משפט קיום ויחידות הפתרון

מד"ר אחת מסדר n שקולה למערכת משוואות מסדר 1:

$$F(t, y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, \dot{y}, y) = 0$$

שקול למערכת אחרי הסימון

$$y_0 = y, \quad y_1 = \dot{y}, \quad \dots, \quad y_{n-1} = y^{(n-1)}$$

המערכת

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = y_1, \\ \dot{y}_1 = y_2, \\ \quad \vdots \\ \dot{y}_{n-2} = y_{n-1}, \\ F(t, \dot{y}_{n-1}, y_{n-1}, \dots, y_0) = 0 \end{cases}$$

תזכורת

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

מספרים ממשיים

$\mathbb{C}$ - מרוכבים

$\mathbb{Z}$ - שלמים

$\mathbb{N}$ - טבעיים

$\mathbb{Q}$ - רציונליים

תנאי התחלה

$$\begin{pmatrix} y_0(t_0) \\ y_1(t_0) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} y(t_0) = \xi_0 \\ \dot{y}(t_0) = \xi_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = \xi_{n-1} \end{matrix}$$

הוכחה: פתרון של המערכת עובר לפתרון $y_0(t)$ של המשוואה

ולהפך $y_0(t) \longmapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$

מערכת משוואות מסדר ~~גבוה~~ גבוה
אפשר כמו | להפוך במערכת
בעלת יותר משוואות מסדר ראשון

דוגמא פתרון נראה עוד מעט

$$y''' \cos(y-x)=0 \qquad \big(y(0),y'(0),y''(0)\big)=(1,1,1)$$

פתור δ

$$\begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' \cos(y_0 - x) = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} y_0(0) \\ y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{y}y - \dot{y} = 0, \quad y(t_0)=\pi, \ \dot{y}(t_0)=1 \qquad y(t)=?$$

פתור δ

$$y_0 = y, \quad y_1 = \dot{y}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = y_1 \\ \dot{y}_1 y_0 - y_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\Bigg|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \end{pmatrix}$$

מערכת מסדר 1 בצורה סטנדרטית:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dot{y}_2 = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \quad \dots \\ \dot{y}_n = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

רושמים כ

$$\dot{y} = f(t,y)$$

$$y \in \mathbb{R}^n$$

ותנאי התחלה

$$\begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \qquad y(t_0) = \xi \in \mathbb{R}^n$$

במערכות בצורה הסטנדרטית
הנגזרות הן מסדר ראשון
והן מבודדות ערך הקואורדינטות y
וזמן t (x או)

דוגמא!

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \cos^2(t+y_2) \\ \dot{y}_2 = y_1 - t y_2 \end{cases}$$

צורה סטנדרטית

$$\begin{cases} \dot{y}_1 \dot{y}_2 = t \\ \dot{y}_1 - \dot{y}_2 = 1 \end{cases}$$

לא צורה סטנדרטית

לא ריק אותנו גם Matlab לא
יודע לפתור מערכות בצורה
לא סטנדרטית

y - מצב, state של מערכת
(t,y) מצב מורחב (extended)
$\{y\} = R^n$ state space, מרחב המצב
$\{(t,y)\}$ מרחב מצב מורחב

מרחב פאזה (פס אחד)

בעיית Couchy

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(t_0) = \xi \end{cases}$$

תנאי התחלה

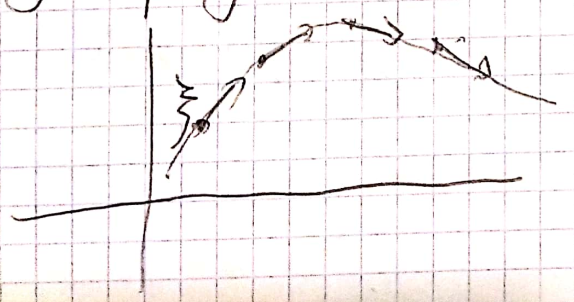
$y(t) = ?$

$y \in R^n, t \in R$

הבנה גאומטרית של מע"ד "קטורי"

