הרצאה 5, 17/11-2020 56

מסקנה ⇐

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(t_0) = \xi \end{cases} \Rightarrow y = e^{A(t-t_0)}\xi$$

הוכחה

$$y(t_0) = e^{0}\xi = \xi$$

$$\dot{y} = Ae^{A(t-t_0)}\xi = Ay$$

נראה למשל איך לחשב אקספוננטים,

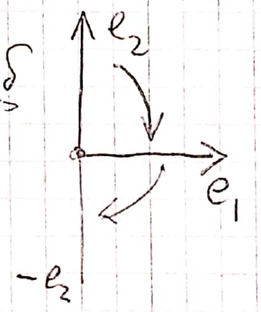
דוגמה

$$\dot{y} = Jy, \quad y \in \mathbb{R}^2$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

מטריצת ← סיבוב

סיבוב ב-90° לכיוון השעון

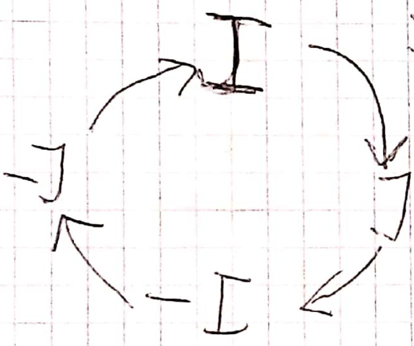


$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -e_2$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

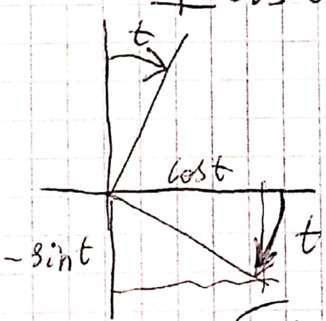
מתגלגל ב J



$$e^{Jt} = I + \frac{J}{1!}t + \frac{J^2}{2!}t^2 + \frac{J^3}{3!}t^3 + \dots$$

$$e^{Jt} = I\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots\right) + J\left(\frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right)$$

$$e^{Jt} = I\cos t + J\sin t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$



סיבוב בזווית t

אם נמשיך עוד, עוד מעגל

בצורה פשוטה יותר

זולעון

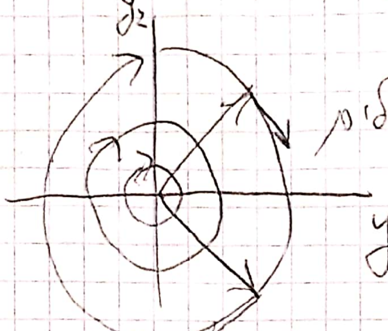
57

$$\begin{pmatrix} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{At} y(0) = e^{At} C = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$



פתרונות הם מעגלים

$$\|Jy\| = \|y\| \ , \ \langle y, Jy \rangle$$
$$= (y_1, y_2)\begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix} = y_1 y_2 - y_2 y_1 = 0$$

משפט

הוכחה:

$$e^B = K e^A K^{-1} \Leftarrow B = KAK^{-1}$$

מטריצות דומות

$$e^B = I + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \dots = KIK^{-1} + K\frac{A}{1!}K^{-1} + \dots = Ke^A K^{-1}$$

$$\underbrace{KA\cancel{K^{-1}}\cancel{K}AK^{-1} \dots \cancel{K}AK^{-1}}_{m \text{ פעמים}} = KA^m K^{-1}$$

מ.ש.ל.

Jordan צורת

תזכורת ווקטורים עצמיים,

$$Ae = \lambda e, \quad e \neq 0 \quad \Rightarrow$$ וקטור - e עצמי

$$(A - \lambda I)e = 0$$

אם יש בסיס

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \Leftarrow e \neq 0$$

פולינום אופייני

נניח שיש בסיס מווקטורים עצמיים

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1, \ Ae_2 = \lambda_2 e_2, \dots, Ae_n = \lambda_n e_n, \ \lambda_k \in \mathbb{R}$$

$$A(e_1 e_2 \dots e_n) = \big((\lambda_1 e_1)(\lambda_2 e_2) \dots (\lambda_n e_n)\big) = E\Lambda$$

