הרצאה 13

12/01-2021

תרגיל לפתח $f(x)=x$ לפי פונקציות עצמיות של

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0)=0 , \ u(\ell)=0 \end{cases}$$

פתרנו את זה כבר במשוואת המיתר

$$u_k = \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right), \quad \lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{\ell^2}, \ k=1,2,\dots$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right)$$ במובן L_2 של

$$c_k = \frac{\int_0^\ell f(x)\sin\left(\frac{\pi k}{\ell}x\right)dx}{\int_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi k}{\ell}x\right)dx} = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\left(\frac{\pi k}{\ell}x\right)dx$$

$$\int_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi k}{\ell}x\right)dx = \int_0^\ell \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi k}{\ell}x\right)\right)dx = \frac{\ell}{2} - \frac{1}{2}\int_0^\ell \cos\left(\frac{2\pi k}{\ell}x\right)dx$$

$$= \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{4\pi k}\sin\frac{2\pi k}{\ell}x\Big|_0^\ell = \frac{\ell}{2}$$

מציבים $f(x)=x$

$$c_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell x \sin\left(\frac{\pi k}{\ell}x\right)dx =$$ לפי חלקים

$$= -\frac{2}{\ell}\frac{\ell}{\pi k} x \cos\left(\frac{\pi k}{\ell}x\right)\Big|_0^\ell + \frac{2}{\pi k}\int_0^\ell \cos\left(\frac{\pi k}{\ell}x\right)dx =$$

$$= \frac{2\ell}{\pi k}(-1)^{k+1} + \frac{2}{\pi k}\frac{\ell}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{\ell}x\right)\Big|_0^\ell = \frac{2\ell}{\pi k}(-1)^{k+1}$$

$$\Sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2\ell}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{\ell}x\right)$$

$$\Sigma(x) = \begin{cases} x , & x\in[0,\ell) \\ 0 , & x=\ell \end{cases}$$

175 [illegible] מצאו ערכים עצמיים
פונקציות עצמיות

$$\begin{cases} u'' + u + \lambda u = 0 \\ u'(0) - u(0) = 0 \\ u'(1) + u(1) = 0 \end{cases}$$

[illegible] $\lambda \in \mathbb{R} \Leftarrow$

1. $\mu^2 = \lambda + 1 > 0$, $\mu > 0$

$u = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$

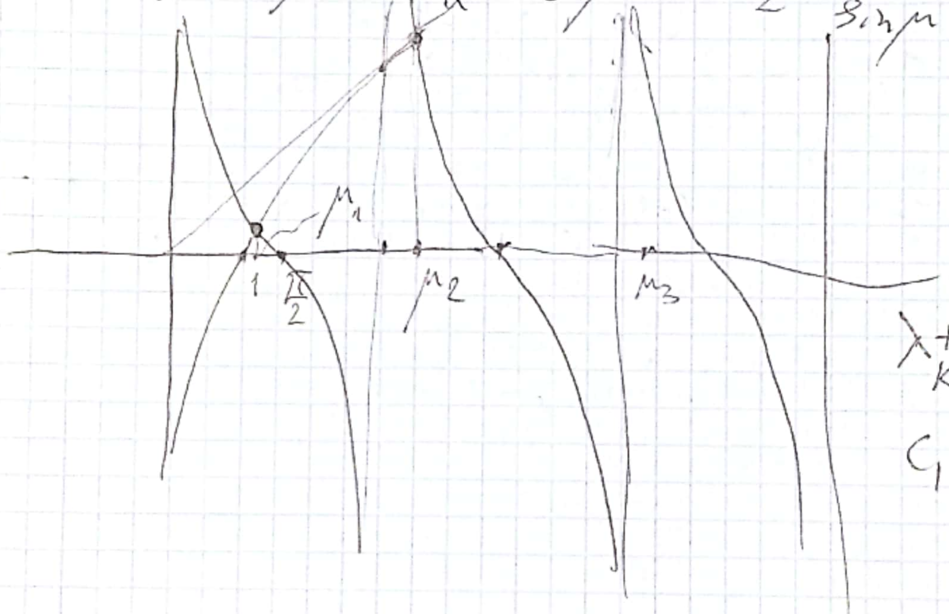
$u' = -c_1 \mu \sin(\mu x) + c_2 \mu \cos(\mu x)$

$$\begin{cases} c_2 \mu - c_1 = 0 & c_2 = \frac{c_1}{\mu} \\ -c_1 \mu \sin\mu + c_2 \mu \cos\mu + c_1 \cos\mu + c_2 \sin\mu = 0 \end{cases}$$

