הרצאה 7, 01/12-2020

90

שיטת מקדמים לא ידועים

חזרה:

משוואה הומוגנית

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n \,, \quad a_j \in \mathbb{R}$$

קבועים

$y = y_h$ פתרון כללי

$$P(\lambda) = \dots \cdot (\lambda-\gamma)^m \cdot \dots \,, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

פירוק לגורמים פשוטים

$$(*) \quad y_h = \dots + e^{\gamma t}(c_1 + c_2 t + \dots + c_m t^{m-1}) + \dots$$

$$c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R} \qquad \boxed{L_{\gamma,m}}$$

פרמטרים חופשיים בלתי תלויים

(סך הכול n פרמטרים תמיד!)

$$P(\lambda) = \dots \cdot (\lambda-(\alpha+\beta i))(\lambda-(\alpha-\beta i))^m + \dots$$

$$(**) \quad y_h = \dots + e^{\alpha t}\left[\cos(\beta t)(c_1 + c_2 t + \dots + c_m t^{m-1}) + \sin(\beta t)(d_1 + d_2 t + \dots + d_m t^{m-1})\right] + \dots$$

$c_1, \dots, c_m, d_1, \dots, d_m \in \mathbb{R}$ - פרמטרים חופשיים בלתי תלויים

$$\boxed{L_{\alpha\pm\beta i,m}}$$

פורמולה (**) פורמליות מכילה (*)

במקרה פרטי כאשר $\beta=0$, $\alpha=\gamma$

מעל $\mathbb{C}$ (כאשר המקדמים $a_j \in \mathbb{R}$) אותן נוסחאות נשארות נכונות, רק הפרמטרים מרוכבים

מעל $\mathbb{C}$ כאשר גם $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$

רק נוסחה (*) נשארת רלוונטית (שימושית)

משוואה לא הומוגנית

$$p(\tfrac{d}{dt})y = b(t) = e^{\alpha t}[\cos(\beta t)(f_1+\dots+f_k t^{k-1}) + \sin(\beta t)(g_1+\dots+g_k t^{k-1})] \in L_{\alpha\pm\beta i,k}$$

$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\cancel{f_k, g_k}$

שני מקרים $\beta=0$, $\beta\neq0$ בצורה דומה.

אם יש שורש $p(\alpha+\beta i)=0 \Rightarrow$ רזוננס resonance

נניח m - ריבוי של השורש $\alpha\pm\beta i$

אנו מניחים ש $f_k\neq0$ או $g_k\neq0 \cdot \sin(\beta t)$

$$y = y_h + y_p$$

פתרון פרטי כללי

עובדה (לא נוכיח)

תמיד יש פתרון פרטי בצורה (קיים)

$$y_p = t^m e^{\alpha t}[\cos(\beta t)(\tilde f_1+\dots+\tilde f_k t^{k-1}) + \sin(\beta t)(\tilde g_1+\dots+\tilde g_k t^{k-1})]$$

$$\boxed{y_p \in t^m L_{\alpha\pm\beta i,k}}$$

אי אפשר לוותר על שום איבר כאן

דוגמא

$$p(\tfrac{d}{dt})y = y^{(7)}+2y^{(5)}+y^{(3)} = t^2+t\cos t+t+\sin t$$

$$p(\lambda)=\lambda^3(\lambda^2+1)^2=\lambda^7+2\lambda^5+\lambda^3$$

$$y = c_1+c_2t+c_3t^2+\cos t(c_4+c_5t)+\sin t(c_6+c_7t) + y_p$$

$c_1,\dots,c_7\in\mathbb{R}$ - פתרון הומוג'

$$y_p = t^3(d_1+d_2t+d_3t^2)+t^2[\cos t(d_4+d_5t)+\sin t(d_6+d_7t)]$$

$d_1,\dots,d_7\in\mathbb{R}$ - צריך למצוא!!

