08/12-2020 הרצאה 8.

משוואה ה-nית סקלרית

$$y^{(n)} + a_1(t)\,y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)\,y = b(t)$$

תנאי התחלה: $y(t_0) = \xi_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = \xi_n$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{y}} = A\vec{y} + B, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_n & \dots & & -a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

אם $a_1, a_2, \dots, a_n$ קבועים אז $(-1)^n \det(A - \lambda I)$

$$= p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$ (106)

אז נוכל למצוא פתרון לבעיה ההומוגנית

נניח שפתרון לבעיה ההומוגנית הוא ⟵

$$y_h = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

כאשר $f_1, \dots, f_n$ - פתרונות יסודיים (פונד')

מטריצה

$$\vec{y}_h = c_1 \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dot{f}_1(t) \\ \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} f_n(t) \\ \dot{f}_n(t) \\ \vdots \\ f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ \dot{f}_1 & & \dot{f}_n \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{\Phi(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{C}$$

$$\vec{y}_h(t) = \Phi(t)\,C$$

פתרון וקטורי למשוואה, $\dot{\vec{y}}_h = A(t)\vec{y}_h$

מטריצה יסודית לבעיה הווקטורית

לפי שיטת וריאציית המקדמים

$$\vec{y} = \vec{y}_h + \vec{y}_p = \underbrace{\Phi(t)\,C}_{\vec{y}_h} + \underbrace{\Phi(t)\,\tilde{C}(t)}_{\vec{y}_p}, \quad \tilde{C} = ?$$

מציבים ומקבלים (10)

$$\Phi\dot{\tilde{C}}+\cancel{\dot{\Phi}\tilde{C}}=(\Phi\tilde{C})^{\cdot}=\cancel{A\Phi\tilde{C}}+B$$

$$\dot{\Phi}\tilde{C} = A\Phi\tilde{C}$$

$$\Phi\dot{\tilde{C}}=B\ ,\quad \tilde{C}=\begin{pmatrix}\tilde{c}_1\\ \vdots\\ \tilde{c}_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f_1(t)\dot{\tilde{c}}_1(t)+f_2(t)\dot{\tilde{c}}_2(t)+\dots+f_n(t)\dot{\tilde{c}}_n(t)=0\\ \dot{f}_1(t)\dot{\tilde{c}}_1(t)+\dot{f}_2(t)\dot{\tilde{c}}_2(t)+\dots+\dot{f}_n(t)\dot{\tilde{c}}_n(t)=0\\ \vdots\\ f_1^{(n-1)}(t)\dot{\tilde{c}}_1(t)+f_2^{(n-1)}(t)\dot{\tilde{c}}_2(t)+\dots+f_n^{(n-1)}(t)\dot{\tilde{c}}_n(t)=b_n(t)\end{cases}$$

מכאן

$$\dot{\tilde{C}}(t)=\Phi^{-1}(t)B(t)$$

$$\tilde{C}(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)B(s)\,ds$$

רק פתרון אחד
נבחר
קבוע אינטגרציה $=0$

$$\vec{y}(t)=\Phi(t)C+\underbrace{\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)B(s)\,ds}_{=\vec{y}_p(t)}$$

$$\vec{y}_p=\begin{pmatrix}y_p\\ \dot{y}_p\\ \vdots\\ y_p^{(n-1)}\end{pmatrix}$$

תנאי התחלה:

$$\vec{y}(t_0)=\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$$

$$\Phi(t_0)C+\Phi(t_0)\underbrace{\int_{t_0}^{t_0}\dots ds}_{0}=\xi\ ,\quad C=\Phi(t_0)^{-1}\xi$$

$$y(t)=f_1(t)c_1+\dots+f_n(t)c_n+y_p(t)$$

פתרון כללי

דוגמא

108

$$\ddot{y}-2\dot{y}+y=\frac{e^t}{t}, \quad t>0$$

$$y(1)=1, \ \dot{y}(1)=0 \quad \text{תנאי התחלה,}$$

$$y_h=c_1e^t+c_2te^t \qquad p(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1$$

$$\lambda_{1,2}=+1$$

$$\dot{\vec{y}}=A\vec{y}+B(t), \quad A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}0\\ \frac{e^t}{t}\end{pmatrix}$$