E עצמיות

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

קיבלנו

$$AE = \cancel{\lambda} E\Lambda$$

$$A = E\Lambda E^{-1}$$

$$e^{At} = E e^{\Lambda t} E^{-1}$$

$$\dot{y} = Ay, \quad y = e^{A(t-t_0)} y(t_0) =$$

$$= [e_1\ e_2 \dots e_n] \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{pmatrix} \underbrace{E^{-1} y(t_0)}_{C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}} =$$

$$= \left[(e_1) e^{\lambda_1(t-t_0)}, \dots, \underbrace{(e_n)}_{\text{עמודה,}} e^{\lambda_n(t-t_0)} \right] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} e_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n(t-t_0)} e_n$$

<u>דוגמא</u>

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 3y_1 - y_2 \\ \dot{y}_2 = 4y_1 - 2y_2 \end{cases} \qquad \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(-2-\lambda) - (-1)\cdot 4 = \lambda^2 - \lambda - 2 =$$
$$= (\lambda-2)(\lambda+1)$$

$$\lambda = 2 \quad \begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ 4 & -2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad y_1 - y_2 = 0 \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1 \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad 4y_1 - y_2 = 0 \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$4y_1 = y_2$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-t} \qquad (t_0 = 0)$$

[illegible]

אותה, מערכת $\dot{y} = Ay$, $y\in\mathbb{R}^n$

מחפשים פתרון בצורה $y = v e^{\lambda t}$, $v\in\mathbb{R}^n$, $\dot{y} = \lambda v e^{\lambda t}$

מציבים

$$\lambda v e^{\lambda t} = A v e^{\lambda t} \Rightarrow Av = \lambda v$$

v וקטור עצמי

מוצאים n וקטורים עצמיים בלתי תלויים

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$e_1, e_2, \dots, e_n$

$\lambda_1 \dots \lambda_n$ ערכים עצמיים לא בהכרח שונים

$\Leftarrow$ $\varphi_1 = e_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \varphi_n = e_n e^{\lambda_n t}$

בלתי תלויים כי גם ב-$t=0$ הם בלתי תלויים

$\Leftarrow$ הפתרון הכללי הוא

$$y = c_1 e_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e_n e^{\lambda_n t}$$

אותה נוספת

דוגמא אותה מערכת

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 3y_1 - y_2 \\ \dot{y}_2 = 4y_1 - 2y_2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$, $\lambda_{1,2} = 2, -1$ ערכים עצמיים

וקטורים עצמיים $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftarrow$ אותה נוספת

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-t}$$

תכונה נוספת של אקספוננט,

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad , \quad a,b \in \mathbb{R} \ (\text{או } \mathbb{C})$$

כן, לא נכון למטריצות אבל ~~...~~

<u>משפט</u> $\quad AB = BA \quad A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$$

הוכחה מילה-במילה כמו למספרים

הודות לאפשרות להשתמש ב $AB=BA$

<u>דוגמא</u>

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha y_1 + \beta y_2 \\ -\beta y_1 + \alpha y_2 \end{pmatrix}$$

$$IJ = JI$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{At} y(0) = e^{(\alpha I + \beta J)t} y(0) =$$

$$= e^{\alpha I t} e^{\beta J t} y(0) = \exp\begin{pmatrix} \alpha t & 0 \\ 0 & \alpha t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} y(0)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} y(0) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} y(0)$$

סיבוב ב βt
בכיוון השעון

$$y(t) = \rho \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

אם
קואורדינטות
קוטביות

$$y(0) = \rho(0) \begin{pmatrix} \cos\theta(0) \\ \sin\theta(0) \end{pmatrix}$$

אז

$$y(t) = \rho(0) e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\theta(0) - \beta t) \\ \sin(\theta(0) - \beta t) \end{pmatrix}$$

דוגמא

$$\dot y_1 = +8y_1 - 5y_2 \qquad A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\dot y_2 = 6y_1 - 3y_2$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -5 \\ 6 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(A-\lambda I)y = 0 \qquad = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

$\lambda = 2$ $\quad 6y_1 - 5y_2 = 0 \quad 6y_1 = 5y_2 \quad e_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\quad 6y_1 - 5y_2 = 0$

$\lambda = 3$ $\quad 5y_1 - 5y_2 = 0 \quad y_1 = y_2 \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\quad 3y_1 - 3y_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