מערכת מד"ר וקטורים

$$\dot{y} = Ay + B(t) \quad , \quad y = y_h + y_p$$

פרטי

$$y_h = e^{At}C \quad , \quad C = y(0)$$

כ-דרך למערכת הומוגנית

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = y_1 - 3y_2 + 3y_3 \end{cases} = Ay \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

למצוא פתרון כללי ~~e^{At}~~

פתרון נכתוב את המערכת כמשוואה מסדר 3

$$\dddot{y}_1 - 3\ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 - y_1 = 0 \qquad y_2 = \dot{y}_1 , \ y_3 = \ddot{y}_1$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t \\ (c_1 + c_2)e^t + (c_2 + 2c_3)te^t + c_3 t^2 e^t \\ (c_1 + 2c_2 + 2c_3)e^t + (c_2 + 4c_3)te^t + c_3 t^2 e^t \end{pmatrix}$$

פתרון כללי

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = -y_2 \end{cases} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}^{A} y$$

למצוא e^{At}

1. פר' - לא [illegible]

2. [illegible] נגזרת

$$\dddot{y}_1 + \dot{y}_1 = 0 \qquad \underbrace{\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^3 + \frac{d}{dt}\right] y_1 = 0}_{\parallel}$$

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda^2+1) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2}{dt^2} + I_0\right) y_1 = 0$$

$$y_1 = y_1 = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t$$

$$\dot{y}_1 = y_2 = 0 - c_2 \sin t + c_3 \cos t$$

$$\ddot{y}_1 = y_3 = 0 - c_2 \cos t \cancel{+} c_3 \sin t$$

נציב $t=0$ ונקבל

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= y_1(0) \\ c_3 &= y_2(0) \\ -c_2 - c_3 &= y_3(0) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_1 &= y_1(0)+y_2(0)+y_3(0) \\ \\ c_2 &= -y_2(0)-y_3(0) \end{aligned}$$

נציב

$$y_1 = y_1(0)+y_2(0)+y_3(0) - y_2(0)\cos t - y_3(0)\cos t + y_2(0)\sin t$$

$$y_2 = (y_2(0)+y_3(0))\sin t + y_2(0)\cos t$$

$$y_3 = y_2(0)\cos t + y_3(0)\cos t - y_2(0)\sin t$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1-\cos t+\sin t & 1-\cos t \\ 0 & \sin t + \cos t & \sin t \\ 0 & \cos t - \sin t & \cos t \end{pmatrix}}_{e^{At}} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix}$$

דוגמא

$$\begin{cases}\dot y_1 = y_2 \\ \dot y_2 = -y_1\end{cases} \iff \ddot y_1 + y_1 = 0$$

$$y_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

$$\dot y_1 = y_2 = c_1(-\sin t) + c_2(\cos t)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}}_{\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} t\right)}\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}$$

— כבר חישבנו בפרק אחר!

דוגמא

לפתור מע"ד קודם

$$\begin{pmatrix} \dot y_1 \\ \dot y_2 \\ \dot y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

פתרון!

$$y(t) = e^{At} y(0) = \begin{pmatrix} e^{5t}, & 0, & 0 \\ 0, & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

מערכת לא הומוגנית

שיטת מקדמים בלתי ידועים

$$\dot y = Ay + B(t), \quad y = y_h + y_p = e^{At}c + y_p(t)$$

$$c = y(0)$$

$$y \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

כל עמודה, מאופן למשוואה אחת
אבל עם מקדמים וקטוריים

$$B(t) = e^{\alpha t}\Big[\cos(\beta t)\left(f_1 + f_2 t + \dots + f_k t^{k-1}\right) + \sin(\beta t)\left(g_1 + g_2 t + \dots + g_k t^{k-1}\right)\Big] \in \vec{L}_{\alpha\pm\beta i, k}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\boxed{f_k \neq 0 \text{ או } \sin\beta t\, g_k \neq 0}$

$f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_k \in \mathbb{R}^n$

$\alpha+\beta i, \alpha-\beta i$ ערכים עצמיים
ושורשים של הפולינום האופייני מריבוי m

multiplicity , characteristic polynomial , eigenvalues roots

פתרון | (כל) גמיש דיים בצורה,

$$y_p(t) = e^{\alpha t}\Big[\cos(\beta t)\left(\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 t + \dots + \tilde{f}_{k+m} t^{k+m-1}\right) + \sin(\beta t)\left(\tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 t + \dots + \tilde{g}_{k+m} t^{k+m-1}\right)\Big]$$