פתרון כללי: $y=c_1e^t+c_2te^t+y_p(t)$

צריך למצוא y_p כלשהו

$$\vec{y}=\begin{pmatrix}y\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix}e^t & te^t\\ e^t & e^t+te^t\end{pmatrix}}_{\Phi(t)}\underbrace{\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}}_{C}}_{\vec{y}_h}+\underbrace{\begin{pmatrix}y_p(t)\\ \dot{y}_p(t)\end{pmatrix}}_{\vec{y}_p}$$

מחפשים $\vec{y}_p$ בצורה,

$$\vec{y}_p=\Phi\tilde{C}(t)$$

$$\boxed{\Phi\dot{\tilde{C}}=B} \Leftarrow \left| \begin{array}{l} (\Phi\tilde{C})'=A\Phi\tilde{C}+B \\ \Phi\dot{\tilde{C}}+\dot{\Phi}C=\Phi\tilde{C}+A\Phi C \end{array}\right.$$

$$\begin{cases}\dot{\tilde{c}}_1e^t+\dot{\tilde{c}}_2te^t=0\\ \dot{\tilde{c}}_1e^t+\dot{\tilde{c}}_2(e^t+te^t)=\frac{e^t}{t}\end{cases}$$

כלל קראמר Kramer

$$\dot{\tilde{c}}_1=\frac{\begin{vmatrix}0 & te^t\\ e^t/t & e^t+te^t\end{vmatrix}}{\Delta}, \quad \dot{\tilde{c}}_2=\frac{\begin{vmatrix}e^t & 0\\ e^t & e^t/t\end{vmatrix}}{\Delta}, \quad \Delta=\begin{vmatrix}e^t & te^t\\ e^t & e^t+te^t\end{vmatrix}$$

Wronskian $\Delta = W[e^t, te^t] = \det\Phi$ שלב 3

$\Delta = e^{2t}$

מכאן

$\dot{\tilde{c}}_1 = -\frac{te^t\frac{e^t}{t}}{e^{2t}} = -1, \quad \tilde{c}_1 = \int_1^t (-1)\,dt = -t+1$

$\dot{\tilde{c}}_2 = \frac{e^t \cdot e^t/t}{e^{2t}} = \frac{1}{t}, \quad \tilde{c}_2 = \int_1^t \frac{1}{s}\,ds = \ln s\Big|_1^t = \ln t$

פתרון כללי:

$$\boxed{y = c_1e^t + c_2te^t + \underbrace{(1-t)e^t + \ln t\cdot te^t}_{y_p}}$$

נקיים תנאי ההתחלה: $y(1)=1, \ \dot{y}(1)=0$

נציב e

$$\begin{pmatrix} y(1) \\ \dot{y}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t+te^t \end{pmatrix}\Bigg|_{t=1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_p(1) \\ \dot{y}_p(1) \end{pmatrix}$$

$\to 0, \quad \vec{y}_p(1) = \Phi(1)\int_1^1 = 0$

$$e\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נקבל $c_1 = e^{-1}$

$c_1 + 2c_2 = 0 \quad c_2 = -\frac{1}{2}e^{-1}$

$$\boxed{y(t) = e^{t-1} - \frac{1}{2}te^{t-1} + (1-t)e^t + \ln t\cdot te^t}$$

פתרון לבעיית Cauchy

אי אפשר היה, לפתור בשיטת המקדמים הלא ידועים

כי הצד הימני אינו סכום של קוואזי פולינומים

תרגיל

110

$$\ddot{y} - 5\dot{y} + 6y = t + e^t, \quad y(0)=1, \ \dot{y}(0)=-1$$

מצא פתרון כללי

ופתרון לבעיית Couchy

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3), \quad \lambda_{1,2} = 2, 3$$

$$y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}, \quad y = y_h + y_p$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

1. שיטת המקדמים הבלתי ידועים:

מחפשים פתרון פרטי בצורה

$y_p = y_{p1} + y_{p2}$

$$y_{p_1} = d_1 + d_2 t, \quad y_{p_2} = d_3 e^t$$

(אין רזוננס)

$$\dot{y}_{p1} = d_2, \quad \dot{y}_{p2} = d_3 e^t$$

$$\ddot{y}_{p1} = 0, \quad \ddot{y}_{p2} = d_3 e^t$$

אחת אחת

מציבים y_{p1}, y_{p2}

$-5d_2 + 6d_1 = 0$

$$-5d_2 + 6(d_1 + d_2 t) = t \Rightarrow d_2 = \frac{1}{6}, \ d_1 = \frac{5}{6} d_2 = \frac{5}{36}$$

$$d_3 e^t \underbrace{(1 - 5 + 6)}_{2} = e^t, \quad d_3 = \frac{1}{2}$$

פתרון כללי!

