הנושא הבא: משוואות דיפרנציאליות לינאריות

אין הכוונה מיוחד לינארית. הן בכלל מתקבלות בתהליך של לינאריזציה אשר מתבצע כי רק מיוחד לינארית אנחנו יודעים לפתור

לינאריזציה

אם ישנה משוואה $\dot{y} = f(t,y)$, $y \in \mathbb{R}^n$ שזאת בעצם מערכת

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

אז אפשר לבצע לינאריזציה לאורך פתרון כלשהו $y = y_*(t)$

התוצאה תהיה משוואה מסוג $\dot{z} = A(t)z + B(t)$

המשתנה, שונה הכוונה. $z \approx y$ זה, לא מקורס שלנו

נניח משוואה אוטונומית

$y \in \mathbb{R}^n$, $\dot{y} = f(y)$, $f(y_*) = 0$, $y_* \in \mathbb{R}^n$ נק' קבועה

פתרון: $y(t) \equiv y_*$

y_* נקראת נק' איזון, מצב מתמיד, נק' קריטית, נק' שווי משקל

נבצע לינאריזציה סביב נק' y_*

נניח $f \in C^1$ (גזירה, ברציפות פעמיים)

נניח $y = y_* + \Delta y$

אם מציבים y_* מקבלים

$$\dot{y} = \dot{\Delta y} = f(y_* + \Delta y) = \underset{0}{\underset{\parallel}{f(y_*)}} + f'(y_*)\Delta y + o(\Delta y)$$

פונקציה וקטורית $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{\|\Delta y\| \to 0} \frac{\|\varphi(\Delta y)\|}{\|\Delta y\|} = 0$

זה יהיה קטן בהשוואה ל-Δy כאשר $\Delta y \to 0$.

לינאריזציה

$$\boxed{\dot{z} = f'(y_*) z}$$

זה קירוב לינארי של המשוואה (מערכת) בנק' איזון (equilibrium, critical point)

כי $f'(y_*)$ - מטריצת Jacobi

$$f'(y_*) = \frac{\partial f}{\partial y}(y_*) = \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} f_1(y) \\ \vdots \\ f_n(y) \end{pmatrix}\Bigg|_{y = y_*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y_*), & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(y_*), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(y_*) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(y_*), & \frac{\partial f_n}{\partial y_2}(y_*), & \dots, & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(y_*) \end{pmatrix}$$

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \sin(y_1 + y_2 - 1) = f_1(y) \\ \dot{y}_2 = \cos y_1 - \ln((y_2 - 1)^2 + 1) + 1 = f_2(y) \end{cases}$$

נק' קריטית: $y_* = \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \end{pmatrix}$

$$f'(y) = \begin{pmatrix} \cos(y_1 + y_2 - 1) & \cos(y_1 + y_2 - 1) \\ -\sin y_1 & \frac{-2(y_2 - 1)}{(y_2 - 1)^2 + 1} \end{pmatrix}, \quad f'(y_*) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לינאריזציה:

$$\begin{pmatrix} \dot z_1 \\ \dot z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1+z_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y(t) \cong y_* + z(t) \\ z(0) = y(0) - y_* \end{cases}$$

e נכון לא נכון

אפילו לא בקירוב!

אבל בהנדסה עושים את זה כל הזמן

לפעמים בסוף אין בעיה, אבל זה מסוכן

דוגמא

$$\dot y = y^2,\ y_* = 0,\ y \in \mathbb{R}$$

נפתור את המשוואה:

