הרצאה 9, 15/12-2020

קצת על אקספוננט של מטריצה (סיכום)

יש כמה דרכים לחשב e^{A}, e^{At}

מהן: לפי ההגדרה $e^{At} = I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots$

לא נעים, דרך מעשית:

$$A = K\begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_l \end{pmatrix}K^{-1}, \quad e^{At} = K\begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_l t} \end{pmatrix}K^{-1}$$

מטריצה מבלוקים מרובעים

משתמשים ב- e^{At} לפתרון המערכת

$$\dot{y} = Ay \Rightarrow y = e^{At}y(0)$$

$$y = e^{A(t-t_0)}y(t_0) \text{ או}$$

עובדה כללית: $y = \Phi(t)y(t_0)$ אם מתקיים לכל $y(t_0)$ אז $\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$

הוכחה: נניח $\boxed{e^{A(t-t_0)}y(t_0) = \Phi(t)y(t_0)}$!

$$\Rightarrow y(t_0) = e^{-A(t-t_0)}\Phi(t)y(t_0)$$

מתקיים לכל $y(t_0)$ $\Leftrightarrow e^{-A(t-t_0)}\Phi(t) = I$

$\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$ מ.ש.ל.

דוגמא לחשב e^{At}

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & & 0 \\ & e^{3t} & \\ 0 & & e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}t} \end{pmatrix}$$

$$\exp\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}t\right]$$ תשובה 123

נפרק את המשוואה

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \dot y_1 = y_2 \\ \ddot y_1 = \dot y_2 = -2y_1 + 3y_2 \end{array} \left|\begin{array}{l} \ddot y_1 - 3\dot y_1 + 2y_1 = 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda + 2 = \\ = (\lambda-2)(\lambda-1) \end{array}\right.$$

$$y_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{t}$$

$$y_2 = \dot y_1 = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{t}$$

נציב תנאי התחלה

$$\begin{array}{rl} - & c_1 e^{2\cdot 0} + c_2 e^{0} = c_1 + c_2 = y_1(0) \\ + & 2c_1 e^{2\cdot 0} + c_2 e^{0} = 2c_1 + c_2 = y_2(0) \end{array}$$

$$c_2 = y_1(0) - c_1 = \quad , \quad c_1 = y_2(0) - y_1(0) \quad | \text{מכאן}$$

$$= y_1(0) - y_2(0) + y_1(0), \quad c_2 = 2y_1(0) - y_2(0)$$

מציבים

$$y_1 = (-y_1(0) + y_2(0))e^{2t} + [2y_1(0) - y_2(0)]e^{t}$$

$$y_2 = (-2y_1(0) + 2y_2(0))e^{2t} + [2y_1(0) - y_2(0)]e^{t}$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2e^{t} - e^{2t}, & e^{2t} - e^{t} \\ 2e^{t} - 2e^{2t}, & 2e^{2t} - e^{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(0)\\ y_2(0)\end{pmatrix}$$

$$e^{\cancel{\begin{smallmatrix}0 & 1\\ -2\end{smallmatrix}}At} = \begin{pmatrix} e^{2t}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & e^{3t}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 2e^{t} - e^{2t}, & e^{2t} - e^{t} \\ 0, & 0, & 2e^{t} - 2e^{2t}, & 2e^{2t} - e^{t} \end{pmatrix}$$

אפשר גם לפרק לבלוקים אלכסוניים ...

לחשב נוסחא

(ראה [illegible])

$$\exp\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$$

$$e^{\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\beta\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}=\underbrace{\begin{pmatrix}e^{\alpha t}&0\\0&e^{\alpha t}\end{pmatrix}}_{e^{\alpha t}\text{ כפול}}\cdot\underbrace{e^{-\beta\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}}_{\text{לחשב}}$$

$$\begin{pmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\iff \begin{matrix}\dot y_1=y_2\\ \dot y_2=-y_1\end{matrix}\qquad \ddot y_1=\dot y_2=-y_1 \;\Big|\; \ddot y_1+y_1=0$$

$$\lambda^2+1=0$$

$$\lambda=\pm i$$

$$y_1=c_1\cos t+c_2\sin t$$

$$\dot y_1=y_2=-c_1\sin t+c_2\cos t$$

$$c_1=y_1(0)$$

$$c_2=y_2(0)$$

$$\Leftarrow\quad\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t, & \sin t\\ -\sin t, & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(0)\\ y_2(0)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}t}=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

$$e^{-\beta\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\Leftarrow t=-\beta \quad \text{נקח}$$

$$\boxed{\exp\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}=e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\alpha}\cos\beta, & -e^{\alpha}\sin\beta\\ e^{\alpha}\sin\beta, & e^{\alpha}\cos\beta\end{pmatrix}}$$

