אוניברסיטת תל-אביב

הפקולטה להנדסה, תשפ"א, סמ' א', 4 ינואר, 2021

מטלת סוף הסמסטר במשוואות דיפרנציאליות רגילות להנדסת חשמל ואלקטרוניקה, 0509174510

המורה: פרופ' א. לבנט

משך ביצוע העבודה: שבוע.

ארבעת השאלות הראשונות שוות 25 נקודות כל אחת. השאלה האחרונה היא שאלת בונוס של 10 נקודות.

אם לא נאמר אחרת צריך לחפש פתרונות ממשיים.

לא חייבים לפשט ביטויים בתשובות סופיות (למשל אפשר לא להכפיל מטריצות).

1. מצאו את הפתרון הכללי ופתרון לבעיית קושי (אפשר כפונקציה סתומה) כאשר תנאי התחלה נתונים:

$\ddot{y}-\frac{t+1}{t-1}\dot{y}+\frac{2}{t-1}y=1$, $t<1$, $y(0)=1,\ \dot{y}(0)=0$, נתונים שני פתרונות פרטיים: $y=t, y=t+e^t$;

$t^2\ddot{y}-4t\dot{y}+6y=-t^4e^t$, $t>0$, $y(1)=0,\ \dot{y}(1)=1$.

2.

א. מהו זוג הפונקציות הווקטוריות $\begin{pmatrix}\sin t+1\\ \cos t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t-1\end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix}\sin t+2\\ -\cos t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t-2\end{pmatrix}$ אשר יכול לשמש זוג פתרונות למשוואה דיפרנציאלית $y\in\mathbb{R}^2$, $\dot{y}=A(t)y$ עם $A(t)$ ממשית רציפה בכל $t\in\mathbb{R}$? יש לנמק ולמצוא את המטריצה $A(t)$.

ב. מהו זוג הפונקציות e^t, te^{-t} או $e^t,(t^2+t+1)e^{-t}$ אשר יכול לשמש זוג פתרונות למשוואה דיפרנציאלית $y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)y=0$ עם $a_1(t),\ldots,a_n(t)$ ממשיים ורציפים בכל $t\in\mathbb{R}$ ל $n=2$? מהו n הקטן ביותר שבשבילו זה אפשרי? יש לנמק ולתת דוגמא במקרים של תשובה חיובית.

3.

א. מצאו את הפתרון הכללי למשוואה $(t+1)^2\ddot{y}-(t+1)\dot{y}+y=t$ דרך החלפת הזמן המתאימה. כמו כן, ציינו את הפתרונות המקיימים את המשוואה לכל $t\in\mathbb{R}$. האם יש פתרונות יציבים עם תנאי התחלה ב-$t=1$?

ב. מצאו את הפתרונות הכלליים לבעיות ההומוגניות המתאימות למשוואות

$$t^2\ddot{y}+3t\dot{y}+2y=t-1+t\ln^2 t-t^{-1}\ln^3 t\cos(\ln t)+\sin(2\ln t);$$

$$t^2\ddot{y}-3t\dot{y}-5y=t^5\ln^2 t-1+t^{-1}\ln t-t^{-1}\cos(\ln t).$$

מהם הפתרונות המקיימים את המשוואות ההומוגניות לכל $t\in\mathbb{R}$? באיזו צורה מחפשים פתרון פרטי למשוואות עצמן?

רמז: יש להחליף את הזמן בצורה מתאימה.

4.

א. בדקו את יציבות (יציב, יציב אסימפטוטית, לא יציב) של פתרונות המשוואות. יש להסתפק בבדיקת הפתרון לבעיית קושי אם נתונים תנאיי התחלה. יש לנמק בכמה מילים.

$$y^{(5)}+\dddot{y}-2\ddot{y}+\dot{y}+y=e^t;\qquad y^{(11)}-|\cos t|\,y^{(10)}+3t^3y\arctan t=1;\qquad \dddot{y}+\pi^2\dot{y}+y=0;$$

$$\dot{y}=-|y|\,y,\ y(0)=0;\qquad \dot{y}=\sin y,\ y(0)=0;\qquad \dot{y}=\cos y,\ y(0)=\tfrac{\pi}{2};\qquad y^{(5)}=1 .$$

ב. לבדוק את היציבות של הפתרון $y(t)=0\in\mathbb{R}^2$ למערכות

$$\begin{cases}\dot{y}_1=\sin(y_1^2+y_2)\\ \dot{y}_2=-\sin(2y_1+y_2)+\cos(y_1y_2)-1\end{cases},\qquad \begin{cases}\dot{y}_1=\sin(2y_1+y_2)\\ \dot{y}_2=\sin(3y_1-y_2)\end{cases}.$$

.5

א. מהם המקדמים $c_0, \ldots, c_4$ של פיתוח טיילור $y = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + o(t^4)$ בסביבת $t = 0$ לפתרון בעיית קושי $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0 \quad \ddot{y} - t\dot{y}\cos t + y = \sin t,$.

ב. מצאו את הערכים העצמיים (אפשר בצורה גרפית) ואת הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם-ליאוביל

$$\begin{cases} u'' + u + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0,\ u(\pi/2) + u'(\pi/2) = 0 \end{cases}.$$

ג. יש לפתח את הפונקציה $f(x) = 1$ לטור פוריה לפי הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם-ליאוביל

$$\begin{cases} u'' + 4u + 4\lambda u = 0 \\ u(0) = 0, u'(\pi/2) = 0 \end{cases}.$$

בהצלחה!