$\dot{y} = F(y)$ אוטונומית

$\dot{y} = f(t,y)$
המצבים תלויים בזמן
מע"ד כמו "GPS"



תנאי התחלה אומר איפה אנו מתחילים
מישו"ר מכתיב את הכיוון ומהירות
התנועה בכל רגע ורגע

אינטואיטיבית — נדרוש שפתרון קיים
לפעמים לא:

$y \in \mathbb{R}$

$$\dot y = \begin{cases} 1 & y \le 0 \\ -1 & y > 0 \end{cases}, \quad y(0)=0$$

אין פתרון!

הפתרון לא יכול להישאר ב- $y=0$ כי $\dot y>0$

$\dot y(0)=1$, $y(0)=0$ $\Longleftrightarrow$ $y(\Delta t) = 0 + 1\cdot\Delta t + o(\Delta t)$, $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(\Delta t)-y(0)}{\Delta t}=1$

הגדרה של נגזרת!

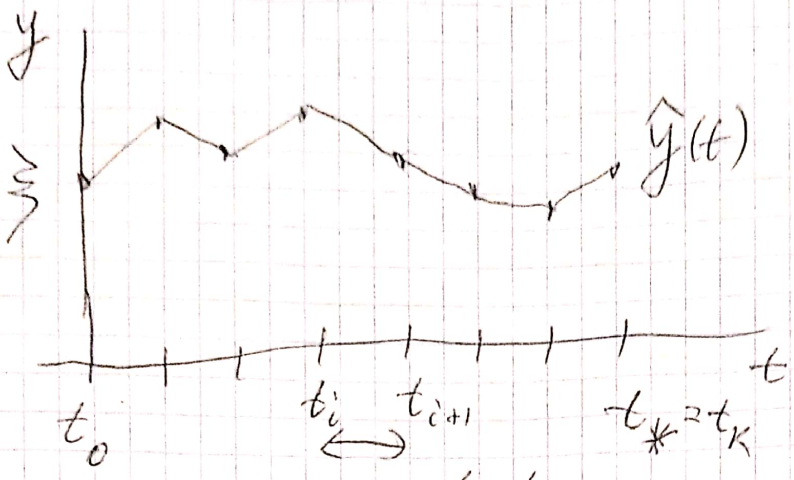
אז מקבלים ש- $y(t)>0$ לכל $0<t\ll 1$
אבל צאת תנועה לצד הפרימה!

משפט קיום:

$$\begin{cases} \dot y = f(t,y) \\ y(t_0)=\xi \end{cases}$$

אם f רציפה בסביבת נק' (t_0,ξ)
אז פתרון לוקלי תמיד קיים
(קיים δ כך ש- $y(t)$ מוגדר ב- $(t_0-\delta, t_0+\delta)$)
ההוכחה לא פשוטה, אבל נראה
באצבעות

אינטגרציה של מד"ר לפי Euler



$\dot y = f(t,y)$

$y(t_0) = \xi$

הולכים
לפי "GPS"

$\Delta t_i = \frac{t_* - t_0}{K}$ $\qquad t_i = t_0 + i\Delta t$

$\hat y(t_0) = \xi, \quad \hat y(t_1) = \hat y(t_0) + \Delta t_0\, f(t_0, \hat y(t_0))$

$\hat y(t_{i+1}) = \hat y(t_i) + \Delta t_i\, f(t_i, \hat y(t_i))$

טענה: $K \to \infty$ $\quad \hat y(t) \rightrightarrows y(t)$ מעל $[t_0, t_*]$

~~(אחד מפתרונות)~~ | פתרון

זו גם פסם ערך ההוכחה,

דוגמא

$\dot y = y, \quad y \in \mathbb{R}$

$y(0) = \xi, \quad t_0 = 0, \quad \Delta t = \frac{t_*}{K}$

$\hat y_K(0) = \xi, \quad \hat y\Big(\underbrace{\tfrac{t_*}{K}}_{= t_1}\Big) = \xi + \underbrace{\frac{t_*}{K}}_{\Delta t}\hat y(0) = \left(1 + \frac{t_*}{K}\right)\xi$