למשל

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}'=\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},\quad At=\begin{pmatrix}\alpha t & -\beta t\\ \beta t & \alpha t\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=e^{At}\begin{pmatrix}y_1(0)\\ y_2(0)\end{pmatrix}=e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos(\beta t) & -\sin(\beta t)\\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(0)\\ y_2(0)\end{pmatrix}$$

$\alpha:=\alpha t$

$\beta:=\beta t$

[illegible] סימון

Abel-Liouville משפט

$$\dot{y} = A(t)\, y, \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (y \in \mathbb{C}^n \text{ או})$$

$A(t)$ רציפה
$\mathbb{R}^{n\times n}$ ($\mathbb{C}^{n\times n}$ או)

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$$

$\dot{\varphi}_j = A(t)\varphi_j$ — מטריצת פתרונות

$\det \Phi(t) = W[\varphi_1 \dots \varphi_n](t)$ לפי הגדרה

$\dot{\Phi} = A(t)\Phi$ אז

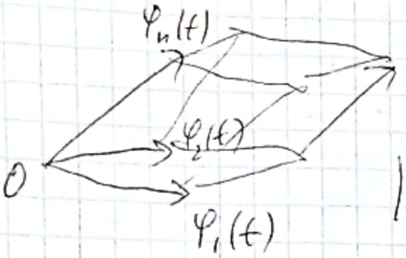
נסמן Wronskian ה $W(t)$

נוסחת Abel!

$$\boxed{\dot{W} = \mathrm{Tr}\, A(t) \cdot W}$$

Trace עקבה

$\mathrm{Tr}\, A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ (עקבה)



משמעות גאומטרית:

$|W| =$ נפח של המקבילון

~~הוכחה~~ תזכורת: אם $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ פתרונות בת"ל

אז $\Phi(t)$ נקראת מטריצה יסודית

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

הוכחה:

$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ שורות, $\Phi = (\varphi_1 \dots \varphi_n)$ עמודות

$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$ שורות, $\dot{\Phi} = A\Phi$, $\dot{\varphi}_j = A_j\Phi = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\varphi_k$

$$\dot{W} = (\det \Phi)' = \begin{vmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \dot{\varphi}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1\Phi \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ A_n\Phi \end{vmatrix}$$

$$\dot{W} = \sum_j \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \sum_k a_{jk}\varphi_k \\ \vdots \\ \varphi_n \end{vmatrix} = \sum_j a_{jj} \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_j \\ \vdots \\ \varphi_n \end{vmatrix} = \sum_j a_{jj} \cdot W = \mathrm{Tr}\, A \cdot W$$

מש"ל

הורדת סדר

שימוש במשוואה

$\dot{W} = Tr A(t) \cdot W$ — קשר בין קואורדינטות

נותן אפשרות להוריד מספר ה קואורדינטות

באורך 1 צריך עובד לכל n

במציאות ? רק ל-$n=2$

לפני הדוגמא נראה עוד דוגמא נוסף

$\dot{W} = Tr A(t) \cdot W$ באה מע"ה ממשפט 1

$\frac{\dot{W}}{W} = Tr A(t)$ מחלקים משני אגפים

במקרה: $W=0$

$\ln|W| = \int_{t_0}^{t} Tr A(s)\, ds + \tilde{C}$

$W(t) = C e^{\int_{t_0}^{t} Tr A(s) ds}$, $C = \pm e^{\tilde{C}}, 0$, $C \in \mathbb{R}$

$W(t_0) = C \Rightarrow \boxed{W(t) = e^{\int_{t_0}^{t} Tr A(s) ds} W(t_0)}$

כל חיים לזכור

$\boxed{\dot{W} = Tr A \cdot W}$

צריך לזכור

דוגמא

הורדת סדר, $n>2$

$\dot{y} = A(t) y$, $n=2$,

נניח פתרון | אחד φ: $\dot{\varphi} = A(t)\varphi$: $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}$

⇐ מנוסחת Abel

$W = \begin{vmatrix} y_1 & \xi_1(t) \\ y_2 & \xi_2(t) \end{vmatrix} = y_1 \xi_2 - y_2 \xi_1$

$\dot{W} = Tr A \cdot W \Rightarrow y_1 \xi_2 - y_2 \xi_1 = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} Tr A(s) ds}$

כי צריך למצוא עוד פתרון | אחד נוסף

1

כל זה מיותר [illegible] !