$\boxed{y_p \in \vec{L}_{\alpha\pm\beta i, k+m}}$

אי אפשר לגדל
על שום איבר כנ

| לכן, לא פתרון

דוגמא

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{5t} \\ t + t\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$y = y_h + y_p = \underbrace{e^{At} C}_{\text{כבר היה}} + y_p$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda^2 + 1) \quad (= -\det(A - \lambda I))$$

$$y_p = d_1 + d_2 t + e^{5t}(d_1 + d_2 t) + \cos t\,(d_3 + d_4 t + d_5 t^2) + \sin t\,(d_6 + d_7 t + d_8 t^2)$$

$d_1, \dots, d_8 \in \mathbb{R}^3$
צריך למצוא אותם!

למצוא 3·8=24 פרמטרים קשה

קל לראות שמתוך 24 מספרים האילה

יש רק 3 בלתי תלויים, ואחרים מתבטאים

ע"י ערכם

קשה מאוד

נעבור את כל הדרך בעוצמא

המאמץ

<u>עוצמא</u>

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$$

$y = y_h + y_p$, $P(\lambda) = \lambda^2 + (2-2)\lambda - 4 + 3 = \lambda^2 - 1$

ערכים עצמיים: $\lambda = 1, -1$

$$\lambda = 1 \quad \begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ 3 & -2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \quad y_1 - y_2 = 0 \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1 \quad \begin{pmatrix} 2+1 & -1 \\ 3 & -2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \quad 3y_1 - y_2 = 0 \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$y_h = c_1 e_1 e^t + c_2 e_2 e^{-t}$$

~~90~~

97

$$y_h = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{-t}$$

$$B(t) = \begin{pmatrix}e^{t}\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{t}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix} \in \underset{\text{רזוננס}}{\vec{L}_{1,1}} + \vec{L}_{0,2}$$

$$y_p = y_{p1} + y_{p2}, \quad y_{p1} \in \vec{L}_{1,2}, \quad y_{p2} \in \vec{L}_{0,2}$$

$$y_{p1} = \begin{pmatrix}d_1 + d_2 t\\ f_1 + f_2 t\end{pmatrix}e^{t}, \quad y_{p2} = \begin{pmatrix}d_3 + d_4 t\\ f_3 + f_4 t\end{pmatrix}$$

$$\dot{y}_{p1} = \begin{pmatrix}d_1 + d_2 + d_2 t\\ f_1 + f_2 + f_2 t\end{pmatrix}e^{t}, \quad \dot{y}_{p2} = \begin{pmatrix}d_4\\ f_4\end{pmatrix}$$

מציבים y_{p1} ומקבלים

$$e^{t}\begin{pmatrix}d_1 + d_2 + d_2 t\\ f_1 + f_2 + f_2 t\end{pmatrix} = e^{t}\begin{pmatrix}2(d_1 + d_2 t) - (f_1 + f_2 t)\\ 3(d_1 + d_2 t) - 2(f_1 + f_2 t)\end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} d_1 + d_2 + d_2 t = 2d_1 - f_1 + 1 + (2d_2 - f_2)t \\ f_1 + f_2 + f_2 t = 3d_1 - 2f_1 + (3d_2 - 2f_2)t \end{cases}$$

$$t^0 \begin{cases} d_1 + d_2 = 2d_1 - f_1 + 1 \\ f_1 + f_2 = 3d_1 - 2f_1 \end{cases} \qquad t \begin{cases} d_2 = 2d_2 - f_2 \\ f_2 = 3d_2 - 2f_2 \end{cases}$$

$$-d_1 + d_2 + f_1 = 1$$

$$-d_2 + f_2 = 0 \Rightarrow d_2 = f_2$$

$$-3d_1 + 3f_1 + f_2 = 0$$

$$-3d_2 + 3f_2 = 0 \Rightarrow d_2 = f_2$$

$$*(-3)\begin{cases} -d_1 + d_2 + f_1 = 1 \\ -3d_1 + d_2 + 3f_1 = 0 \end{cases}$$

אך מקבלים

$$\begin{cases} 3f_1 + f_2 = 0 \\ d_2 = f_2 \end{cases}$$

$$-2d_2 = -3, \quad f_2 = d_2 = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} -d_1 + f_1 = -\frac{1}{2} \\ -d_1 + f_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad f_1 = 0, \quad d_1 = \frac{1}{2}$$

שיוויון!