$$\boxed{y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + \frac{5}{36} + \frac{1}{6} t + \frac{1}{6} e^t}$$

פתרון לבעיית קושי!

$$\dot{y} = 2c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{3t} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} e^t$$

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + \frac{5}{36} + \frac{1}{6} \\ 2c_1 + 3c_2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{36} \\ -1\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

כלל קרמר, $\Delta = 3-2=1$

111

$$C_1 = \begin{vmatrix} \frac{25}{36} & 1 \\ -\frac{4}{3} & 3 \end{vmatrix} = \frac{25}{12} + \frac{4}{3} = \ldots$$

$$C_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{25}{36} \\ 2 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = -\frac{4}{3} - \frac{25}{18} = \ldots$$

העיקרון בהתאם

2 סעיף ב' "וריאציית המקדמים"

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & 3e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_p = \Phi(t)\begin{pmatrix} \tilde{c}_1(t) \\ \tilde{c}_2(t) \end{pmatrix}$$

$$y_p = \tilde{c}_1 e^{2t} + \tilde{c}_2 e^{3t}$$

$$\Rightarrow \Phi \dot{\tilde{c}} = B$$

$$\begin{cases} e^{2t}\dot{\tilde{c}}_1 + e^{3t}\dot{\tilde{c}}_2 = 0 \\ 2e^{2t}\dot{\tilde{c}}_1 + 3e^{3t}\dot{\tilde{c}}_2 = t+e^t \end{cases}$$

$$\Delta = W = \det \Phi(t) = 3e^{5t} - 2e^{5t} = e^{5t}$$

כלל קרמר Kramer

$$\dot{\tilde{c}}_1 = e^{-5t}\begin{vmatrix} 0 & e^{3t} \\ t+e^t & 3e^{3t} \end{vmatrix} = -e^{-5t}e^{3t}(t+e^t) = -te^{-2t} - e^{-t}$$

$$\tilde{c}_1 = \int_0^t \left(-se^{-2s} - e^{-s}\right)ds = e^{-s}\Big|_0^t + \frac{1}{2}se^{-2s}\Big|_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-2s}ds$$

$$\tilde{c}_1 = e^{-t} - 1 + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}$$

$$\dot{\tilde{c}}_2 = e^{-5t}\begin{vmatrix} e^{2t} & 0 \\ 2e^{2t} & t+e^t \end{vmatrix} = e^{-3t}(t+e^t) = te^{-3t} + e^{-2t}$$

$$\tilde{c}_2 = \int_0^t \left(e^{-2s} + se^{-3s}\right)ds = -\frac{1}{2}e^{-2s}\Big|_0^t - \frac{1}{3}se^{-3s}\Big|_0^t + \frac{1}{3}\int_0^t e^{-3s}ds$$

$$\tilde{c}_2 = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}te^{-3t} - \frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{9}$$

פתרון כללי

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + \left(e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} - 1.25\right)e^{2t}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{9}e^{-3t} - \frac{1}{3}te^{-3t} + \frac{10}{18}\right)e^{3t}$$

$y_p(t)$

פותחים סוגריים...

~~אפשרות למציאה מחישוב היא ממשית~~

112

אם משנים $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ ערך ואינטגרלים לא מסויימים

אז נחפש לפתרון בעיית קושי

צריך גם לבצע y_p

בתנאים שלו $y_p(0) = \dot{y}_p(0) = 0$

פתרון לבעיית קושי:

$$\varphi(0)c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \underbrace{1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{\varphi(0)^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

הפתרון:

$$y = 4e^{2t} - 3e^{3t} + y_p(t)$$

הנוסחא מלמעלה

שימו לב שהפתרונות הפרטיים בשתי השיטות יוצאים **שונים**

כמובן הפתרון לבעיית קושי הוא יחיד וחייב להיות משותף לשתי השיטות

לבדוק את זה, לא גמרתי כל.