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = (1+e^{-t}-te^{-t})y_1 + (te^{-t}-e^{-t})y_2 \\ \dot{y}_2 = (e^{-t}-te^{-t})y_1 + (1+te^{-t}-e^{-t})y_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$ נתון פתרון

למצוא פתרון כללי

מספיק למצוא פתרון כללי אחד נוסף

$$\begin{vmatrix} e^t & y_1 \\ e^t & y_2 \end{vmatrix} = \cancel{w(0)}e^{2t} \qquad Tr A = 2$$

$\cancel{w(0)} \to 1$

$$e^t y_2 - e^t y_1 = e^{2t} \Rightarrow y_2 = e^t + y_1$$

נציב במשוואה הראשונה

$$\dot{y}_1 = (1+e^{-t}-te^{-t})y_1 + (te^{-t}-e^{-t})(e^t+y_1)$$
$$= y_1 + t - 1$$

$$\dot{y}_1 - y_1 = t - 1 \qquad \text{אי הומוגני}$$

$$y_1 = c_1 e^t + \underbrace{\cancel{d_1+d_2t}}_{\cancel{y_{1p}}}^{y_{1p}}, \quad d_1, d_2 = ?$$

$$y_{1p} = d_1 + d_2 t$$

נציב y_p במשוואה

$$d_2 - (d_1 + d_2 t) = t - 1 \Rightarrow -d_2 = 1, \ d_2 = -1$$
$$d_2 - d_1 = -1, \ d_1 = d_2 + 1 = 0$$

$$y_{1p} = -t$$

$$\left.\begin{matrix} y_1 = c_1 e^t - t \\ y_2 = y_1 + e^t \end{matrix}\right) = c_1\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ e^t - t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ e^t - t \end{pmatrix}$$

ניקח $c_1 = 0$

פתרון נוסף

פתרון כללי:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -t \\ e^{t}-t \end{pmatrix}$$

בעיקרון נראה שזה באמת פתרון (אפשר גם להוכיח, אבל לא צריך)

המקרה החשוב

משוואה אחת מסדר גבוה

$$y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)\, y = 0$$

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ - רציפים

$y \in \mathbb{R}$ (גם מעל $\mathbb{C}$ כנ"ל)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ \dot y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \dot y_1 \\ \vdots \\ \dot y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot W = -a_1(t)\, W}$$

~~$A(t)$~~

אם $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ - פתרונות כלשהם,

$$\Phi = \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ \dot f_1 & \dots & \dot f_n \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad W(t) = \det \Phi(t) = W[f_1 \dots f_n](t)$$

וכן

$$W(t) = W(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\, ds}$$

הערה!

$$W(t) \neq W(0)\, e^{-\int a_1(s)\, ds}$$

אינטגרל לא מסויים = קבוצת פונקציות

129 במקרה של $n=2$ הורדת סדר
עובדת טוב מאוד!

הורדת סדר ל $n=2$, מקרה סקלרי

$$\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_2(t)y = 0$$, $f(t)$ פתרון נתון

למצוא פתרון כללי

$$W(t) = \begin{vmatrix} f(t) & y_2(t) \\ \dot{f}(t) & \dot{y}_2(t) \end{vmatrix} = \tilde{C}_1 \underbrace{e^{-\int_0^t a_1(s)\,ds}} = \tilde{C}_1 W_0(t)$$

$$\dot{y} f(t) - y\dot{f}(t) = \tilde{C}_1 W_0(t)$$

$/f^2(t)$ צריך

כאשר $f(t)\neq 0$

$$\left(\frac{y}{f(t)}\right)^{\cdot} = \tilde{C}_1 \frac{1}{f(t)^2} W_0(t)$$

כמובן

$$(*) \quad y(t) = \tilde{C}_1 \boxed{f(t)\cdot\int_0^t \frac{W_0(s)}{f^2(s)}\,ds} \quad \boxed{+\tilde{C}_1 C_1 f(t)}$$

צריכים

פתרון חדש נוסף

(אפשר היה לקחת $\tilde{C}_1 = 1$ מההתחלה)