אך

$$\boxed{y_{p1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \\ \frac{3}{2}t \end{pmatrix} e^t}$$

קיבלנו

$$y_{p2} = \begin{pmatrix} d_3 + d_4 t \\ f_3 + f_4 t \end{pmatrix}$$

מציבים

$$\begin{pmatrix} d_4 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(d_3 + d_4 t) - (f_3 + f_4 t) \\ 3(d_3 + d_4 t) - 2(f_3 + f_4 t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

מקבלים

בצורה דומה (: מקבלים

$$y_{p2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - t \\ \frac{5}{4} - 2t \end{pmatrix}$$

פתרון כללי:

$$y = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \\ \frac{3}{2}t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + t \\ \frac{5}{4} + 2t \end{pmatrix}$$

, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(או $\mathbb{C}$
מעל $\mathbb{C}$)

דוגמא 99

$$\dot{y} = Ay + B(t), \quad y \in \mathbb{R}^5$$

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2$$

כאילו
צריך
מספיק
? | [illegible]
[illegible]

$$B(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ t \\ e^t \\ t^2 \\ e^t \sin t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \vec{L}_{\pm i,1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \vec{L}_{0,3}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \vec{L}_{1,1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-t}\sin t \end{pmatrix}}_{\in \vec{L}_{-1\pm i,1}}$$

שורשים	1	$-1 \pm i$
ריבוי	1	2

$\cancel{y_p = y_p}$

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3} + y_{p4}$$

$$y_{p1} = \vec{d}_1 \cos t + \vec{d}_2 \sin t$$ אין רזוננס

$$y_{p2} = \vec{d}_3 + \vec{d}_4 t + \vec{d}_5 t^2$$ אין רזוננס

$$y_{p3} = e^t(\vec{d}_6 + \vec{d}_7 t) \in \vec{L}_{1,2}$$ יש רזוננס

במקרה סקלרי לא היה מופיע

$$y_{p4} = e^{-t}\left[\cos t\,(\vec{d}_8 + \vec{d}_9 t + \vec{d}_{10} t^2) + \sin t\,(\vec{d}_{11} + \vec{d}_{12} t + \vec{d}_{13} t^2)\right] \in \vec{L}_{-1\pm i,3}$$ רזוננס

סך הכול צריך למצוא $5 \cdot 13 = 65$ מספרים !!

~~93~~ 100

תרגיל: למצוא פתרון כללי למערכת

$y \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 + e^t \\ \dot{y}_3 = \cancel{2} - y_1 - \cancel{3} y_2 - 3y_3 \end{cases}$$

פתרון סטנדרטי כמובן עובד פה, אבל e צריך אחרת, נסיון על כלל e (היינו e^t) מקבלים מערכת הומוגנית במקרה 8

$$\ddot{y}_1 = -y_1 - 2\dot{y}_1$$

$$\dddot{y}_1 + \cancel{2}\ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + y_1 = 0 \qquad y_1 = e^{-t}[c_1 + c_2 t + c_3 t^2]$$

$$y_2 = \dot{y}_1, \; y_3 = \ddot{y}_1$$

נחליף קואורדינטות!