$$\frac{\dot y}{y^2} = 1 \quad , \quad y \equiv 0 \text{ פתרון}$$

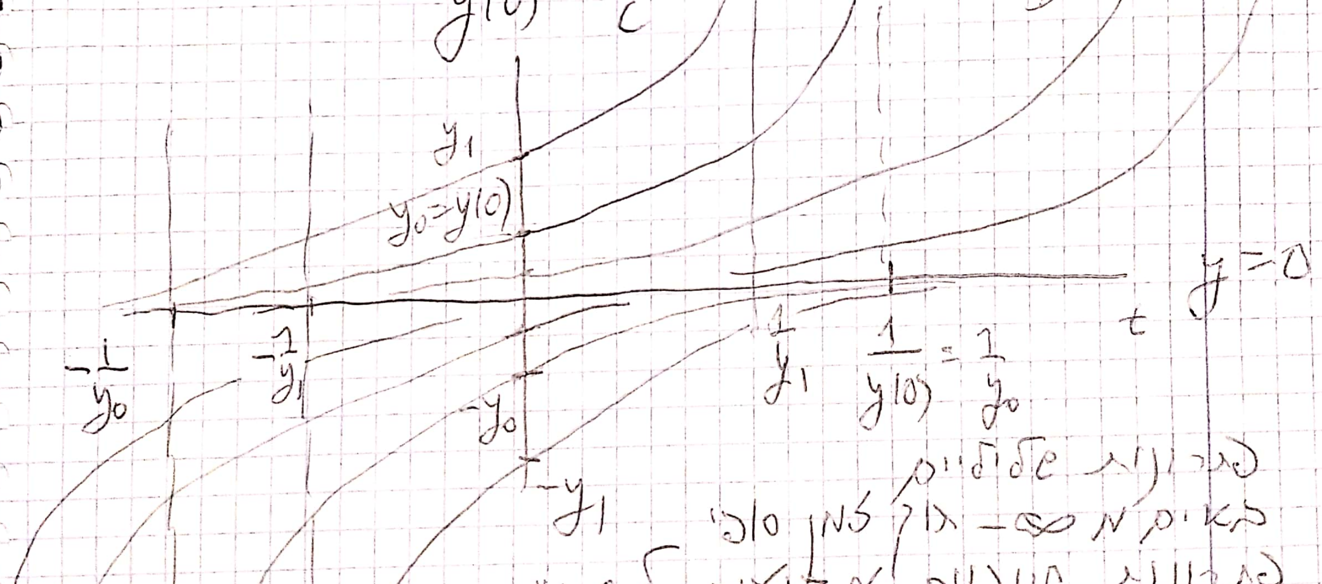
$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{\dot y\, dt}{y^2} = \int dt = t + c_2$$

$$= -\frac{1}{y} + c_1 \quad , \quad \begin{cases} y = \frac{1}{c-t} \\ y = 0 \end{cases} \quad , \quad c = c_1 - c_2 \in \mathbb{R}$$

פתרון כללי

$$y(0) = \frac{1}{c}$$

גרף של הפתרונות:



פתרונות שליליים באים מ-∞- תוך זמן סופי

פתרונות חיוביים מגיעים ל $+\infty$ תוך זמן סופי "Finite-Time Escape"

לינאריזציה:

$$\dot z = 0$$

$$(y_* = 0,\ \dot z = 2 y_* z)$$

46

מי שמאמין לליניאריזציה, עלול ~~למצוא~~ ליפול בצרה ולכן...

דוגמא

$$\ddot y + \sin(\cancel{\ddot y} + 2\dot y^3 + \dot y y^2 + y - 1) = 0$$

א. מצא נק' קריטיות:

המשוואה, הפכה למערכת

$$\begin{cases} \dot y_0 = y_1 \\ \cancel{\dot y_1 = y_2} \longrightarrow \text{כבר מיותר} \\ \dot y_1 + \sin(\cancel{\dot y_1} + 2y_1^3 + y_1 y_0^2 + y_0 - 1) = 0 \end{cases}$$

נקודות קריטיות: $\binom{y_0}{y_1} = const$ כאשר בפרט

$\Rightarrow y_1 = \dot y_0 = 0,\ \dot y_1 = 0$ כי אז

$\Rightarrow \sin(y_0 - 1) = 0 \quad y_0 = k\pi + 1,\ k \in \mathbb{Z}\ (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