פתרון כללי

$$y(t) = C_1 f(t)\int_0^t \frac{W_0(s)}{f^2(s)}\,ds + C_2 f(t)$$

כדי לשמור לוגיקה

לוגיקה: נוסחת Abel תמיד נכונה.
אפשר לקחת $\tilde{C}_1 = 1$ (משנים y פרופורציונליים)
בגוף $(*)$ יש כל הפתרונות, מוריצים מרכיב של $f(t)$
כאשר הפתרון חדש כי הוא קיים
וכו' כל מה שנשאר. לכן הוא גם כללי

לא אכפת מבחינה

תרגיל

$$(t^2+1)\ddot{y}-2t\dot{y}+2y=0 \qquad f(t)=t$$

(כיוון שלא מקדם של $\dot{y}$)

חשוב!

$$a_1=\frac{-2t}{t^2+1}$$

$$\dot{y}t-y=\begin{vmatrix} t & y \\ 1 & \dot{y} \end{vmatrix}=\tilde{c}\,e^{\int_0^t \frac{2s}{s^2+1}ds}=\tilde{c}_1 e^{\int_0^t \frac{d(s^2+1)}{s^2+1}}=e^{\ln(t^2+1)}$$

$$\tilde{c}\to 1$$

$$=t^2+1$$

$$\left(\frac{y}{t}\right)^{\cdot}=1+\frac{1}{t^2} \qquad t\neq 0 \text{ כיוון}$$

$$y(t)=t\int\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=t\left(t-\frac{1}{t}+\tilde{c}_2\right), \quad \tilde{c}_2\to 0$$

$$=\underbrace{t^2-1}_{\text{פתרון חדש (עובדים בעיקר)}}+\cancel{\tilde{c}_2 t}\to 0$$

(עם פתרון יחיד)

פתרון כללי

$$\boxed{y(t)=c_1(t^2-1)+c_2 t}$$

תרגיל

$$(t^2-1)\ddot{y}+4t\dot{y}+2y=6t$$

$$t,\ \frac{t^2+t+1}{t+1}$$

נתונים שני פתרונות!

(נניח $t>1$)

למצוא פתרון כללי

פתרון:

$$\frac{t^2+t+1}{t+1}=t+\frac{1}{t+1}\Rightarrow t+\frac{1}{t+1}-t=\frac{1}{t+1}$$

פתרון למשוואה ההומוגנית ⇐ מורידים קבוע

כי זה אחד

$$W=\begin{vmatrix} \frac{1}{t+1} & y \\ -\frac{1}{(t+1)^2} & \dot{y} \end{vmatrix}=e^{-\int\frac{4t}{t^2-1}dt}=e^{-2\int\frac{d(t^2-1)}{t^2-1}}$$

$$W(t)=\tilde{c}\,e^{-2\ln(t^2-1)}=\tilde{c}\,\frac{1}{(t-1)^2(t+1)^2}, \quad \tilde{c}=1$$

$$\left((t+1)y\right)^{\cdot}=(t+1)^2W(t)=\frac{1}{(t-1)^2}\Rightarrow y=\frac{1}{t+1}\left(-\frac{1}{t-1}+\cancel{\tilde{\tilde{c}}}\right)=-\frac{1}{t^2-1}$$

$\tilde{\tilde{c}}\to 0$

אחר

$$\boxed{y=\frac{c_1}{t^2-1}+\frac{c_2}{t+1}+t}$$

משוואת Euler

Equidimensional equation

$$t^n y^{(n)} + a_1 t^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad t>0$$

$t=0$ נקראת נק' סינגולרית

Singular point

אין משפט ∃! בנק' $t=0$

אם מודדים y במטרים "m", t בשניות "s"

$$[t]=s,\ [y]=m,\ [t^k y^{(k)}] = \frac{m}{s^k}\cdot s^k = m$$

לכן הסק. כמו את משוואות ליניאריות שואפים לפתור אותן

ויש שתי שיטות הפתרון

1. מחפשים פתרון בצורה $y=t^\lambda$

כי לכל $\lambda\in\mathbb{R}$: $y^{(k)} = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)t^{\lambda-k}$

כאשר $\lambda=0$, מגדירים $t^0=1$

פורמלית: $\dot{y} = 0 = 0\cdot t^{-1}$

אז מקבלים המשוואה

$$t^k y^{(k)} = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)t^\lambda$$

$$\Leftarrow \quad t^\lambda\Big[\underbrace{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1) + a_1\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+2) + \dots + a_n}_{\text{נקרא פולינום אופייני}}\Big]=0$$

שורשים נקראים אופייניים

characteristic numbers

אם יש פתרונות $t^{\lambda_1},\dots,t^{\lambda_k}$ - ?

