

משך הבחינה: 3 שעות

חומר מותר לשימוש **בתנאים רגילים**: שני דפים A4 אישיים הממלאים בכתב יד משני הצדדים, מחשבון.**בבחינה מכוונת: הכול מותר** חוץ מההגבלות המנוסחות והנדרשות להקפדה על-ידי האוניברסיטה.

יש לענות על 4 שאלות בלבד ולציין את מספרי השאלות במחברת.

כל שאלה שווה ל-25 נקודות.

1.

א. (12 נק') מצאו את הפתרון הכללי ופתרון לבעיית קושי (אפשר כפונקציה סתומה) למשוואה  

$$y(0) = 1, 2 \sin(x^2 + y^2)(x + yy') + \cos(x^2 + y^2) = x$$

ב. (13 נק') מהו זוג הפונקציות הווקטוריות  $\begin{pmatrix} \sin t + 1 \\ \cos t \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t - 1 \end{pmatrix}$  או  $\begin{pmatrix} \sin t + 2 \\ -\cos t \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t - 2 \end{pmatrix}$  אשר יכול לשמש

זוג פתרונות למשוואה דיפרנציאלית  $y \in \mathbb{R}^2$ ,  $\dot{y} = A(t)y$ , עם  $A(t)$  ממשית רציפה בכל  $t \in \mathbb{R}$ ? יש לנמק ולמצוא את המטריצה  $A(t)$  כאשר היא קיימת.

2.

א. (11 נק') באיזו צורה מחפשים פתרון פרטי למשוואה וקוטרתית  $\dot{y} = Ay + B(t)$ ,  $y \in \mathbb{R}^5$ , כאשר הערכים העצמיים של המטריצה  $A$  ו  $B(t)$  הם  $\lambda_{1,2,3,4,5} = 0, 2, 2, 1+i, 1-i$ ; ו-  $B = (t + te^t \cos t, t \cos t - e^t, t^2 e^{2t}, 2t, te^t)^T$  (שיטת המקדמים הלא-ידועים, נוסחה בלבד,  $(\cdot)^T$  מסמן שחלוף)?

ב. (14 נק') למצוא את הפתרון הכללי והפתרון לבעיית קושי  $\dot{y} = -t^4 e^t$ ,  $t^2 \ddot{y} - 4t\dot{y} + 6y = -t^4 e^t$ ,  $t > 0$ ,  $y(1) = 0$ ,  $\dot{y}(1) = 1$ .

3.

א. (10 נק') האם ישנם פתרונות לא חסומים למשוואה  $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = -1 + \sin t$  עם מקדמים ממשיים קבועים, כאשר  $n \geq 1$ ,  $a_n = 0$ ? לנמק.

ב. (15 נק') מצאו את הפתרונות הכלליים לבעיה ההומוגנית המתאימה למשוואה  $t^2 \ddot{y} - 3t\dot{y} - 5y = t^5 \ln^2 t - 1 + t^{-1} \ln t - t^{-1} \cos(\ln t)$  מהם הפתרונות המקיימים את המשוואות ההומוגניות לכל  $t \in \mathbb{R}$ ? באיזו צורה מחפשים פתרון פרטי למשוואה עצמה ל- $t > 0$ ? **רמז:** יש להחליף את הזמן בצורה מתאימה.

4.

א. (13 נק') מצאו את הערכים העצמיים (אפשר בצורה גרפית) ואת הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם – ליאוויל

$$\begin{cases} u'' + u + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0, u(\pi/2) + u'(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

ב. (12 נק') מצאו את הפתרון הכללי והפתרון לבעיית קושי  $\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + 3y_2 + 1 \\ \dot{y}_2 = 4y_1 + 3y_2 \end{cases}$ ,  $y_1(0) = 2$ ,  $y_2(0) = 0$

5.

א. (16 נק') מצאו את האקספוננטה  $e^{At}$  למטריצה  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ , ופתרו בעיית קושי  $\dot{y} = Ay$ ,

דרך שימוש בה.  $y(0) = (1, \pi, -2, 2)^T$

ב. (9 נק') בדקו את יציבות (יציב, יציב אסימפטוטית, לא יציב) של הפתרונות הקבועים למשוואות  $\dot{y} = \cos y$ ,  $y(0) = \frac{\pi}{2}$ ;  $\dot{y} = \sin y$ ,  $y(0) = 0$ ;  $\dot{y} = -|y|$ ,  $y(0) = 0$

**בהצלחה!**