$\hat y\left((i+1)\frac{t_*}{K}\right) = \hat y(t_{i+1}) = \hat y(t_i) + \frac{t_*}{K}\hat y(t_i) = \left(1 + \frac{t_*}{K}\right)\hat y(t_i)$

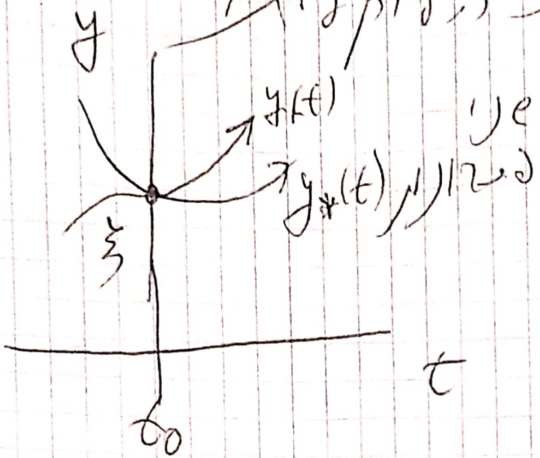
$\Rightarrow \hat y_K(t_K) = \hat y(t_*) = \left(1 + \frac{t_*}{K}\right)^K \xi$

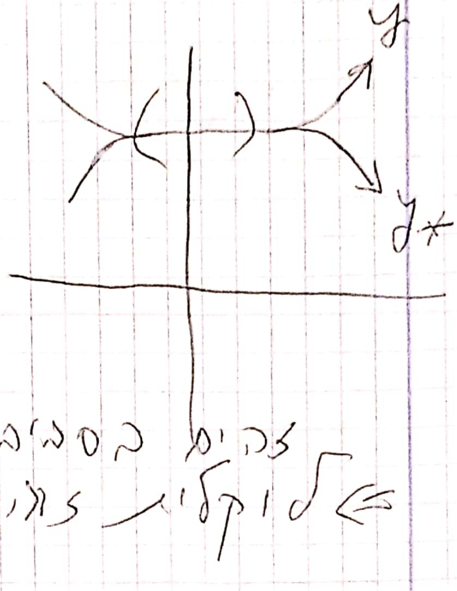
$\lim_{K\to\infty} \hat y(t_*) = \lim_{K\to\infty} \left(1 + \frac{t_*}{K}\right)^K \xi =$

$= \lim_{K\to\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{t_*}{K}\right)^{\frac{K}{t_*}}}_{\to e}{}^{t_*} \cdot \xi = \xi e^{t_*}, \quad \boxed{y(t) = \xi e^{t}}$

האם יש יחידות בפתרון?

מעוניין ביחידות הלוקלית





צריכים בסביבה

⇐ לוקלית צרו אותו פתרון

דוגמא

$$\dot y = y \;,\; y(t_0)=\xi$$

$$\frac{\dot y}{y} = 1 \;,\; \boxed{y\equiv 0 \text{ פתרון}}$$

מפרידים משתנים

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\dot y}{y}\,dt = \int dt$$

$$\ln|y| = t + \tilde c \;,\; y = \pm e^{\tilde c} e^{t}$$

$$y = ce^{t} \;,\; c = 0, \pm e^{t}$$

מתנאי ההתחלה מקבלים

$$y(t_0) = \xi = ce^{t_0}$$

$$\Rightarrow c = \xi e^{-t_0} \;,\; y(t) = \xi e^{t-t_0}$$

פתרון יחיד!