$-c_1 \mu \sin\mu + c_1 \cos\mu + c_1 \cos\mu + \frac{c_1}{\mu} \sin\mu = 0$

$\left(\frac{1}{\mu} - \mu\right) \sin\mu + 2 c_1 \cos\mu = 0$

$\mu - \frac{1}{\mu} = 2 \cot\mu = 2 \frac{\cos\mu}{\sin\mu}$



$\lambda_k + 1 = \mu_k^2$

$c_1 = 1, \; c_2 = \frac{1}{\mu_k}$

2. $1 + \lambda = 0$

$u = c_1 x + c_2$

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = c_2 \\ c_2 = 0 \end{matrix}$$

אין פתרון

3. $\lambda+1<0$, $\mu^2=|\lambda+1|$, $\mu>0$

$u=c_1e^{\mu x}+c_2e^{-\mu x}$

$u'=c_1\mu e^{\mu x}-c_2\mu e^{-\mu x}$

$$\begin{cases} c_1\mu-c_2\mu-c_1-c_2=0 \\ c_1\mu e^{\mu}-c_2\mu e^{-\mu}+c_1e^{\mu}+c_2e^{-\mu}=0 \end{cases}$$

$(c_1,c_2)\neq(0,0) \Leftarrow$ דטרמיננט $=0$

$$\begin{vmatrix} \mu-1 & -\mu-1 \\ (\mu+1)e^{\mu} & (-\mu+1)e^{-\mu} \end{vmatrix} = -(\mu-1)^2e^{-\mu}+(\mu+1)^2e^{\mu}>0$$

אין פתרון

סיכום:

$$\begin{cases} u_k=\cos(\mu_k x)+\frac{1}{\mu_k}\sin(\mu_k x) \\ \lambda_k=\mu_k^2-1 \end{cases}$$

μ_k - מן הקודם

מקרה של תנאי שפה מחזוריים

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) = u(l) \\ u'(0) = u'(l) \end{cases}$$

$(u'' + qu + \lambda u = 0$ או$)$
$\lambda_1 = q + \lambda$

גם פה כל התאוריה נכונה, האופ' צורה
במקרה של מקדמים פונקציונליים
מוכיחים שפונקציות עצמיות ניצבות
אחת לשניה אם ערכים עצמיים שונים,
ערכים עצמיים ממשיים...

פה יש רק מקרה אחד!

1. $\lambda = 0 \Leftarrow$

$u'' = 0 \quad u = C_1 x + C_2$

$u(0) = u(l),\ u'(0) = u'(l) \Rightarrow C_1 = 0,\ C_2 = const$

$\Rightarrow u = \frac{1}{2}$ מנורמל:

2. $\lambda > 0$

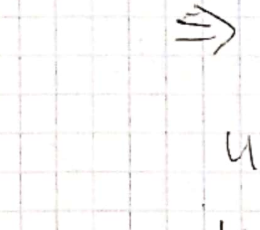
$u'' + \lambda u = 0$

$u = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$

$u' = -C_1\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda} x)$

$C_1 = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} l) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} l) \qquad (C_1, C_2) \neq 0$

$\sqrt{\lambda} C_2 = -C_1\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} l) + C_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda} l)$



$$\begin{vmatrix} \cos(\sqrt{\lambda} l) - 1 & \sin(\sqrt{\lambda} l) \\ -\sin(\sqrt{\lambda} l) & \cos(\sqrt{\lambda} l) - 1 \end{vmatrix} = 0$$