~~בסביבת כל נק' $\binom{k\pi+1}{0}$ אפשר לבנות y_1 ... $y_0 y_1$~~

~~(מקרה k=0)~~

ליניאריזציה, סביב נק' קריטית $\vec y = \binom{y_0}{y_1} = \binom{\pi+1}{0}$

$$\binom{y_0}{y_1}' = \begin{pmatrix} y_1 \\ -\sin(2y_1^3 + y_1 y_0^2 + y_0 - 1) \end{pmatrix} = f(\vec y)$$

$$f'(\vec y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(\dots)(2y_0 y_1 + 1), & -\cos(\ )(6y_1^2 + y_0^2) \end{pmatrix}$$

$$f'\binom{\pi+1}{0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos\pi \cdot 1, & -\cos\pi \cdot (\pi+1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1, & (\pi+1)^2 \end{pmatrix}$$

לינאריזציה

$$\begin{cases} \dot z_0 = z_1 \\ \dot z_1 = z_0 + (\pi+1)^2 z_1 \end{cases} \Leftrightarrow \ddot z_0 - (\pi+1)^2 \dot z_0 - z_0 = 0$$

מעבר מסדר α מקיים מעבר לינארי
אם לינארי אוטונומי אוטונומי

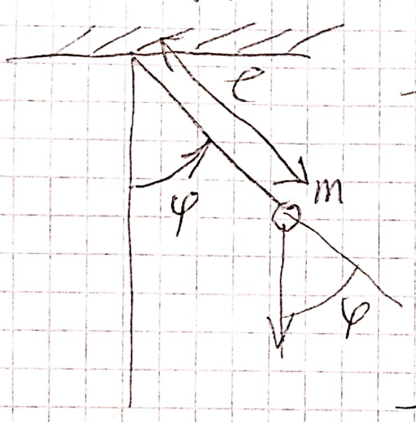
$$\cancel{\ddot y + \sin(2\dot y^3 + \dot y y^2 + y - 1) = 0}$$

$$\cancel{\sin(y-1) = 0 \Leftarrow \dot y = \ddot y = 0}$$

$$\cancel{y_*(t) \equiv k\pi + 1, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

$$\cancel{y = y_* + \Delta y, \quad y_* = \text{const}}$$

$$\cancel{\Delta \ddot y + \cos(2\dot y^3 + \dot y y^2 + y - 1)(6\dot y \Delta \dot y^2 +}$$



דוגמא מטוטלת

משוואת Newton

$$m\ell^2 \ddot\varphi = -mg\ell \sin\varphi$$

תאוצת כובד $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$
מתמטית

$$\ddot\varphi = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi$$

נחליף זמן $\tau = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t$

$$\frac{d}{dt} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\frac{d}{d\tau}$$

מקבלים $\varphi''_{\tau\tau} = -\sin\varphi$

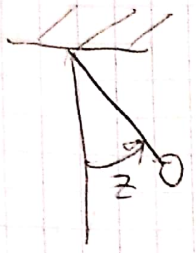
$$\ddot y = -\sin y$$

מטוטלת
מתמטית

לינאריזציה, סביב $y = \dot y = 0$

$$\begin{cases} \dot y_0 = y_1 \\ \dot y_1 = -\sin y_0 \end{cases}$$

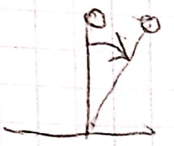
$$\begin{pmatrix} \dot z_0 \\ \dot z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos y_0 & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{y_0=0} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ -z_0 \end{pmatrix} \quad \boxed{\ddot z_0 = -z_0}$$



$$\ddot{z} = -z$$

$$z = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

פתרון
(עוס גזרה)



$y_0 = y = \pi$ לינאריזציה סביב π

$y_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos\pi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$z_0 = z$

$$\ddot{z} - z = 0$$ פתרון

$$z = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$$

$$z(0) = 0,\ \dot{z}(0) = 1 \Rightarrow \begin{matrix} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 - c_2 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = \frac{1}{2} \\ c_2 = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$z(t) = \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t}) = \operatorname{sh} t$$

סימולים את גזנה!