$$\tilde{y}_3 = y_3 + e^t,$$

$$\dot{\tilde{y}}_3 = \dot{y}_3 + e^t, \; \cancel{\dot{y}_3}$$

(קצת) SK

$$\dot{y}_1 = y_2, \; \dot{y}_2 = \tilde{y}_3 = \ddot{y}_1$$

$$\dot{\tilde{y}}_3 = -y_1 - 3y_2 \underbrace{- 3\tilde{y}_3 + 3e^t}_{-3y_3} + e^t$$

$$\dddot{y}_1 + 3\ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + y_1 = 4e^t \qquad 1ס$$

$$y_1 = e^{-t}(c_1 + c_2 t + c_3 t^2) + y_p$$

$$y_p = de^t \qquad ניחוש א'$$

מציבים

$$d(1+3+3+1)e^t = 4e^t \qquad d = \frac{1}{2}$$

[illegible] ~~96~~ 101

$$y_1 = e^{-t}(c_1 + c_2 t + c_3 t^2) + \frac{1}{2}e^t$$

$$y_2 = \dot{y}_1 = e^{-t}(c_2 + 2c_3 t - c_1 - c_2 t - c_3 t^2) + \frac{1}{2}e^t$$

$$= e^{-t}(c_2 - c_1 + (2c_3 - c_2)t - c_3 t^2) + \frac{1}{2}e^t$$

$$y_3 = \tilde{y}_3 - e^t = \ddot{y}_1 - e^t =$$

$$= e^{-t}(2c_3 - c_2 - 2c_3 t - c_2 + c_1 - (2c_3 - c_2)t + c_3 t^2) + \frac{1}{2}e^t - e^t$$

תרגיל א

$$\dot{y} = Ay + B(t), \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)z = b(t), \quad y \in \mathbb{R}^7, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$-\det(A - \lambda I) = P(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)(\lambda^2+4\lambda+5)^2$$

y' [illegible]

$$b(t) = te^{-t} + t + e^{-2t}\sin t + te^{t} + 1 - te^{-2t}\sin t$$

[illegible]

פתרון!

$$z_p(t) = (d_1 + d_2 t)e^t + te^{-t}(d_3 + d_4 t)$$

אין תהודה $\quad m=1$ תהודה

$$+ t^2(d_5 + d_6 t) + t^2 e^{-2t}\left[\cos t(d_7 + d_8 t) + \sin t(d_9 + d_{10} t)\right]$$

$m=2$ תהודה $\quad m=2$ תהודה

$d_1, \ldots, d_{10} \in \mathbb{R}$

[illegible]

$\vec{f}_i \in \mathbb{R}^7$

$$y_p(t) = (\vec{f}_1 + \vec{f}_2 t)e^t + e^{-t}(\vec{f}_3 + \vec{f}_4 t + \vec{f}_5 t^2) + \vec{f}_6 + \vec{f}_7 t + \vec{f}_8 t^2 + \vec{f}_9 t^3$$
$$+ e^{-2t}\left[\cos t(\vec{f}_{10} + \vec{f}_{11} t + \vec{f}_{12} t^2 + \vec{f}_{14} t^3) + \sin t(\vec{f}_{15} + \ldots + \vec{f}_{19} t^3)\right]$$

שיטת מקדמים משתנים

$$\dot{y} = A(t)y + B(t), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad A, B$$
רציפים

$y_h = \Phi(t)C$ נניח ידוע פתרון

$C \in \mathbb{R}^n$ · פרמטר "וקטור" קבוע

~~מתפס~~ במילים אחרות

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t) \ldots \varphi_n(t)), \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$
עמודות

$$y_h(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t)$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ – מהווים בסיס של פתרונות למע' ההומוגנית ⇐ פתרונות יסודיים

fundamental solutions

⇐ הם בלתי תלויים

Wronskian

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n](t) = \det \Phi(t) \neq 0$$
בכל t לא מתאים

$\Phi(t)$ נקראת מטריצה יסודית

fundamental matrix

היא תמיד הפיכה וגזירה

השיטה

$$y = y_h + y_p = \Phi(t)C + y_p(t)$$
מחפשים y_p בצורה

$$y_p(t) = \Phi(t)\tilde{C}(t), \quad \tilde{C}(t)$$
– פונקציה וקטורית גזירה

103 ג. תכונה חשובה של מטריצה יסודית

$$\dot{\varphi}_j = A(t)\varphi_j, \quad j = 1,2,\dots,n$$

$$\Rightarrow \dot{\Phi} = (\dot{\varphi}_1 \dots \dot{\varphi}_n) = ((A\varphi_1) \dots (A\varphi_n)) = A\Phi$$