הפתרון הכללי:

התאוריה נכונה גם מעל $\mathbb{C}$ (מספרים מרוכבים)

$$\dot y = Ay, \quad y \in \mathbb{C}^n, \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ - מרוכבים

$y = c_1 e_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e_n e^{\lambda_n t}$, $\quad e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{C}^n$ - וקטורים עצמיים

הערה, אני משתמש ב $e_1, e_2, \dots, e_n$
לסמן וקטורים עצמיים
כאשר $e = 2.81..$ זה מספר אחר
~~אכ~~ אקספוננטה

אז מה לעשות כאשר

$\dot y = Ay, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ערכים עצמיים מרוכבים?

מקרה של ערכים עצמיים מרוכבים

$$\dot y = Ay$$

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $y\in\mathbb{C}$

$\lambda_* \in \mathbb{C}$ -וקטור

$e_* \in \mathbb{C}^n$ עצמי

$$\bar{\dot y} = \bar A \bar y = A\bar y \qquad \bar A = A$$

~~אם y פתרון אז גם ȳ פתרון~~

~~$Ae_* = \lambda A e_*$, $y_* \in \mathbb{C}$~~

$$y = \text{Re}\,y + i\,\text{Im}\,y, \quad \bar y = \text{Re}\,y - i\,\text{Im}\,y$$

חלק ממשי   חלק מדומה

$$\text{Re}\,y = \frac12(y+\bar y), \quad \text{Im}\,y = \frac{1}{2i}(y-\bar y)$$

לכן אם A ממשית אז $\text{Re}\,y$ ו-$\text{Im}\,y$ גם פתרונות

נניח $\lambda=\alpha+\beta i$ - ערך עצמי של A

אז $\bar\lambda=\alpha-\beta i$ - גם ערך עצמי

λ: $\quad Ae_* = \lambda e_*$

$\bar\lambda$: $\quad A\bar e_* = \overline{Ae_*} = \cancel{\overline{Ae_*}} = A\bar e_*$

$$y_* = e_* e^{\lambda t}$$

פתרון מתאים לערך עצמי λ

$$\bar y_* = \bar e_* e^{\bar\lambda t}$$

מתאים ל-$\bar\lambda$

$$\text{Re}\,y_* = \text{Re}\,\bar y_*, \quad \text{Im}\,y_* = -\text{Im}\,\bar y_*$$

פתרונות ממשיים

כל הפתרונות המתאימים ל $\alpha \pm \beta i$
הם צירופים לינאריים של

$$C_1 \, Re\left(e_* e^{\alpha+\beta i}\right) + C_2 \, Im\left(e_* e^{\alpha+\beta i}\right)$$

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 - 5y_2 \\ \dot{y}_2 = 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 9$

$\lambda_{1,2} = \pm 3i$

״וקטור עצמי

$\lambda = 3i$

$$\left.\begin{aligned} &(1-3i)y_1 - 5y_2 = 0 \\ \text{מיותר} \quad &2y_1 + (-1-3i)y_2 = 0 \end{aligned}\right] \to (1-3i)y_1 = 5y_2 \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix}$$

בדיקה (נכפיל)
משוואה ראשונה ב $1-3i$:

$$\boxed{2(1-3i)y_1 + (-10)y_2 = 0}$$

פתרון מרוכב:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix} e^{3it}}_{\text{מתאים ל } \lambda = 3i} + \underbrace{C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix} e^{-3it}}_{\text{מתאים ל } \lambda = -3i} \quad \boxed{C_1, C_2 \in \mathbb{C} \text{ מרוכבים}}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix} e^{3it} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix} (\cos(3t) + i\sin(3t)) =$$

$$= \begin{pmatrix} 5\cos(3t) \\ \cos(3t) + 3\sin(3t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 5\sin(3t) \\ -3\cos(3t) + \sin(3t) \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי הממשי

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 5\cos(3t) \\ \cos(3t) + 3\sin(3t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ -3\cos(3t) + \sin(3t) \end{pmatrix}$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