מערכת מד"ר לינארית מסדר ראשון

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)$$ לא הומוגנית

$$\dot{y} = A(t)y$$ הומוגנית

$(y(t) \to k\,y(t)$ מכפלה $k)$

לכל מקיים $\exists!$ 6)eN

A, B רציפות בזמן

כל פתרון אפשר להאריך עד $\pm\infty$ בזמן

ללא הוכחה:

הוכחה, ספקרנית:

נגדיר $r = \|y\|^2 = \langle y, y\rangle = y_1^2 + \dots + y_n^2$

$$\dot{r} = 2\langle y, \dot{y}\rangle = 2\langle y, Ay + B\rangle \quad , 2|\langle y, B\rangle| \le \|y\|^2 + \|B\|^2$$

$$|\dot{r}| \le 2\|A\|r + 2|\langle y, B\rangle| \le 2\|A\|r + r + \|B\|^2 \qquad \|A\| \le \bar{A}$$

$$\|B\|^2 \le \bar{B}$$

$$|r(0)| \le C, \quad r(t) \le e^{(2\bar{A}+1)t}(C + \bar{B}T) \qquad (6-B) \qquad ב[-T,T]$$

מערכת משוואות ליניאריות הומוגניות

נניח, $A(t)$, $\dot{y} = A(t)y$, $y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \dots + a_{1n}(t)y_n \\ \vdots \\ a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \dots + a_{nn}(t)y_n \end{pmatrix}$$

<u>טענה</u> פתרונות מהווים מרחב ליניארי Y_h

$\varphi_1, \varphi_2(t)$ - פתרונות $\Leftarrow$ $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ גם פתרון

$$\begin{array}{c|l} \lambda_1 & \dot{\varphi}_1 = A\varphi_1 \\ \lambda_2 & \dot{\varphi}_2 = A\varphi_2 \\ \hline \end{array} \qquad \varphi_1, \varphi_2 \in Y_h$$

homogeneous

$$(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)^{\cdot} = A(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)$$

נבחר פתרונות $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ עם תנאי התחלה

$$\varphi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varphi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \ \varphi_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>טענה!</u> $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ - בסיס של Y_h (המרחב הפתרונות)

<u>הוכחה:</u> ניקח $\varphi(t)$ - פתרון, $\varphi(0) = \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$,

אז

$$\varphi(t) = \underbrace{\xi_1\varphi_1(t) + \xi_2\varphi_2(t) + \dots + \xi_n\varphi_n(t)}_{\text{גם פתרון (כי מרחב ליניארי)}}$$

מכאן:

$$\varphi(0) = \xi_1\varphi_1(0) + \dots + \xi_n\varphi_n(0)$$

תנאי התחלה זהים $\Leftarrow$ זהים משפט $\exists!$ מ.ש.ל.

$\dim Y_h = n$ הכתונו

דוגמא

$$\begin{cases} \dot y_1 = y_2 \\ \dot y_2 = -y_1 \end{cases}$$ שקול ל $(\ddot y_1 + y_1 = 0)$

הפתרונות

$$y = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix},\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$(\cos t)^{\cdot\cdot} + \cos t = 0$

$(\sin t)^{\cdot\cdot} + \sin t = 0$

קובעים ערך בנקודה

$$y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0)\\ y_2(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\\ c_2\end{pmatrix},$$

כל תנאי התחלה מתקבלים

הגדרה

פתרונות אשר מהווים בסיס של מרחב הפתרונות Y_h נקראים פתרונות יסודיים

דוגמא $\cos t, \sin t$ - פתרונות יסודיים למשוואה, $\ddot y + y = 0$

$\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$ - פתרונות יסודיים למערכת

$$\begin{cases} \dot y_1 = y_2 \\ \dot y_2 = -y_1 \end{cases}$$

Wronskian   ורונסקיאן

של $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$W(t) = W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t) = \det\begin{pmatrix}\varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t)\end{pmatrix}$$