וורונסקיאן Wronskian

נזכיר שוורונסקיאן מוגדר עבור n פונקציות וקטוריות $\varphi_1,\dots,\varphi_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$

$$W[\varphi_1,\dots,\varphi_n](t)=\det\big(\varphi_1(t)\dots\varphi_n(t)\big)$$

עמודות

עבור n פונקציות סקלריות $f_1\dots f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$W[f_1,\dots,f_n](t)=\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \dots & f_n(t)\\ \dot f_1(t) & \dot f_2(t) & \dots & \dot f_n(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}$$

$$\underbrace{\quad}_{\varphi_1(t)}\quad\underbrace{\quad}_{\varphi_2(t)}\quad\underbrace{\quad}_{\varphi_n(t)}$$

$$\boxed{\Phi(t)=\big(\varphi_1(t)\dots\varphi_n(t)\big)}$$
נסמן

הגדרה (כבר הייתה) פונקציות וקטוריות $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ (סקלריות $f_1,f_2,\dots,f_n$)

נקראות תלויות לינארית

אם קיימים $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ לא כולם אפסים

$$(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\neq(0,0,\dots,0)$$

שעבורם

$$\lambda_1\varphi_1(t)+\lambda_2\varphi_2(t)+\dots+\lambda_n\varphi_n(t)\equiv 0$$ לכל t!

$$(\lambda_1 f_1(t)+\lambda_2 f_2(t)+\dots+\lambda_n f_n(t)\equiv 0$$ אם)

פונקציות נקראות בלתי תלויות לינארית אם הן לא תלויות לינארית

מסקנה אם וורונסקיאן לא אפס

כיוון 1 אז הפונקציות בלתי תלויות 114

הוכחה! צריך: פונקציות תלויות לינארית

$$\Rightarrow \exists(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) \neq (0,\dots,0)$$

$$\lambda_1\varphi_1(t)+\dots+\lambda_n\varphi_n(t)\equiv 0$$

$$\lambda_1 f_1(t)+\dots+\lambda_n f_n(t)\equiv 0 \Rightarrow \Phi(t)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}\equiv 0$$

בשני המקרים

$$\forall t \ \det\Phi(t)=0 \quad \Leftarrow$$

ההפוך

הכיוון לא נכון!

$$f_1(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ t^2, & t>0\end{cases}, \quad f_2(t)=\begin{cases}t^2, & t\le 0\\ 0, & t>0\end{cases}$$

ברור שהן בלתי תלויות

נניח

$$\lambda_1 f_1(t)+\lambda_2 f_2(t)\equiv 0$$

$$\lambda_1 f_1(1)+\lambda_2 f_2(1)=\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1=0$$

$$\lambda_1 f_1(-1)+\lambda_2 f_2(-1)=\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2=0$$

אבל

$$\Phi(t)=\begin{cases}\begin{pmatrix}0 & t^2\\ 0 & 2t\end{pmatrix}, & t\le 0\\ \begin{pmatrix}t^2 & 0\\ 2t & 0\end{pmatrix}, & t>0\end{cases} \Rightarrow \det\Phi(t)\equiv 0$$

$$\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}f_1 & f_2\\ \dot f_1 & \dot f_2\end{pmatrix}}$$

ראינו שאם $f_1,\dots,f_n$ מקיימות

כאשר

$$y\in\mathbb{R}, \quad y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\dots+a_n(t)y=0 \qquad a_1,a_2,\dots,a_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

רציפים

$$W[f_1\dots f_n](t)\equiv 0 \quad \text{אז}$$

$$W[f_1\dots f_n](t)\underset{t}{\neq} 0 \quad \text{לכל} \quad \text{או}$$

אותו דבר גם במקרה הלינארי
אם $\varphi_1 - \varphi_n$ מקיימות מערכת

$$\dot y = A(t)\, y \quad , \quad y \in \mathbb{R}^n$$

אז 1. $W[\varphi_1 \ldots \varphi_n](t) = 0$ לכל t

או 2. $W[\varphi_1 \ldots \varphi_n](t) \neq 0$ לכל t

<u>מסקנה:</u> הפונקציות f_1, f_2 שבענייננו
לא יכולות להיות פתרונות
לאף משוואה מסדר 2

$$\ddot y + a_1(t)\dot y + a_2(t) y = 0 \quad , \quad a_1, a_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
רציפות

באופן דומה הוכל ב $t=0$ נקבל
$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dot f_1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} f_2 \\ \dot f_2 \end{pmatrix}$$
הווקטורים הפונקציות
לא יכולות לקיים שום מערכת

$$\dot y = A(t)\, y \quad , \quad y \in \mathbb{R}^2$$
A רציפה במקרה כזה

<u>תזכורת</u> מטריצת Vandermonde

$$V(x_1 \ldots x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

<u>טענה</u>

$$\det V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
אם ורק אם
$i, j : i \neq j , x_i = x_j$ יש