אותם פתרונות כמובן גם פתרונות
מעל $\mathbb{C}$

לכן פתרון כללי מעל $\mathbb{C}$ מתקבל ל-
$C_1, C_2 \in \mathbb{C}$
כך כל הפתרונות.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 3y_1 - y_2 \\ \dot{y}_2 = 2y_1 + y_2 \end{cases}$$

תזכורת

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda-2)^2 + 1$$
$$= (\lambda - 2 + i)(\lambda - 2 - i)$$

נוסחה שימושית

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + (-\alpha - \delta)\lambda + (\alpha\delta - \beta\gamma)$$

$$\lambda_1 = 2 - i \quad (1+i)y_1 - y_2 = 0 \quad (1+i)y_1 = y_2 \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2-i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \left(e^{2t}\cos t - ie^{2t}\sin t \right)$$
$$= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + ie^{2t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}$$

הכפלנו ב $(-i)$

מעל $\mathbb{R}$: $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

מעל $\mathbb{C}$: $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

צורה אחרת (פשוטה!) מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

הפיתרון, $\dot{y} = Ay \Rightarrow y(t) = e^{At} y(0)$

היא כללי, אבל לחישוב e^{At}

נוחים לעבור לצורה מדרגה

$$A = K \Lambda K^{-1}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \boxed{\Lambda_1} & & & \\ & \boxed{\Lambda_2} & & \\ & & \boxed{\cdot} & \\ & & & \boxed{\cdot} \end{pmatrix}$$

Lambda

בלוקים

מלוכסנים

$$e^{At} = K e^{\Lambda t} K^{-1} = K \begin{pmatrix} e^{\Lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\Lambda_k t} \end{pmatrix} K^{-1}$$

בפועל מגון, כאשר יש n וקטורים עצמיים בלתי תלויים, אז

$$e^{At} = E^{-1} e^{\Lambda t} E, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$E = (e_1\, e_2 \ldots e_n)$$

לא מקורס שלנו	במקרה הכללי מגיעים בצורת Jordan

יש מקרה חשוב אחד כאשר
מביאים פתרון הופכת לבעיה במציאות

מד"ר הומוגניות ליניאריות
אוטונומי

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\dots+a_n y=0 \qquad a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{R}$$

$$y:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y=?$$

$y_0=y$
$y_k=y^{(k)}$

כרגיל אפשר לרשום אותה כ

$$\begin{cases} \dot y_0=y_1 \\ \dot y_1=y_2 \\ \vdots \\ \dot y_{n-1}=-a_n y_0-a_{n-1}y_1 \dots -a_1 y_{n-1} \end{cases} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ 0 & & & \\ -a_n & \dots & & -a_1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1}\end{pmatrix}$$

פתרונות של המשוואות
כאלה הם סכומים של פונקציות
מהסוג

$$e^{\lambda t}(c_1 t^k+c_2 t^{k-1}+\dots+c_{k+1}\underbrace{t^0}_{=1})\in L_{\lambda,k+1}$$

הסימון
לא סופר(ערכי)
אין סופר(ערכי)

קוואזי-פולינום המתאים לערך עצמי λ
מסדר k

הפתרון כמובן הוא בצורה

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ \dot y(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{e^{At}}_{\text{אקספוננציאל}} \underbrace{\begin{pmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}}_{\text{מקדמים}}$$

(66) טענה (משפט?)

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=(-1)^n\det(\lambda I-A)=$$
$$=(-1)^n\left(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n\right)$$

הוכחה: לפי אינדוקציה, פיתוח של הדטרמיננטה,
לפי השורה העליונה.

משוואה:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}\dot y+a_ny=0$$

פולינום:

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n$$

דוגמא

$$\dddot y+3\ddot y+3\dot y+y=0$$
$$p(\lambda)=\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=(\lambda+1)^3$$

יש ערך עצמי אחד בלבד $\lambda=-1$

טענה: הפתרון הכללי הוא

$$y=e^{-t}(c_1t^2+c_2t+c_3),\quad c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$$

או $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{C}$ אם מעל $\mathbb{C}$

[דרך (פשוט)]

נגדיר אופרטור של גזירה $D: f\mapsto\frac{d}{dt}f$

ונרשום את המשוואה בצורה

$$\left(D^n+a_1D^{n-1}+\ldots+a_{n-1}D+a_nI_0\right)y=0$$

אופרטור "כולו", לא פועל עבר

טענה: פתרונות של המשוואה (67)

$$(\mathcal{D}-\lambda I_0)^k y = 0$$

הם פונקציות

$$y = e^{\lambda t}\left(c_1 t^{k-1} + c_2 t^{k-2} + \dots + c_k\right) \in L_{\lambda,k}$$

$$c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$$

($\mathbb{C}$ מעל $\mathbb{C}$)

ורק הן!