$$\dot y = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{3}}, \quad y(0)=\xi$$

טוב מאד

מפריעים משוגעים

פתרון $y(t)\equiv 0$

$$\frac{2}{3}\dot y y^{-\frac{1}{3}} = 1$$

$$\int \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}dy = \int \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} \dot y\, dt = \int dt$$

$$+y^{\frac{2}{3}} = t + \tilde C,$$

$$y^{\frac{2}{3}} = \tilde C + t, \quad t \geq -\tilde C$$

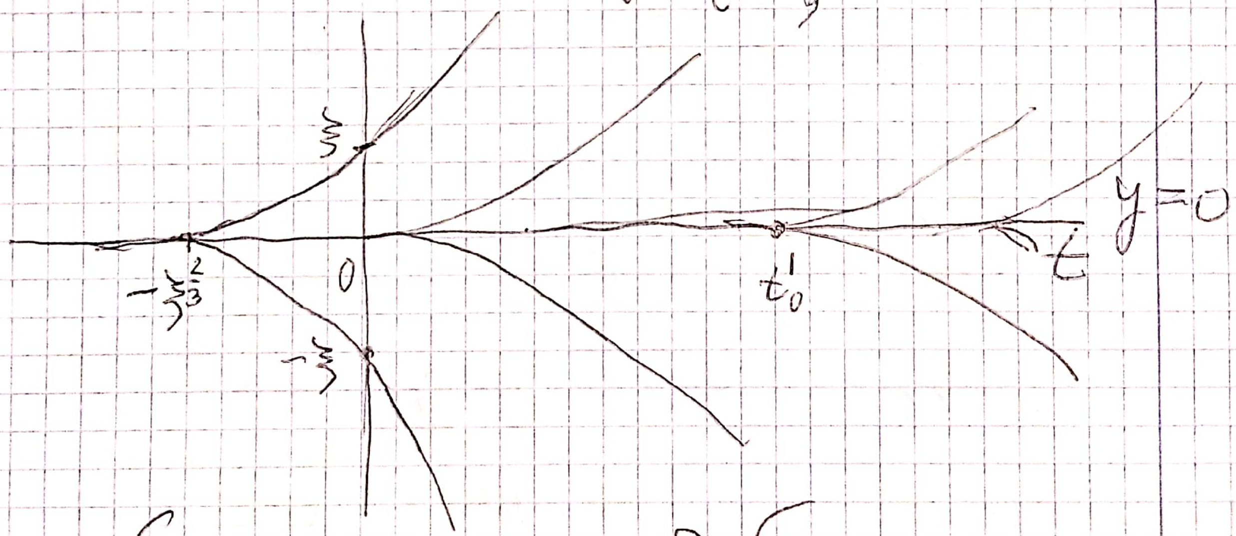
$$y = \pm(\tilde C + t)^{\frac{3}{2}} \text{ או } 0 \qquad y(0)=\xi$$

$$t \geq -\tilde C$$

$$\xi \neq 0 \Rightarrow \xi = \tilde C^{\frac{3}{2}} \text{ או } -\tilde C^{\frac{3}{2}} \Leftarrow \tilde C \geq 0 \Rightarrow \tilde C = \xi^{\frac{2}{3}}$$

$$y = (\xi^{\frac{2}{3}} + t)^{\frac{3}{2}} \cdot \operatorname{sign}\xi, \quad t \geq -\xi^{\frac{2}{3}}$$

$$\xi = 0 \Rightarrow y \equiv 0 \text{ או } y = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \pm t^{\frac{3}{2}}, & t > 0 \end{cases}$$



פתרון יכול להישאר ב-0 זמן כלשהו
ופתאום הוא עוזב כלפי מעלה או מטה.
∞ פתרונות עוברים דרך כל תנאי התחלה,
$y(t_0')=0$ ~~מסוג~~