(נכון גם מעל $\mathbb{C}$)

116

<u>הוכחה:</u>

$$P(\lambda) = (\lambda - x_1)\cdots(\lambda - x_n)$$

$P\left(\frac{d}{dt}\right)y = 0$, נניח כולם שונים, אז הפתרונות היסודיים הם

$$e^{x_1 t}, e^{x_2 t}, \ldots, e^{x_n t}$$

$$W[e^{x_1 t}, \ldots, e^{x_n t}] = \det\begin{pmatrix} e^{x_1 t} & & e^{x_n t} \\ x_1 e^{x_1 t} & & x_n e^{x_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} e^{x_1 t} & & x_n^{n-1} e^{x_n t} \end{pmatrix}$$

$$= e^{x_1 t} \cdots e^{x_n t} \det V(x_1 \ldots x_n) \neq 0$$

אם $x_i = x_j$ אז כמובן $\det V = 0$

<u>דוגמא</u>ות

$(*)$ $\cos t, t^2 \sin t, t\cos t$ בלתי תלויים

$(**)$ $\cos t, \sin t, \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ ב $\mathbb{R}$?

<u>פתרון:</u> $(*)$ - כולן מהמערכת יסודיים של המשוואה

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y = 0$$

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^3 \Rightarrow$$ ב"ת בלתי תלויים

$(**)$ לא בלתי תלויים כי

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos t - \sin\frac{\pi}{3}\sin t$$

$$= \frac{1}{2}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t$$

~~עוד דוגמא~~ גם הורונסקיאן ש $W[*](t)\neq 0$ בנקודה 117 דו

3 הפונקציות מלמעלה

בכל זאת יכול להיות ש $W[*](t)$

מתאפס בנקודות בודדות

כי הן לא פתרונות יסודיים למשוואה

מסדר 3

עוד דוגמא

$t\sin t,\ t^2\sin t$

בלתי תלויים לינארית כי הן חלק

של פתרונות יסודיים למשוואה

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+I_0\right)^3 y=0$$

$$y^{(6)}+3y^{(4)}+3\ddot{y}+y=0$$

אבל

$$W[t\sin t,\ t^2\sin t]\Big|_{t=0}=\det\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0$$

עוד דוגמא האם $t^2\sin t,\ e^t,\ \operatorname{arctg} t$

יכולים להיות פתרונות יסודיים של

מש"ד מסדר 3?

(עם מקדמים רציפים, מש"ד לינארי הומוגני)

תשובה: לא כי

$$W[t^2\sin t, e^t, \operatorname{arctg} t]\Big|_{t=0}=\det\begin{pmatrix}0&-&-\\0&-&-\\0&-&-\end{pmatrix}=0$$

כנראה, גם לא יכולים להיות פתרונות

בכלל. מספיק לבדוק $W(1)\neq 0$

ב Matlab

שאלה: נניח $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

($\mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$) גזירות ברציפות

ידוע $\forall t \quad W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t) \neq 0$

האם ישנה מטריצה רציפה $A(t)$, לכל t

כך ש $\varphi_1 \dots \varphi_n$ - פתרונות יסודיים

למשוואה ההומוגנית $\dot{y} = A(t) y$?

תשובה!

קיימת ויחידה

נניח

$$\dot{\varphi}_j(t) = A(t)\varphi_j(t)$$

אז $\Phi(t) = (\varphi_1(t) \dots \varphi_n(t))$ מטריצה יסודית, $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$

$$\Rightarrow A(t) = \dot{\Phi}\Phi^{-1}, \quad \det\Phi \neq 0$$

לכן Φ - מטריצה יסודית, $\dot{\Phi} = \underbrace{\dot{\Phi}\Phi^{-1}}_{A(t)}\Phi$

דוגמא

איזה מבין $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t+1 \end{pmatrix}$

יכולים להיות פתרונות יסודיים

למערכת מסוג $\dot{y} = A(t) y$, $y \in \mathbb{R}^2$?

