוואזי-פולינומים הם סקלריים המתאימים לערכים עצמיים שונים שאת הערכים והריבויים נציג למטה:

$$\begin{array}{llllll} & b(t)\ =\ (t+2t)+e^t(t-1)+t\cos t+te^t\cos t+t^2e^{2t} \\ \text{eigenvalues:} & \lambda=0 & \lambda=1 & \lambda=\pm i & \lambda=1\pm i & \lambda=2 \\ \text{multiplicities:} & m=1 & m=0 & m=0 & m=1 & m=2 \end{array}$$

לכן את הפתרון הפרטי מחפשים בצורה $y_p=y_{p1}+y_{p2}+y_{p3}+y_{p4}+y_{p5}$, כאשר

$$y_{p1}=t(d_1+d_2t),\ \ y_{p2}=e^t(d_3+d_4t),\ \ y_{p3}=(d_5+d_6t)\cos t+(d_7+d_8t)\sin t,$$
$$y_{p4}=te^t\left[(d_9+d_{10}t)\cos t+(d_{11}+d_{12}t)\sin t\right],$$
$$y_{p5}=t^2e^{2t}(d_{13}+d_{14}t+d_{15}t^2),\ \ d_1,d_2,...,d_{15}\in\mathbb{R}$$

המקדמים $d_1,d_2,...,d_{15}$ הם מספרים ממשיים קונקרטיים אשר צריך למצוא כדי למצוא את הפתרון הכללי. הפתרון הכללי שוב מכיל בדיוק 5 פרמטרים חופשיים (כסדר המשוואה).

מכיוון שהערכים העצמיים הם $\lambda_{1,2,3,4,5}=0,2,2,1+i,1-i$, הפתרון הכללי למערכת ההומוגנית הוא

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1+e^{2t}(c_2+c_3t)+e^t(c_4\cos t+c_5\sin t)\\ \dot{y}_1\\ \ddot{y}_1\\ \dddot{y}_1\\ \ddddot{y}_1\end{pmatrix},\ \ c_1,...,c_5\in\mathbb{R}.$$

ג. המטריצה היא כבר מטריצת בלוקים אלכסונית. לכן $e^{At}=\begin{pmatrix}e^{-2t}&0&0\\0&e^{A_1t}&0\\0&0&e^{A_2t}\end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix}0&1\\-2&-3\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}3&-1\\1&3\end{pmatrix}$.

נחשב את e^{A_1t}. המשוואה $\dot{y}=A_1y,\ y\in\mathbb{R}^2$, שקולה למשוואה סקלרית $\ddot{y}_1+3\dot{y}_1+2y_1=0$, $y_2=\dot{y}_1$, עם הפולינום האופייני $\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+2)(\lambda+1)$. לכן הפתרון הכללי למשוואה הוקטורית הוא $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1e^{-2t}+c_2e^{-t}\\-2c_1e^{2t}-c_2e^{t}\end{pmatrix}$.

מתנאי ההתחלה מקבלים
$$\begin{pmatrix}c_1+c_2\\-2c_1-c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1(0)\\y_2(0)\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}c_1=-y_1(0)-y_2(0)\\c_2=2y_1(0)+y_2(0)\end{cases}$$

לכן
$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-y_1(0)-y_2(0))e^{2t}+(2y_1(0)+y_2(0))e^{t}\\-2(-y_1(0)-y_2(0))e^{2t}-(2y_1(0)+y_2(0))e^{t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2e^t-e^{2t}&e^t-e^{2t}\\-2e^t+2e^{2t}&-e^t+2e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(0)\\y_2(0)\end{pmatrix},$$

ו- $e^{A_1t}=\begin{pmatrix}2e^t-e^{2t}&e^t-e^{2t}\\-2e^t+2e^{2t}&-e^t+2e^{2t}\end{pmatrix}$

עכשיו נחשב את e^{A_2t}.
$$e^{A_2t}=\exp\begin{pmatrix}3t&0\\0&3t\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}0&-t\\t&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{3t}&0\\0&e^{3t}\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}0&t_1\\-t_1&0\end{pmatrix}\Bigg|_{t_1=-t}=e^{3t}\exp\begin{pmatrix}0&t_1\\-t_1&0\end{pmatrix}\Bigg|_{t_1=-t}$$

פה השתמשנו בכך ש- $e^{U+V}=e^Ue^V$ עבור מטריצות U,V מתחלפות ($UV=VU$).

נחשב $\exp\begin{pmatrix}0&t_1\\-t_1&0\end{pmatrix}$ באותה שיטה. מהמשוואה $y_1''+y_1=0$ נקבל
$$\begin{pmatrix}y_1(t_1)\\y_2(t_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\cos t_1+c_2\sin t_1\\-c_1\sin t_1+c_2\cos t_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t_1&\sin t_1\\-\sin t_1&\cos t_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\Bigg|_{t_1=0}\Rightarrow\exp\begin{pmatrix}0&t_1\\-t_1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t_1&\sin t_1\\-\sin t_1&\cos t_1\end{pmatrix},$$

$e^{A_2t}=e^{3t}\exp\begin{pmatrix}0&t_1\\-t_1&0\end{pmatrix}\Bigg|_{t_1=-t}=e^{3t}\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t\\\sin t&\cos t\end{pmatrix}$. ולבסוף אקספוננטה של המטריצה והפתרון לבעיית קושי עם תנאי ההתחלה $y(0)=(1,1,-2,2,1)^T$ הם

$$e^{At}=\begin{pmatrix}e^{-2t}&0&0&0&0\\0&2e^t-e^{2t}&e^t-e^{2t}&0&0\\0&-2e^t+2e^{2t}&-e^t+2e^{2t}&0&0\\0&0&0&e^{3t}\cos t&-e^{3t}\sin t\\0&0&0&e^{3t}\sin t&e^{3t}\cos t\end{pmatrix},\quad y(t)=e^{At}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\2\\1\end{pmatrix}.$$