מטריצת סיבוב
בשלם

$$\cos^2(\sqrt{\lambda}\,l) - 2\cos(\sqrt{\lambda}\,l) + 1 + \sin^2(\sqrt{\lambda}\,l) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\cos(\sqrt{\lambda}\,l) - 1\right)^2 + \sin^2(\sqrt{\lambda}\,l) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(\sqrt{\lambda}\,l) = 1, \quad \sin(\sqrt{\lambda}\,l) = 0$$

$$\boxed{\sqrt{\lambda}\,l = 2n\pi} \qquad \sqrt{\lambda}\,l = k\pi$$

$$\lambda = \frac{4^2 n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$u'' - \mu^2 u = 0 \qquad \mu = \sqrt{|\lambda|} \quad \lambda < 0, 3$$

$$u = c_1 e^{-\mu x} + c_2 e^{\mu x}$$

$$u' = -c_1 \mu e^{-\mu x} + c_2 \mu e^{\mu x}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = c_1 e^{-\mu l} + c_2 e^{\mu l} \\ -c_1\mu + c_2\mu = -c_1 \mu e^{-\mu l} + c_2 \mu e^{\mu l} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - e^{-\mu l} & 1 - e^{\mu l} \\ -1 + e^{-\mu l} & 1 - e^{\mu l} \end{vmatrix} = (1 - e^{\mu l})(1 - e^{-\mu l}) + (1 - e^{\mu l})(-1 - e^{-\mu l}) =$$

אין פתרון $\qquad = (1 - e^{\mu l})(-2 e^{-\mu l}) \neq 0$

$$\Rightarrow f(x) = a_0 \cdot \frac{1}{2} + \sum a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{l} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{l} x\right)$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{l} x\right) dx, \quad a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\frac{2\pi n}{l}$$

$n = 0, 1, \ldots$

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{l} x\right) dx$$

סיכום של התמרת Laplace

כל הבעיות הנ"ל מהסוג "פולינומי"

$$P\left(\tfrac{d}{dt}\right) y = B(t)$$

$$\text{"}y = \frac{B}{P\left(\frac{d}{dt}\right)}\text{"}$$ היינו רוצים לחלק

אך אין מובן

"L" מגדיר

התמרת Laplace

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \quad , \quad s = x+yi$$

אם $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, f אינטגרבילית,

$$|f(t)| \le e^{at} \Rightarrow \mathcal{L}(f)(x+yi)$$

$\boxed{\text{מתכנס ל- } x > a}$

הוכחה:

$$\lim_{R_1,R_2\to\infty} \left| \int_{R_1}^{R_2} e^{-xt} e^{-iyt} f(t)\,dt \right|$$

$$\le \lim \int_{R_1}^{R_2} e^{-xt} e^{at} < \int_{R_1}^{\infty} e^{-(x-a)t}\,dt = -\frac{e^{-(x-a)t}}{x-a}\Bigg|_{R_1}^{\infty}$$

$$= \frac{e^{-(x-a)R_1}}{x-a} < \infty$$

מתכנס.

תכונות: 1

$$\mathcal{L}[\dot f](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0+)$$

$$\mathcal{L}[f^{(k)}](s) = s^k \mathcal{L}[f](s) - s^{k-1} f(0+) - s^{k-2}\dot f(0+) - \dots - f^{(k-1)}(0+)$$

הוכחה: אינטגרציה בחלקים

$$\int_0^\infty e^{-st}\dot f(t)\,dt = \underbrace{e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty}_{0 - f(0)} + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0}$$

ליניארי

$$\mathcal{L}[\alpha f+\beta g]=\alpha\mathcal{L}[f]+\beta\mathcal{L}[g]$$ ② 180

$$\frac{d}{dt}F(t)=f(t),\quad |F|\leq e^{a_1 t}$$ ③
$$F(t)=\int_0^t f(t)\,dt \qquad |f|\leq e^{a_2 t} \quad t\geq const$$

$$\mathcal{L}[F(t)]=\frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] \Leftarrow$$

הוכחה

$$\mathcal{L}[f]=s\mathcal{L}[F]-F(0)$$ $\to 0$

①

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts}\left[\int_0^\infty e^{-ts} f(t)\,dt\right]ds$$

התמרה הפוכה (לא כלל ה-$x>a$, $|f(t)|\leq e^{at}$)

