אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה להנדסה, תשפ"א, סמ' א', 11 דצמבר 2020
מטלת אמצע סמסטר במשוואות דיפרנציאליות רגילות להנדסת חשמל ואלקטרוניקה, 0509174510
המורה: פרופ' א. לבנט

משך ביצוע העבודה: שבועיים.
כל שאלה שווה ל20 נקודות. אם לא נאמר אחרת צריך לחפש פתרונות ממשיים.
לא חייבים לפשט ביטוים בתשובות סופיות (למשל אפשר לא להכפיל מטריצות).

1. למצוא את הפתרון הכללי ופתרון לבעיית קושי (אפשר כפונקציה סתומה) כאשר תנאי התחלה נתונים:

$$2\sin(x^2+y^2)(x+yy')+\cos(x^2+y^2)=x\ ,\ y(0)=1\ ;\qquad (x\cos^2(y/x)-y)dx+xdy=0\ ;$$

$$y'=(x^4+y^4)/(xy^3)\ ,\ y(1)=1\ ,\ x>0\ ;\qquad \left(\frac{y}{1+x^2y^2}+x+\sin y\right)dx+\left(\frac{x}{1+x^2y^2}+y+x\cos y\right)dy=0\ ;$$

$$y'-y+\tfrac{1}{3}e^x y^4=0\ ;\ y'-x^2y=x^2/y^2\ ;\qquad \dot y+\tan(t)y=\sin t\ ,\ y(0)=1\ .$$

2.

א. האם $y_*(t)=(\sin t,t)^T$ יכול לקיים משוואה דיפרנציאלית $y\in\mathbb{R}^2$, $\dot y=A(t)y$ עם $A(t)$ ממשית רציפה בכל $t\in\mathbb{R}$? האם שתי הפונקציות y_* ו $y_*+(t,t)^T$ או y_* ו $2y_*$ יכולים לקיים את המשוואה $\dot y=A(t)y+B(t)$ עם $A(t),B(t)$ רציפים? מהתשובה לאותן השאלות ל $y_*(t)=(\sin t,\cos t)^T$? לנמק (פה והלה θ^T מסמן שחלוף של וקטור\מטריצה θ).

ב. האם $y_*(t)=\sin^2 t$ יכול לקיים משוואה דיפרנציאלית $y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)y=0$ עם $a_1(t),\ldots,a_n(t)$ ממשיים ורציפים בכל $t\in\mathbb{R}$ ל $n=2$? מהו n הקטן ביותר שבשבילו זה אפשרי? מה התשובה לאותן השאלות לגבי $y_*(t)=\sin t+2$ ו $y_*(t)=\cos^2(t+2)$? לנמק ולתת דוגמא במקרים של תשובה חיובית.

3.

א. למצוא את הפתרון הכללי והפתרון לבעיית קושי למשוואות דיפרנציאליות

$$\dddot y-y=t+\cos t\ ,\ y(0)=\dot y(0)=\ddot y(0)=0\ ;\qquad \dddot y+2\ddot y+\dot y=t+e^t\ ,\ y(0)=\dot y(0)=\ddot y(0)=0\ .$$

ב. למצוא את הפתרון הכללי והפתרון לבעיית קושי למערכות משוואות דיפרנציאליות

$$\begin{cases}\dot y_1=2y_1+3y_2+1\\ \dot y_2=4y_1+3y_2\end{cases},\ \begin{matrix}y_1(0)=2\\ y_2(0)=0\end{matrix}\ ;\quad \begin{cases}\dot y_1=y_1+e^t\\ \dot y_2=4y_1-5y_2\end{cases},\ \begin{matrix}y_1(0)=2\\ y_2(0)=0\end{matrix}\ ;\quad \begin{cases}\dot y_1=3y_1-3y_2+1\\ \dot y_2=2y_1-2y_2\end{cases},\ \begin{matrix}y_1(0)=0\\ y_2(0)=0\end{matrix}\ .$$

4.

א. מה הוא הסדר n המינימלי והמשוואה $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=4$ עם מקדמים ממשיים קבועים, אם ידוע שפונקציות $y=te^t\cos t+1$, $y=te^{-t}+1$ מקיימות אותה? לנמק. מה היא המשוואה? מה הוא הפתרון הכללי שלה?

ב. האם ישנם פתרונות לא חסומים למשוואה $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=-1+\sin t$ אם ידוע שמקדמים ממשיים קבועים, ו $a_n=0$, $n\geq 1$? לנמק.

5.

א. באיזו צורה מחפשים פתרון פרטי למשוואה וקוטרית $\dot{y} = Ay + B(t)$, $y \in \mathbb{R}^5$ כאשר הערכים העצמיים של המטריצה A ו-$B(t)$ הם

$$B = \begin{pmatrix} t + te^t \cos t \\ t\cos t - e^t \\ t^2 e^{2t} \\ 2t \\ te^t \end{pmatrix}; \quad \lambda_{1,2,3,4,5} = 0, 2, 2, 1+i, 1-i$$

(שיטת המקדמים הלא-ידועים, נוסחה בלבד).

ב. נא לפשט את התשובה לאותה השאלה אם

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ te^t + t^2 e^{2t} + 2t + t\cos t - e^t + t + te^t \cos t \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 16 & -14 & 6 \end{pmatrix}$$

(אותם ערכם עצמיים).

מהוא הפתרון הכללי אם $B = 0$? מספיק לתת מרכיב ראשון של הפתרון ולהסתפק בנוסחה כללית במרכיבים אחרים (לא לחשב נגזרות).

ג. למצוא את האקספוננטה של המטריצה At ,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ולמצוא את הפתרון לבעיית קושי $\dot{y} = Ay$, $y(0) = (1, 1, -2, 2, 1)^T$ דרך שימוש בה.

בהצלחה!