עמודות של מטריצה, ריבועית $n \times n$

משפט פתרונות $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n \in Y_h$

הם פתרונות יסודיים $\Longleftrightarrow$

קיים t_0 כך ש $W[\varphi_1,\dots,\varphi_n](t_0)\neq 0$

הוכחה: $\varphi_1\dots\varphi_n$ יסודיים $\Longleftrightarrow$ בלתי תלויים

הגדרה: פונקציות $\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)$

נקראות תלויות לינארית

אם קיימים $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$

לא כולם אפסים

כך ש

$$\lambda_1\varphi_1(t)+\lambda_2\varphi_2(t)+\dots+\lambda_n\varphi_n(t)\equiv 0$$

(לכל t)

וקטורים $x_1,\dots,x_n \in X$ מרחב לינארי נקראים תלויים לינארית אם $\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n=0$

במרחב של פונקציות שוויון של פונקציה ל-0

כי שוויון לפונקציה אפסית $\varphi(t)\equiv 0$

הנחה $\boxed{W(t_0)\neq 0}$ נראה ש $\varphi_1\dots\varphi_n$ בלתי תלויים

נניח הם תלויים לינארית

$\Leftarrow$ $\lambda_1\varphi_1(t)+\dots+\lambda_n\varphi_n(t)\equiv 0 : \exists(\lambda_1\dots\lambda_n)\neq(0,\dots,0)$

בפרט $\lambda_1\varphi_1(t_0)+\dots+\lambda_n\varphi_n(t_0)=0$

$\Leftarrow$ $W[\varphi_1,\dots,\varphi_n](t_0)=0$

כיוון הפוך גם ההפך מיותר

לא הכרחי: יסודיים $\Leftarrow$ בלתי תלויים $\Leftarrow$ $\forall t\, W(t)\neq 0$

הערה: הבדל באופן כללי

וורונסקיאן מתאפס, זה ≠ תלות ליניארית

ליניארית ⇐ $y\equiv 0$ פתרון, $\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2$ פתרון

מתאפס! ⇐ אם פתרון אז לא יכול להתאפס בשום רגע

עם זאת בעצמו לא אפס כלומר:

דוגמא

פתרונות ווקטוריים – $\varphi_1=\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}$, $\varphi_2=\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$

$$W[\varphi_1,\varphi_2](\pi)=\begin{vmatrix}\cos\pi & \sin\pi\\ -\sin\pi & \cos\pi\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1$$

מסקנה:

משפט

יהיו $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ n פתרונות פרטיים של המערכת $\dot{y}=A(t)y$, $y\in\mathbb{R}^n$

יש רק שני אפשרויות:

1. $W[\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n](t)\equiv 0$ (לכל t)
2. $W[\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n](t)\neq 0$ לכל t ($\forall t$)

אזי כאוסף משנה של מרחב הפתרונות למערכת ליניארית הומוגנית Y_h שמהווה בסיס מלא:

$$Y_h=\{c_1\varphi_1+\dots+c_n\varphi_n \mid c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}\}$$

n $\varphi_1 \dots \varphi_n$ – יסודיים $\quad W[\varphi_1\dots\varphi_n](t)\neq 0$

מבנה של פתרונות ל- מערכת משוואות לא הומוגנית

$$\dot{y} = A(t)y + B(t), \quad y \in \mathbb{R}^n$$
$$A, B \in C$$

לכל תנאי התחלה קיים פתרון והוא יחיד בכל הישר

נסמן Y - מרחב הפתרונות

נניח $y_p \in Y$, $y_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

טענה

$$Y = Y_h + y_p$$

הוכחה:

$$\varphi \in Y \Rightarrow \dot{\varphi} = A\varphi + B$$
$$- \quad \dot{y}_p = A y_p + B$$
$$(\varphi - y_p)' = A(\varphi - y_p) \Rightarrow \varphi \in Y_h + y_p$$

וכיוון: $\varphi \in Y_h + y_p \Rightarrow \varphi = y_h + y_p$, $y_h \in Y_h$

$$\dot{\varphi} = \dot{y}_h + \dot{y}_p = A y_h + A y_p + B = A(y_h + y_p) + B = A\varphi + B$$

מ.ש.ל.