מה לעשות כאשר יש ריבוי שורשים?

$\Leftarrow$ תורה שלמה.

132 .2 מש' אוילר / הצבה $t=e^{\tau}$, $\tau=\ln t$

$t^{\lambda}=e^{\lambda\tau}$

אז מקבלים

$$\frac{d}{dt}(\cdot)=\frac{d}{d\tau}(\cdot)\cdot\frac{d\tau}{dt}=\frac{d}{d\tau}(\cdot)\frac{1}{t}\,,\quad \dot{y}=y'\cdot\frac{1}{t}$$

כאן ' לפי פונקצי' $y(t)$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\dot{y}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}y'\right)=-\frac{1}{t^2}y'+\frac{1}{t^2}y''$$

$$\frac{d^3y}{dt^3}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{t^2}y'+\frac{1}{t^2}y''\right)=\frac{2}{t^3}y'\underbrace{-\frac{2}{t^3}y''-\frac{1}{t^3}y''}+\frac{1}{t^3}y'''$$

<u>לסיכום,</u>

$$\frac{d^jy}{dt^j}=\frac{1}{t^{\cancel{k}}}\,q_{\cancel{k}}\!\left(\frac{d}{d\tau}\right)y$$

כאשר q_k - פולינום ממעלה j

<u>מוכיחים,</u> לפי אינדוקציה

⇐ מקבלים את המשוואה

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)y=q_n\left(\frac{d}{d\tau}\right)y^{[illegible]}+a_1q_{n-1}\left(\frac{d}{d\tau}\right)y^{[illegible]}+\dots+a_ny=0$$

בצורה לפי τ

פולינום אופייני: $q_n(\lambda)+a_1q_{n-1}(\lambda)+\dots+a_n=p(\lambda)$

כך מציין λ אותו הפולינום.

נחפש בצורה $y=e^{\lambda\tau}$ ⇐ $p(\lambda)=0$

אבל

$y=e^{\lambda\tau}=t^{\lambda}$ ⇐ אותו פולינום

דוגמא 133

$n=2$

$$t^2\ddot{y}+a_1t\dot{y}+a_2y=0$$

מציבים $y=t^\lambda$

$$\lambda(\lambda-1)t^\lambda+a_1\lambda t^\lambda+a_2t^\lambda=0$$

$$p(\lambda)=\lambda(\lambda-1)+a_1\lambda+a_2=\lambda^2+(a_1-1)\lambda+a_2$$

שורשים λ_1,λ_2

.1 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $\lambda_1\neq\lambda_2$

$$y=c_1e^{\lambda_1\tau}+c_2e^{\lambda_2\tau}=c_1t^{\lambda_1}+c_2t^{\lambda_2}$$

.2 $\lambda_1=\lambda_2\in\mathbb{R}$

$$y=c_1e^{\lambda_1\tau}+c_2\tau e^{\lambda_2\tau}=c_1t^{\lambda_1}+c_2\ln t\cdot t^{\lambda_1}$$

.3 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$

$$y=e^{\alpha\tau}\left(c_1\cos(\beta\tau)+c_2\sin(\beta\tau)\right)$$
$$=t^\alpha\left(c_1\cos(\beta\ln t)+c_2\sin(\beta\ln t)\right)$$

אז מה קורה כאשר $t<0$?

ההחלפה, $t_1=-t=|t|$, $\frac{d}{dt}=-\frac{d}{dt_1}$

$$t^jy^{(j)}=(-t_1)^j\left(\frac{d}{dt_1}\right)^jy=(-1)^{2j}t_1^jy^{(j)}_{t_1}$$

המשוואה נשמרת! $\Leftarrow$ אותו פתרון

מלבד אחרי החלפה, של t ב $-t$ $=|t|$

.1 $\lambda_1\neq\lambda_2\in\mathbb{R}$

$$y=c_1|t|^{\lambda_1}+c_2|t|^{\lambda_2}$$

.2 $\lambda_1=\lambda_2\in\mathbb{R}$

$$y=c_1|t|^{\lambda_1}+c_2\ln|t|\,t^{\lambda_1}$$

.3 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$

$$y=|t|^\alpha\left(c_1\cos(\beta\ln|t|)+c_2\sin(\beta\ln|t|)\right)$$

הערה חשובה מקרים $t>0$, $t<0$

בכלל לא קשורים לכן למשל

אם $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $\lambda_1\neq\lambda_2$ מקבלים

$$y=\begin{cases}c_1t^{\lambda_1}+c_2t^{\lambda_2}, & t>0\\ \tilde{c}_1|t|^{\lambda_1}+c_2|t|^{\lambda_2}, & t<0\end{cases}$$