עמודות

$$\boxed{\dot{\Phi} = A(t)\Phi}$$

מציבים $y_p = \Phi(t)\tilde{C}(t)$ ומקבלים

$$(\Phi\tilde{C})^{\cdot} = A\Phi\tilde{C} + B$$

$$\Phi\dot{\tilde{C}} + \dot{\Phi}\tilde{C} = A\Phi\tilde{C} + B$$

$$\Phi\dot{\tilde{C}} + \cancel{A\Phi\tilde{C}} = \cancel{A\Phi\tilde{C}} + B$$

הפיכה

$$\Phi\dot{\tilde{C}} = B$$

$$\dot{\tilde{C}}(t) = \Phi(t)^{-1}B(t)$$

$$\boxed{\tilde{C}(t) = \int_{t_0}^{t}\Phi(t)^{-1}B(t)\,dt}$$ פונקציה אחת

אינטגרל של כל איבר המטריצה מתאים לאינטגרל

תשובה: ללא צורות תקינות

$$y = \underbrace{\Phi(t)C}_{y_h} + \underbrace{\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(s)^{-1}B(s)\,ds}_{y_p}$$

$y(t_0) = \xi$ תנאי התחלה:

$$\Phi(t_0)C + 0 = \xi \Rightarrow C = \Phi(t_0)^{-1}\xi$$

משוואות וקטוריות   <u>דוגמא</u>   104

$$\begin{pmatrix} \dot y_1 \\ \dot y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$$

$y_1(0)=0$

$y_2(0)=2$

(כלל ה״נ, קיים)

$$y = y_h + y_p$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1, \quad \lambda_{1,2} = 1, -1$$

$$\lambda = 1, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = -1, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$y_h = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

מטריצה יסודית, Φ, $\Phi(t) \neq e^{At}$ כי

$y_h \neq \Phi(t) y_h(0) \quad (\Leftarrow \Phi(0) \neq I$

כמו $e^{A \cdot 0} = I$)

מחפשים פתרון פרטי בעזרת

$$y_p = \Phi(t)\tilde c(t) \Rightarrow \Phi \dot{\tilde c} + \cancel{\dot\Phi \tilde c} = \cancel{A\Phi\tilde c} + B$$

$$\dot\Phi \tilde c = A\Phi\tilde c$$

$$\dot{\tilde c} = \Phi^{-1} B$$

$$y_p = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde c_1(t) \\ \tilde c_2(t) \end{pmatrix}$$ אז מחפשים

מחליפים

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde c}_1 \\ \dot{\tilde c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\dot{\tilde c}_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} t e^{-t}$$

$$\dot{\tilde c}_2 = -\frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} t e^t$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

$$\tilde{c}_1 = \int_0^t \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} s e^{-s}\right) ds = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}\left[s e^{-s}\Big|_0^t - \int_0^t e^{-s} ds\right]$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t}$$

105

$$\tilde{c}_2 = \frac{1}{2}\int_0^t \left(s e^{s} - e^{2s}\right) ds = -\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} s e^{s}\Big|_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t e^{s} ds$$

$$\tilde{C}_2 = -\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}te^{t} - \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}te^{t} + \frac{3}{4}$$

$$y = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix}e^{t} & e^{-t}\\ e^{t} & 3e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t}\\ \frac{3}{4} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{t} - \frac{1}{2}e^{t}\end{pmatrix}$$

$$y = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix}\frac{3}{4}te^{t} - \frac{3}{4}e^{t} + \frac{3}{4}e^{-t} + t\\ \frac{3}{2}te^{t} - \frac{5}{4}e^{t} + \frac{9}{4}e^{-t} + 2t - 1\end{pmatrix}$$

לבעיה הומוגני

חלק משותף

נכון? הוכללו!

$$y(0) = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \quad \Phi(0)C + \underbrace{0}_{y_p(0)} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}e^{0} & e^{0}\\ e^{0} & 3e^{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

שיטת המקדמים הלא ידועים קלה יותר!