משפט קיום ויחידות — נוסח פשוט

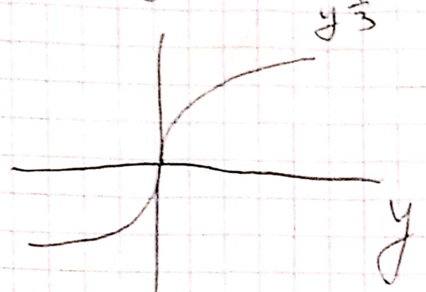
$$\begin{cases} \dot y = f(t,y) \\ y(t_0)=\xi \end{cases}$$

1. $f\in C$ (רציפה ב-t,y) $\Leftarrow$ קיום
2. $f\in C^1$ (בצירוף הרציפות) $\Leftarrow$ יחידות

דוגמא

$\dot y = y^{\frac13}$, $f(y)=y^{\frac13}$

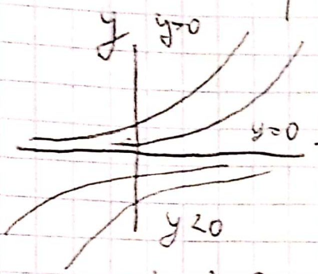
$f'(y) = +\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$



לא מוגדר ב-$y=0$ (הולך ל-$+\infty$)

בסביבת ה-0 אין יחידות

דוגמא



$$\begin{cases} \dot y = |y| = \begin{cases} y & y\ge 0 \\ -y & y<0\end{cases} \\ y(0)=\xi \end{cases}$$

$y>0 \Rightarrow \dot y = y,\ y=ce^{t},\ \xi>0 \Rightarrow y=\xi e^{t}$

לא משנה!

$y<0 \Rightarrow \dot y=-y,\ y=+ce^{-t},\ \xi<0\Rightarrow y=\xi e^{-t}$

$y=0 \Rightarrow \dot y = 0,\ y=0,\ \xi=0 \Rightarrow y=0$

$\Leftarrow$ יש פתרון אחד בלבד לכל ערך $y(0)$

אבל $f(y)=|y|$ לא גזירה ב-$y=0$

משפט נוסח שני

$$\begin{cases} \dot y = f(t,y) \\ y(t_0)=\xi \end{cases}$$

1. פתרון לוקלי קיים לכל $f\in C$
2. הוא יחיד אם $f(t,y)$ מקיימת תנאי Lipschitz לפי y בסביבה.

$\boxed{\text{משפט } \exists!}$ $\boxed{\text{פיקרד}}$

תנאי לפשיץ

הגדרה

$f: R^n \to R^m$, $f(x)$

נקראת לפשיצית אם קיים $L>0$

כך ש

$$\forall x_1, x_2 \quad \|f(x_1)-f(x_2)\| \le L\|x_1-x_2\|$$

לפונקציות סקלריות $\|x\|$ הופכת ל-$|x|$

$x\in R$, $|x_1|-|x_2| \le |x_1-x_2|$

בודקים לפי המקרים

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1, x_2 \le 0$

$x_1 \le 0 \le x_2$

$x_2 \le 0 \le x_1$

אם $f(x)$ גזירה ברציפות אז

היא מקיימת תנאי לפשיץ לוקלי

$$|f(x_1)-f(x_2)| = |f'(c)(x_1-x_2)| \le |f'(c)||x_1-x_2|$$

חסומה כי רציפה

הגדרה

$f(t,y)$ מקיימת תנאי לפשיץ ב-y

לוקלי בסביבת (t_0, ξ) אם

$$\forall t, y_1, y_2 \; ; \; \|f(t,y_1)-f(t,y_2)\| \le L|y_1-y_2|$$

מספיק ש f'_y תהיה חסומה ו f תהיה רציפה.