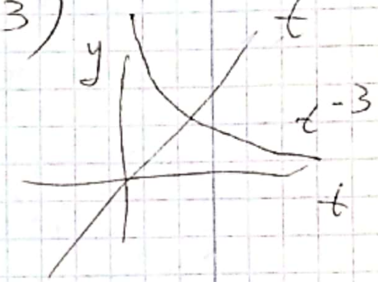
נכון! $a,b\in\mathbb{R}$, a^b לא מוגדר ל-$a<0$!

(מקרה כללי)

דוגמא

$$t^2\ddot{y}+3t\dot{y}-3y=0$$

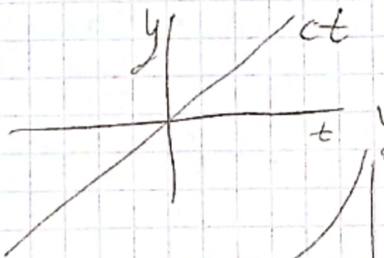
$$p(\lambda)=\lambda^2+(3-1)\lambda-3=(\lambda-1)(\lambda+3)$$



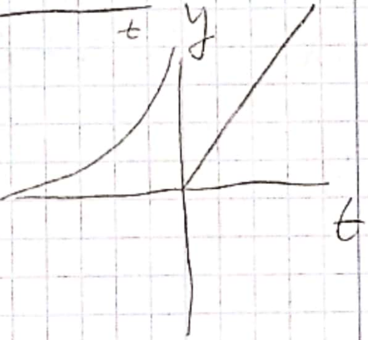
$$y=\begin{cases}c_1t+c_2t^{-3} & t>0\\ \tilde{c}_1|t|+\tilde{c}_2|t|^{-3} & t<0\end{cases}$$

$y=ct$ פתרון לכל t!

(כללי)



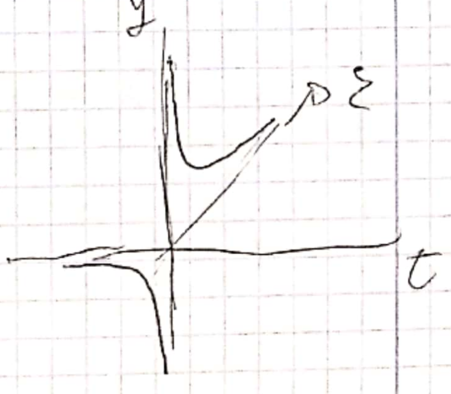
אפשר לתפור פתרונות!



$$y=\begin{cases}t, & t>0\\ t^{-3}, & t<0\end{cases}$$ פתרון

ב-$t=0$ הוא לא מוגדר

$$y=\begin{cases}t+t^{-3}, & t>0\\ t^{-3} & t<0\end{cases}$$



תרגיל 335

מצא כל פתרונות המשוואות ב- $t \in \mathbb{R}$

א. $t^2\ddot{y} - 4t\dot{y} + 6y = 0$

ב. $t^2\ddot{y} - 6y = 0$

ג. $t^2\ddot{y} + 6t\dot{y} + 6y = 0$

א. $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$

$$y = \begin{cases} c_1 t^2 + c_2 t^3 & t > 0 \\ \tilde{c}_1 t^2 + \tilde{c}_2 t^3 & t < 0 \end{cases}$$

$y = c_1 t^2 + c_2 t^3$ — $\forall t$ פתרון חלק

$y = c_1 t^2 + c_2 |t|^3$ — גם

$y = t^2 \operatorname{sign} t$ — לא פתרון ב $t=0$

(אפשר לבנות עוד פתרונות) (אין $\ddot{y}(0)$)

ב. $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda-3)(\lambda+2)$

$$y = \begin{cases} c_1 t^3 + c_2 t^{-2} & t > 0 \\ \tilde{c}_1 t^3 + \tilde{c}_2 t^{-2} & t < 0 \end{cases}$$

$y = ct^3$

$y = c|t|^3$

פתרונות ב $\mathbb{R}$

ג. $p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda+2)(\lambda+3)$

$$y = \begin{cases} c_1 t^{-2} + c_2 t^{-3} & t > 0 \\ \tilde{c}_1 t^{-2} + \tilde{c}_2 t^{-3} & t < 0 \end{cases}$$

אין פתרונות רציפים