הוכחה: ברור ש- $L_{\lambda,k}$ - מרחב לינארי

$$p_1, p_2 \in L_{\lambda,k} \Rightarrow \alpha p_1 + \beta p_2 \in L_{\lambda,k}$$

קואורדינטות: $(c_1, c_2, \dots, c_k)$; $\dim L_{\lambda,k} = k$

~~הנוספת~~ פונקציות $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}$ - בסיס

בסיס נעים! $e^{\lambda t}, \frac{t}{1!}e^{\lambda t}, \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}, \dots, \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t}$

אז מה עושה $\mathcal{D}$?

$$\mathcal{D}-\lambda I_0:\quad \underbrace{\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t} \mapsto \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}e^{\lambda t} \mapsto \dots \mapsto \frac{t}{1!}e^{\lambda t} \mapsto e^{\lambda t} \mapsto 0}_{k \text{ חצים!}}$$

באמת

$$(\mathcal{D}-\lambda I_0)\frac{t^s}{s!}e^{\lambda t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^s}{s!}e^{\lambda t}\right) - \lambda\frac{t^s}{s!}e^{\lambda t} =$$

$$= \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{\lambda t} + \cancel{\lambda\frac{t^s}{s!}e^{\lambda t}} - \cancel{\lambda\frac{t^s}{s!}e^{\lambda t}}$$

מ.ש.ל.

רק הן מושאר לשיעור

~~[illegible]~~ ⑥⑧

[illegible]

Pascal

$$(\lambda-1)^5 = \lambda^5 - 5\lambda^4 + 10\lambda^3 - 10\lambda^2 + 5\lambda - 1$$

$$y^{(5)} - 5y^{(4)} + 10y^{(3)} - 10\ddot{y} + 5\dot{y} - y = 0$$

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

הפוך הכללה!!

$$\boxed{y = e^t(c_1t^4 + c_2t^3 + c_3t^2 + c_4t + c_5) \quad c_1, \dots, c_5 \in \mathbb{R} \ (\mathbb{C})}$$

מספר פרמטרים חופשיים ממיד
שווה לסדר המשוואה, כמו פה

כללי!

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ ריבוי, multiplicity

$$(D-\lambda_1 I_0)^{m_1}(D-\lambda_2 I_0)^{m_2} y = 0$$

$$y = \underbrace{e^{\lambda_1 t}(c_1 t^{m_1-1} + \dots + c_{k_1})}_{\varphi_{\lambda_1}} + \overbrace{e^{\lambda_2 t}(d_1 t^{m_2-1} + \dots + d_{m_2})}^{\varphi_{\lambda_2}}$$

$\boxed{\text{סימון}}$ φ_{λ_1} $\quad \in L_{\lambda_1, m_1} + L_{\lambda_2, m_2}$

הוכחה!

$(D-\lambda_1 I_0)^{m_1}(D-\lambda_2 I_0)^{m_2}$ גורר e

$= (D-\lambda_2 I_0)^{m_2}(D-\lambda_1 I_0)^{m_1}$ מתחלפים

[illegible]
"k"
"m"-ב
"multiplicity"

$$(D-\lambda_1 I_0)^{m_1}(D-\lambda_2 I_0)^{m_2}(\varphi_{\lambda_1} + \varphi_{\lambda_2}) =$$

$$= (D-\lambda_2 I_0)^{m_2}\underbrace{(D-\lambda_1 I_0)^{m_1}\varphi_{\lambda_1}}_{0} + (D-\lambda_1 I_0)^{m_1}\underbrace{(D-\lambda_2 I_0)^{m_2}\varphi_{\lambda_2}}_{0} = 0$$