<u>שימוש!</u> משתמשים בהגדרה
ורק כמה כללים

$$\mathcal{L}[1]=\frac{1}{s},\quad \mathcal{L}[e^t]=\frac{1}{s-1}$$

מדרגה! , $\chi_{\mathbb{R}_+}=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$, $U(t)$ סימן

$$\mathcal{L}[f(\alpha t)](s)=\frac{1}{\alpha}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{\alpha}\right),\quad \mathcal{L}[e^{\alpha t}]=\frac{1}{s-\alpha}$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)](s)=\mathcal{L}[f(t)](s+a)$$

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)](s)=e^{-\alpha s}\mathcal{L}[f](s),\quad \alpha>0$$

$U(t-\alpha)$

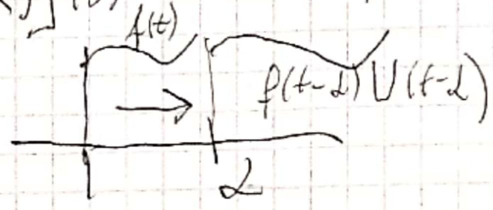


TABLE 6.2.1 Elementary Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Notes
1. 1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Ex. 4
2. e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$	Sec. 6.1; Ex. 5
3. $t^n, \quad n =$ positive integer	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Prob. 31
4. $t^p, \quad p > -1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Prob. 31
5. $\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Ex. 7
6. $\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Prob. 6
7. $\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$	Sec. 6.1; Prob. 8
8. $\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$	Sec. 6.1; Prob. 7
9. $e^{at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Sec. 6.1; Prob. 13
10. $e^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Sec. 6.1; Prob. 14
11. $t^n e^{at}, \quad n =$ positive integer	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$	Sec. 6.1; Prob. 18
12. $u_c(t)$	$\dfrac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$	Sec. 6.3
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	Sec. 6.3
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	Sec. 6.3
15. $f(ct)$	$\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right), \quad c > 0$	Sec. 6.3; Prob. 25
16. $\displaystyle\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	Sec. 6.6
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}	Sec. 6.5
18. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	Sec. 6.2; Cor. 6.2.2
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	Sec. 6.2; Prob. 29

$$\ddot y - 3\dot y + 2y = e^t \qquad y(t) \mapsto Y(s)$$

$$s^2 Y - s\,y(0) - \dot y(0) - 3sY + 3y(0) + 2Y = \frac{1}{s-1}$$

$$\underbrace{(s^2-3s+2)}_{(s-2)(s-1)} Y = \frac{1}{s-1} + (s-3)\,y(0) + \dot y(0)$$

$$Y = \frac{1}{(s-1)^2(s-2)} + y(0)\frac{s-3}{(s-1)(s-2)} + \frac{\dot y(0)}{(s-1)(s-2)} =$$

$$= \frac{1}{(s-1)^2(s-2)} + \frac{y(0)}{s-1} - y(0)\frac{1}{(s-1)(s-2)} + y'(0)\frac{1}{(s-1)(s-2)}$$

<u>partial fraction decomposition:</u>

$$\frac{1}{(s-1)^2(s-2)} = \frac{\alpha}{(s-1)^2} + \frac{\beta}{(s-1)} + \frac{\gamma}{(s-2)} = \frac{\alpha(s-2) + \beta(s-1)(s-2) + \gamma(s-1)^2}{(s-1)^2(s-2)}$$

$$\alpha(s-2) + \beta(s-1)(s-2) + \gamma(s-1)^2 = 1$$

$s = 1 \Rightarrow -\alpha = 1$, $\alpha = -1$, $\quad s = 2 \Rightarrow \gamma = 1$,

$$\alpha + \beta(s-2) + \beta(s-1) + 2\gamma(s-1) = 0$$

$$-1 + \beta(2s-3) + 2s - 2 = 0$$

$$2s(\beta+1) - 3(\beta+1) = 0 \qquad \beta = -1$$

$$\frac{1}{(s-1)^2(s-2)} = \frac{-1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2}$$

$$-te^t \qquad -e^t \qquad e^{2t}$$

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)} = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2}$$

$$\boxed{y(t) = -te^t - e^t + e^{2t} + \cancel{y(0)e^t} - \cancel{y(0)e^t} + y(0)e^{2t} + \dot y(0)(e^t - e^{2t})}$$

Cauchy [illegible] | 17-10