דוגמא

נחפש פתרון קבוע

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + 1 \\ \dot{y}_2 = -y_1 - 2 \end{cases} \qquad y_p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= b + 1 \\ 0 &= -a + 2 \end{aligned}\right| \Rightarrow y_p = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

פתרון כללי

$$y = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

מערכת משוואות ליניאריות הומוגניות ואוטונומיות

$$\dot{y} = Ay, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

מקרה של $n=1$ כבר סגרנו

$$\dot{y} = ay$$

וקיבלנו

$$y = e^{a(t-t_0)} y(t_0)$$

(דרך הפרדת משתנים) מתברר שאותה נוסחה נכונה ב-$\mathbb{R}^n$.

ידוע שבמקרה הסקלרי

$$e^{a} = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots \quad (\text{Taylor } \text{טור})$$

באותה צורה נגדיר

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots$$

הטור הזה מוליד טורים בכל איבר של e^A

נראה שהטור מתכנס

נגדיר

$$\|A\| = \max_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} = \max_{\|y\|=1} \|Ay\|$$

ידוע

$$\|A\| = \max_{\lambda \in \operatorname{Spec} A^*A} \sqrt{\lambda} \quad \Leftarrow \quad \|y\| = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$$

משוחלפת $A^* = A^T$ כאשר $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

הוכחה

$\|y\|=1$,

$$\|Ay\| = \langle Ay, Ay\rangle^{\frac12} = (y^*A^*Ay)^{\frac12}, \quad A^*A \geq 0$$

ספקטרלים, סימטרית

ערכים עצמיים ממשיים

לנורמות יש תכונות של $|\cdot|$ ערך מוחלט

כמו שצריך

<u>טענה:</u> הטור מתכנס במידה שווה ומוחלט ב $\|A\|\le R$

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots$$

$$\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \le \frac{R^k}{k!} \quad \text{ו} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!}$$ מתכנס

(כמו בחדו"א)

<u>תכונות</u> מטריצה, אלכסונית:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \underset{\Leftarrow}{\Rightarrow} e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

<u>הוכחה:</u>

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \dots = \begin{pmatrix} 1+\frac{\lambda_1}{1!}+\dots & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1+\frac{\lambda_n}{1!}+\frac{\lambda_n^2}{2!}+\dots \end{pmatrix}$$

ואפילו

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) \underset{\Leftarrow}{\Rightarrow} e^A = \left(\begin{array}{c|c} e^{A_1} & 0 \\ \hline 0 & e^{A_2} \end{array}\right)$$

<u>תכונה</u>

$$\left(e^{At}\right)^{\cdot} = Ae^{At}$$

<u>הוכחה:</u> הטור מתכנס במידה שווה גם $|t|\le T$

$\Leftarrow$ אפשר לגזור איבר-איבר

מכיוון שטור הנגזרות מתכנס

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}\left(I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{1!}A + \frac{2}{2!}A^2t + \dots + \frac{k}{k!}A^k t^{k-1} + \dots =$$

$$= A\left(I + \frac{1}{1!}At + \dots + \frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}t^{k-1} + \dots\right)$$

$$= Ae^{At}$$

56 $\Leftarrow$ מסקנה

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(t_0) = \xi \end{cases} \Rightarrow y = e^{A(t-t_0)}\xi$$

הוכחה

$$y(t_0) = e^{0}\xi = \xi$$

$$\dot{y} = Ae^{A(t-t_0)}\xi = Ay$$

נשאר ללמוד איך לחשב אקספוננטה,