69

אלגו עבור כפלד פי
הרבה גורמים,

<u>דוגמא</u>

$$y^{(4)} - 13\ddot{y} + 36y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^4 - (4+9)\lambda^2 + (4\cdot 9) =$$

$$= (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 9) = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda+3)$$

$$y = c_1 e^{2t} + \underbrace{c_2 e^{-2t}}_{\in L_{2,1}} + \underbrace{c_3 e^{3t}}_{\in L_{3,1}} + c_4 e^{-3t} \qquad c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{R}$$

(או $\mathbb{C}$)

<u>דוגמא</u>

$$y^{(4)} + 2\dddot{y} + \ddot{y} = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda+1)^2$$

$$e^{0t} = 1$$

$$y = \underbrace{c_1 t + c_2}_{\lambda = 0} + \underbrace{e^{-t}(c_3 t + c_4)}_{\lambda = -1}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

(או $\mathbb{C}$)

אז מה עושים כאשר הערכים
העצמיים מרוכבים?

אם המשוואה היא ממשית

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

$$a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}$$

אז שוב
$y, \bar{y}$ - פתרונות
ערכים עצמיים מרוכבים
באים בזוגות

מקרה של ערכים עצמיים מרוכבים

$\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ - שניהם ערכים עצמיים (שורשים של הפולינום)

נניח המשוואה $P(D)y = 0$

נראה כך

$$\left[\cdots \underbrace{\left(D-(\alpha+\beta i)I_0\right)^{m}\left(D-(\alpha-\beta i)I_0\right)^{m}}_{\left(D^2-2\alpha D+(\alpha^2+\beta^2)I_0\right)^{m}} \cdots\right] y = 0$$

מדצמים מאמיים

אז y מכיל צירוף ליניארי של

$$\underbrace{e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) \pm i\sin(\beta t)\right)}_{e^{(\alpha \pm \beta i)t}} t^{j}, \quad j = 0,1,\dots,m-1$$

מספר הפונק׳ $2m$

כל צירוף ל

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos(\beta t)e^{\alpha t}\left[c_1 t^{m-1} + c_2 t^{m-2} + \dots + c_m\right] \\ &+ \sin(\beta t)e^{\alpha t}\left[d_1 t^{m-1} + d_2 t^{m-2} + \dots + d_m\right] \in L_{\alpha \pm \beta i, m}\end{aligned}}$$

שימו לב! כאשר $\beta = 0$ מקבלים

$\cos(\beta t) = 1$, $\sin(\beta t) = 0$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}: L_{\alpha \pm 0i, m} = L_{\alpha, m}$$

כך שצאת הנוסחה הכללית (71)

דוגמא

$$y^{(6)} - y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^6 - 1 = (\lambda^3 - 1)(\lambda^3 + 1)$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$

$$1 \qquad -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2} i \qquad -1 \qquad \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2} i$$

שורשים!

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = \left(\lambda + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4} = \left(\lambda + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2$$

לי ל

כן, קל

יותר...

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + e^{\frac{1}{2}t}\left(C_3 \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_4 \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) + e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_5 \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_6 \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

אם פתרון כללי מעל $\mathbb{R}$ - ו $C_j \in \mathbb{R}$

מעל $\mathbb{C}$ - ו $C_j \in \mathbb{C}$

דוגמא

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda + i)^2 (\lambda - i)^2$$

$$\lambda = \pm i$$

$$y = C_1 t \cos t + C_2 \cos t + C_3 t \sin t + C_4 \sin t$$

$C_j \in \mathbb{R}$ מעל $\mathbb{R}$

$C_j \in \mathbb{C}$ מעל $\mathbb{C}$

$$y = e^{it}(C_1 t + C_2) + e^{-it}(C_3 t + C_4)$$ או

$P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_{n-1},\ a_j\in\mathbb{R}$

$$p(D)y=0$$

סיכום ה כללי:

$$P(\lambda)=\dots\cdot(\lambda-\alpha\pm\beta i)^m\cdot\dots$$

$$y=\dots+e^{\alpha t}\cos\beta t\left[c_1t^{m-1}+\dots+c_m\right]$$
$$+e^{\alpha t}\sin\beta t\left[d_1t^{m-1}+\dots+d_m\right]+\dots$$