פונקציות אלמנטריות כולם לפשיציות

חוץ ממקרים מיוחדים כמו x^α, $0<\alpha<1$,

בסביבת $x=0$,

פונקציות מורכבות מפונקציות לפשיציות

גם לפשיציות (הם לא מחלקים ב-0)

דוגמא

$y_1^2 + |y_2| \cos|y_1 - y_2| + |t-2|$ ליפשיצית

גם ב-y גם ב-t

$$y_1 \cdot |y_2| + |t-2|^{\frac{1}{2}}$$

ליפשיצית ב-y_1, y_2 אבל לא ב-t

כאשר $t \neq 2$

$(t + y_1 y_2)^{\frac{1}{3}}$ – פונקציה לא ליפשיצית

גם לא לפי y_1, y_2 סביב נקודות $y_1 y_2 = -t$

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = t^{\frac{1}{3}} y_1 - \sin t \cdot y_2 + \frac{1}{|t|+1} \\ \dot{y}_2 = y_1 + \cos|t|^{\frac{1}{2}} \cdot y_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} f'_{1 y_1} & f'_{1 y_2} \\ f'_{2 y_1} & f'_{2 y_2} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

מערכת ליניארית

(פתרון תמיד קיים כי יש רציפות)

היא רציפה

לכן יש תנאי ליפשיץ לפי y

~~אך~~ תנאי ליפשיץ לפי t או לפי (t,y)

אבל זה לא משנה!

דוגמא

האם $y = x^3$ יכול להיות פתרון של המשוואה

$$y'' = \cancel{y} f(x, y')$$

כאשר f רציפה ברציפות בשני הארגומנטים?

פתרון: לא, כי $y = x^3$ | $y(x) = 0$

מקיימות את התנאים $y(0) = y'(0) = 0$

~~$y^{(n)} = (y^{(n-1)} + \cos t) f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$ פתרון~~

האם ייתכן ש $y = \cos t + t^5$ פתרון

לכל f רציפה ו y גזירה ורציפה

לאיזה $n=2$, $n=6$, $n=3$ אפשריים?

לא $n=2,3$ אפשריים

$(y, \dots, y^{(n-1)})\Big|_{t=0} = (y_*, \dots, y_*^{(n-1)})\Big|_{t=0}$, $y_* = \cos t$ פתרון

האם

תשובות

כן

$n=6 \Leftarrow$ ~~פתרון~~ f מסדר

פתרון

$$\dddot{y} = (\ddot{y} + \sin t) f(t, y, \dot{y}, \ddot{y}) + \cos t$$

האם $(t-1)^3 + \sin t$ יכול להיות פתרון?

$\sin t - t + 2$?

תשובות: 1. לא כי $y = \sin t$ - פתרון ומשפט הקיום והיחידות מתקיים

2. כן פתרון: $f=0$

37a

דוגמא

38

מערכות לינאריות

$A,b\in C$, $\dot y = A(t)y+B(t)$, $y\in R^n$

$$\begin{cases}\dot y_1 = a_{11}(t)y_1+a_{12}(t)y_2+\dots+a_{1n}(t)y_n+b_1(t)\\ \dot y_2 = a_{21}(t)y_1+a_{22}(t)y_2+\dots+a_{2n}(t)y_n+b_2(t)\\ \vdots \\ \dot y_n = a_{n1}(t)y_1+a_{n2}(t)y_2+\dots+a_{nn}(t)y_n+b_n(t)\end{cases}$$

מרציפות A,b נובע

שפתרון תמיד קיים ויחיד

כי $\frac{\partial f}{\partial y}=A(t)$ רציפה $\Rightarrow$ חסומה לוקלית

מערכה אוטונומית

זה מקרה פרטי

אבל גם ההפך הוא נכון:

מערכה לא אוטונומית אפשר

להפוך לאוטונומית

$$\dot y = f(t,y) \iff \begin{cases}\dot y = f(t,y)\\ \dot t = 1\end{cases}$$

טריק נפוץ

במקרה של מערכה אוטונומית

$\dot y = f(y)$, $y\in R^n$

אם f ליפשיצית אז הפתרון

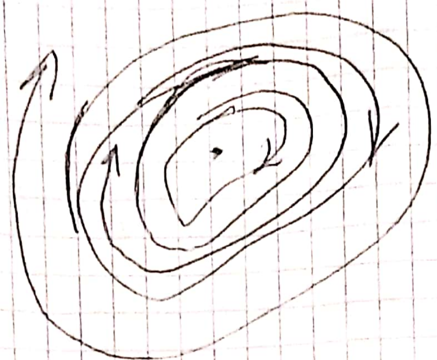
הוא יחיד.

יותר מכך — בכל נקודת זמן

אפשר להתחיל ספירת הזמן מחדש

לכל ערך של נקודה y עובר

רק פתרון אחד

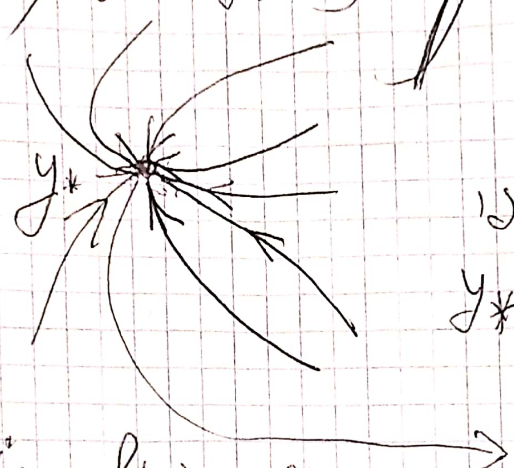


תמונה אפשרית

(מוקד יציב)

מיחידות הפתרון נובע גם

שגם תמונה



דרוש זמן אינסופי

כדי להיכנס ל y_*

$\dot{y} = f(y), \quad f(y_*)=0$

y_* – מכונה

שיווי משקל

נקודה קריטית

(Arnold)

__משפט__

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(t_0) = \xi \end{cases} \qquad y \in \mathbb{R}^n$$

$$y = \varphi(t, t_0, \xi)$$

אם $f \in C^k \Leftarrow \varphi \in C^k$ בכל הארגומנטים!

__תלות בפרמטרים:__

$\dot{y} = f(t,y,p) \qquad y \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^m \quad f \in C^k$

$y(t_0) = \xi \qquad y = \varphi(t, t_0, \xi, p)$

$\varphi \in C^k$ גם בפרמטרים!

__הוכחה:__ מוסיפים $\dot{p} = 0$

(Arnold)

הארכת הפתרון

משפט

$\dot{y} = f(t,y)$ $(t,y)\in G \subset \hat{G}$

G - תחום חסום וסגור (קומפקטי)

$\hat{G}$ - תחום פתוח שבו בכל נקודה קיימים תנאי משפט ק.פ

אזי כל פתרון אפשר להאריך עד שפת G ובצורה יחידה

(אם f רק רציפה $\Leftarrow$ בצורה לא יחידה)

משפט

משוואה אוטונומית

$\dot{y} = f(y)$ $y \in G \subset \hat{G}$

G - תחום חסום וסגור

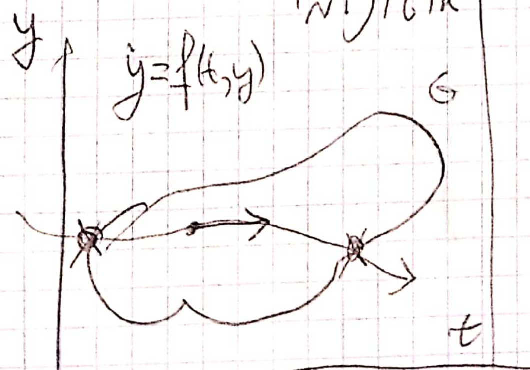
$\hat{G}$ - תחום פתוח

f ליפשיצית ב-$\hat{G}$

אז כל פתרון אפשר בכל כיוון הזמן להאריך עד אין סוף או עד לשפת G

הסברים:

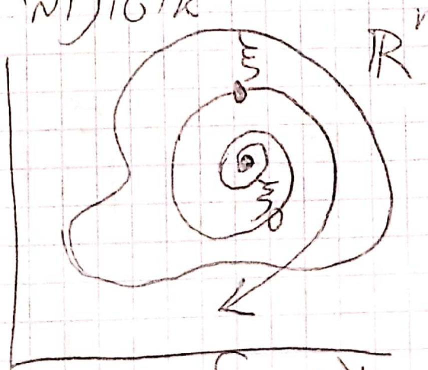
מקרה לא אוטונומי



$t=1$

תוך זמן סופי יוצאים

מקרה אוטונומי



אפשר להישאר בנק' ξ: $f(\xi)=0$

אפשר לברוח החוצה

אפשר להתכנס ל-ξ תוך זמן ∞

41

דוגמא חשובה

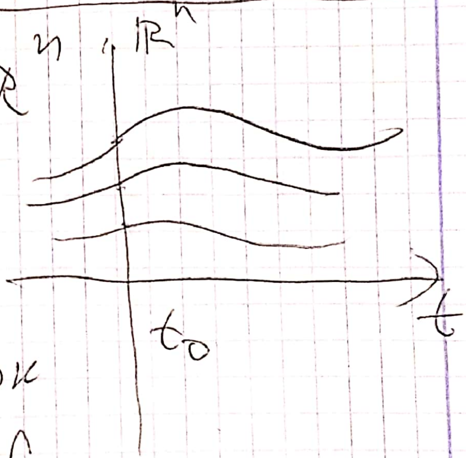
$$\dot{y} = A(t)\,y + b(t)$$

A, B רציפים $\Rightarrow$ פתרון לוקלי קיים ויחיד

מתברר שכל פתרון אפשר גם להאריך עד $\pm\infty$ בזמן (Arnold)

פרמטרים חופשיים בפתרון הכללי

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t,y), & y \in \mathbb{R}^n \\ y(t_0) = \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$



אפשר להסתכל על ξ כפרמטר חופשי של פתרון כללי

$\Leftarrow$ ישנם n פרמטרים חופשיים בפתרון כללי למשוואה הנ"ל.

גם למשוואה אחת

$$y^{(n)} = F(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$$

עם תנאי התחלה

$$y(t_0) = \xi_0, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(t_0) = \xi_{n-1}$$

$\Leftarrow$ יש n פרמטרים חופשיים בדיוק לפתרון הכללי.

בכל המשוואות מסדר ראשון
שהכרנו הצלחנו למצוא
פתרון לכל תנאי התחלה
(חוץ ממקרים מיוחדים)
⇐ מצאנו את כל הפתרונות

~~דוגמא עצם קורות (קפיצה)~~

~~$x\in[0,1]$ - ימים~~

עוד דוגמאות לחוסר $\exists!$

דוגמא

יש לנו משוואה

$$y''=f(t,y,y')$$

רציפה, לפשיצית ב- y, y'

הם 1. $y_*(t)$ ו- $y=y_*(t)+(t-1)^2$

2. $y_*(t)$ ו- $y=y_*(t)+(t-1)$

יכולים להיות פתרונות שלובלים?
אם אפשרי לתת דוגמא.

1. בלתי אפשרי כי תנאי התחלה

$$\big(y(1),\dot y(1)\big)=\big(y_*(1),\dot y_*(1)\big)$$

סתירה ל $\exists!$

2. אפשרי

$$\big(y(1),\dot y(1)\big)=\big(y_*(1),\dot y_*(1)+1\big)$$

דוגמא: $y''=0$, $y_*=0$ או $y_*=t$.