A רציפה,

$$\det\begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix} = t^2 - 1, \quad W(1) = 0 \Rightarrow \text{לא יסודיים}$$

$$\det\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t+1 \end{pmatrix} = t^2 + t + 1 \neq 0 \Rightarrow \text{יסודיים}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t+1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{t^2+t+1}\begin{pmatrix} t+1 & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

119

שאלה: האם $f_1,\dots,f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חלקות

$f_1(t),\dots,f_n(t)$ יכולים להיות פתרונות יסודיים למשוואה מהסוג

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\dots+a_n(t)y=0\ ,\ a_1..a_n \text{ רציפים } ?$$

תשובה: אם ורק אם $W[f_1..f_n](t)\neq 0$ $\forall t$

הכיוון אחד כבר טריוויאלי

הפוך $W\neq 0$ נבנה משוואה

אם $f_1..f_n$ פתרונות יסודיים אז כל פתרון $y(t)$ אחר הוא צירוף לינארי שלהם

$$\Leftarrow\quad W(t)=W[y,f_1,\dots,f_n](t)\equiv 0$$

$$\det\begin{pmatrix} y & f_1 & f_n \\ y' & f_1' & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y^{(n)} & f_1^{(n)} & f_n^{(n)} \end{pmatrix}=0$$

כבר משוואה!

פותחים לפי עמודה הראשונה

$$(-1)^n y^{(n)} \underbrace{W(t)}_{\neq 0}+\dots=0$$

מנרמלים

תרגיל: איזה מהזוגות $(t,\operatorname{tg} t),\ (1,\operatorname{tg} t)$ יכול להיות זוג פתרונות יסודיים למשוואה

$$\ddot{y}+a_1(t)\dot{y}+a_2(t)y=0 \quad ?$$

$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $a_1,a_2\in C$

פתרון!
יכול! 120

$$W[1, tg\,t] = \begin{vmatrix} 1 & tg\,t \\ 0 & \frac{1}{\cos^2 t} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$W[t, tg\,t] = \begin{vmatrix} t & tg\,t \\ 1 & \frac{1}{\cos^2(t)} \end{vmatrix} = \frac{t}{\cos^2 t} - tg\,t \underset{t=0}{=} 0$$

לא יכול!

המשוו"א לפי ורונסקי!

$$\begin{vmatrix} y & 1 & tg\,t \\ \dot{y} & 0 & \frac{1}{\cos^2 t} \\ \ddot{y} & 0 & +\frac{2\sin t}{\cos^3 t} \end{vmatrix} = 0$$

עוד דוגמא מה היא המד"ר מסדר 2 ש $t+1, t+2$ הם פתרונות שלה?

$$W[t+2, t+1] = \begin{vmatrix} t+2 & t+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = t+2-(t+1) = 1$$

$\Rightarrow$ בת"לים

$$\begin{vmatrix} y & t+2 & t+1 \\ \dot{y} & 1 & 1 \\ \ddot{y} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ddot{y}\cdot 1 - \dot{y}\cdot 0 + y\cdot 0 = 0$$

$$\ddot{y} = 0$$

עוד דוגמא
תן דוגמה מד"ר שאלו...

$$\begin{vmatrix} \cancel{e^t} & 1 & \cos t & -\sin t \\ \cancel{2e^{2t}} & 2 & -\sin t & -\cos t \\ & 4 & -\cos t & \sin t \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall t$$

לינארית

$e^{2t}, \cos t, -\sin t$

מרוכבות

פתרונות יסודיים

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y = 0, \quad P(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^2+1)$$

דוגמא 121

~~$t \int de$~~ לפוכית

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \omega & -3 \\ -1 & 0 & \omega^2 & 9 \\ 0 & -1 & \omega^3 & -27 \end{pmatrix} = 0$$

$\underbrace{\qquad}_{A}$

שלמשוואה

אין שורשים

ממשיים

חוץ מ $\omega=-3$

הוכחה

$\cos t, \sin t, e^{\omega t}, e^{-3t}$

הם פתרונות יסודיים למשוואה

$P\left(\frac{d}{dt}\right)y=0$, $P(\lambda)=(\lambda^2+1)(\lambda-\omega)(\lambda+3)$

$$W=\det\begin{pmatrix} \cos t & \sin t & e^{\omega t} & e^{-3t} \\ -\sin t & \cos t & \omega e^{\omega t} & -3e^{-3t} \\ -\cos t & -\sin t & \omega^2 e^{\omega t} & 9e^{-3t} \\ \sin t & -\cos t & \omega^3 e^{\omega t} & -27e^{-3t} \end{pmatrix}=$$

$$=e^{(\omega-3)t}\det\begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 1 & 1 \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$W(0)=\cancel{e^{\omega\cdot 0}}\, 1\cdot \det A$

מ.ש.ל.