כמובן | אקספוננטה של מרוכבים,
הינם, נוגע אוילר, גוזאר,

דוגמא: אם תנאי התחלה

$$\dddot{y}-3\ddot{y}+3\dot{y}-y=0$$

$$(y(0),\dot{y}(0),\ddot{y}(0))=(0,0,1)$$ תנאי התחלה

$$p(\lambda)=(\lambda-1)^3$$

$$y=e^t(c_1t^2+c_2t+c_3)$$

$$y(0)=0\Rightarrow c_3=0$$

$$\dot{y}(0)=(c_1t^2+c_2t)e^t+(2c_1t+c_2)e^t$$

$$\dot{y}(0)=0\Rightarrow c_2=0,\ \dot{y}(t)=c_1t^2e^t+2c_1e^t$$

$$\ddot{y}(t)=c_1t^2e^t+2c_1e^t+2c_1te^t$$

$$\ddot{y}(t)=1\Rightarrow 2c_1=1,\ c_1=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y=\frac{1}{2}t^2e^t}$$

משוואה אחת לינארית אוטונומית
מסדר גבוה ללא הומוגני

שיטת מקדמים לא ידועים

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b(t)$$

קוואזי-פולינום $b(t) \in L_{M,K}$, $b = e^{\alpha t}\cos(\beta t)[c_1 t^{k-1} + \dots + c_k] + e^{\alpha t}\sin(\beta t)\cdot[d_1 t^{k-1} + \dots + d_k]$

שני הסימונים מקובלים

$$\boxed{P(D)y = b}$$

או

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y = b$$

זה מקרה פרטי של מערכת לינארית לא הומוגנית

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{Y} = AY + B(t)$$

לכן

$$Y = Y_h + y_p$$

פתרון כללי | פתרון למשוואה ההומוגנית | פתרון פרטי

אנו יודעים את הפתרון למערכת ההומוגנית

⇐ נשאר למצוא פתרון אחד פרטי <u>כלשהו</u>

הרעיון הוא להוכיח (לא לגמרי) של פתרון $y_p(t)$, $X_p = \begin{pmatrix} y_p \\ y_p' \\ \vdots \\ y_p^{(n-1)} \end{pmatrix}$ יש צורת קוואזי פולינום גם כן.

במקום הוכחה מלאה ניתן הסבר

<u>טענה:</u>

$$P(\lambda) = (\lambda-\mu)^m Q(\lambda)$$

אם $Q(\mu) \neq 0$

אז $Q(D): L_{\mu,k} \to L_{\mu,k}$ $\Rightarrow$ $Q(D)^{-1}$ מוגדר ב- $L_{\mu,k}$

העתקה חח-ע ערכית ועל

נניח

$$P(D) = Q(D)(D-\mu I_0)^m$$

$$Q(D)(D-\mu I_0)^m y = b$$

$$\underbrace{(D-\mu I_0)^m}\, y_p = Q(D)^{-1} b \in L_{\mu,k}$$

צריך למצוא y_p אותו!

האופרטור הזה מוריד דרגת הקוואזי פולינום

לכן מחפשים פתרון פרטי

בצורה $\lambda = \alpha \pm \beta i$

$$y_p = t^m e^{\alpha t}\cos(\beta t)\left[\tilde{c}_1 t^{k-1} + \dots + \tilde{c}_k\right] + t^m e^{\alpha t}\sin(\beta t)\left[\tilde{d}_1 t^{k-1} + \dots + \tilde{d}_k\right]$$

קיום פתרון בכלל, גם עובדה

~~$\ddot{y}+y$~~ (לא נבחן) ~~דוגמא~~

הערה, אומרים שיש

רזוננס אם $m>0$

resonance

דוגמא

$$\ddot{y}+y = 1 \in L_{0,1}$$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, $m=0$, אין רזוננס

$\lambda = \pm i$

פתרון למשוואה ההומוגנית

$$y_h = c_1\cos t + c_2 \sin t$$

פתרון פרטי מחפשים בצורה

$$y_p = t^0 \cdot e^{0t}\cos(0t)\cdot f_1 + t^0 e^{0t}\cancel{\sin(0t)}\cdot d_1$$

0

כמובן לא כוללים את זה

$y_p = \cancel{f}$ מחפשים f

$0 + f = 1$ מציבים, מקבלים

$$y = c_1\cos t + c_2\sin t + 1$$

פתרנו.