פונקציות מיוחדות (השלמה) הרצאה 12, 05/01-2021

$$\ddot{y} + \cos t\,\dot{y} - y = t^2 \quad , \quad y(0)=1,\ \dot{y}(0)=0$$

למצוא תחילת פיתוח Taylor של y

$$y(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + o(t^4)$$

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_4 = ?$$

הערה חשובה: יש 3 דרכים לרשום $y(t)$ בצורה נכונה:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \underbrace{o(t^4)}_{\text{זניח בהשוואה ל-}t^4}$$

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + O(t^5)$$

מאותו סדר גודל כמו t^5

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \ldots$$

סכום מקובל

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots = \ldots$$

יותר מכך!

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4$$

לא נכון!

כי y לא פולינום!

צריכים אותו דבר:

$$\dot{y} = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + 4\alpha_4 t^3 + \ldots$$

$$\ddot{y} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 t + 12\alpha_4 t^2 + \ldots$$

מציבים

$$y(0) = 1 \Rightarrow \alpha_0 + 0 = 1 \;,\; \alpha_0 = 1$$
$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow \alpha_1 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$2\alpha_2 + 6\alpha_3 t + 12\alpha_4 t^2 + \ldots + \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \ldots\right)\left(\alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + \ldots\right)$$
$$- \left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots\right) = t^2$$

!כל "..." אפשר במקום אחר הגדל שלי

$$t^0 \;\big|\; 2\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_0 = 0 \qquad \alpha_2 = \tfrac{1}{2}(\alpha_0 - \alpha_1) = \tfrac{1}{2}$$
$$t^1 \;\big|\; 6\alpha_3 + 2\alpha_2 - \alpha_1 = 0 \qquad \alpha_3 = \tfrac{1}{6}(\alpha_1 - 2\alpha_2) = -\tfrac{1}{6}$$
$$t^2 \;\big|\; 12\alpha_4 - \frac{\alpha_1}{2} + 3\alpha_3 - \alpha_2 = 1$$
$$t^3 \;\big|\; 20\alpha_5 + 4\alpha_4 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{12}\left(\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{2} - 3\alpha_3 + 1\right) = \frac{1}{12}\left(0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{y = 1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + o(t^4)}$$

קירוב

!כאן טעות עוד אחת

$$t^3 \;\big|\; 20\alpha_5 - \alpha_2 + 4\alpha_4 - \alpha_3 = 0$$

מחשבים המקדם "..."

$$\alpha_5 = \frac{1}{20}\left(\alpha_2 + \alpha_3 - 4\alpha_4\right) = \frac{1}{20}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{4}{6}\right)$$
$$= \frac{1}{20}\left(\frac{3}{6} - \frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{20 \cdot 3} = -\frac{1}{60}$$

אפשר להמשיך עד ∞

הגדרת השארית:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_k t^k + R_k(t)$$

$$|R_k(t)| \le \frac{\max_{\text{סביבה}} |y^{(k+1)}|}{(k+1)!} |t|^{k+1}$$

אם ערכים לנגזרת $y^{(k+1)}$

1 ~~[illegible]~~ מוסג של (762)

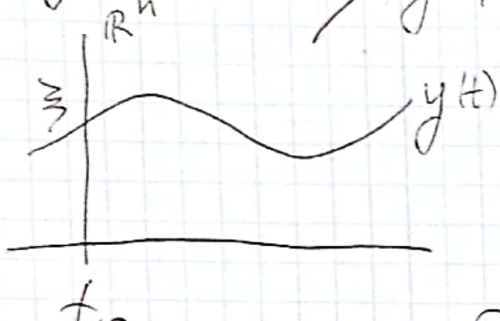
בעיית ערך שפה

בעיית Cauchy (תזכורת)

$\dot{y} = f(t,y)$ $f\in C$, לפשיצית לגבי y

$y(t_0)=\xi,\ y\in\mathbb{R}^n$ $y(t)=\varphi(t,t_0,\xi)$

הפתרון לבעיית קושי



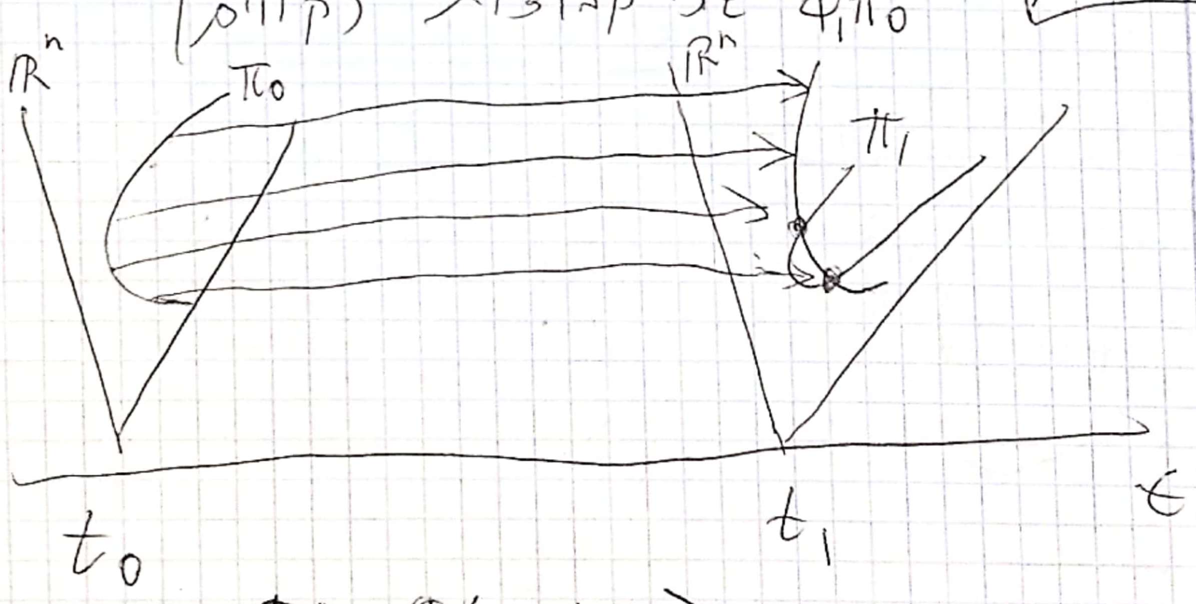
בעיית ערך שפה: כללית במערכת

$\dot{y} = f(t,y),\ y\in\mathbb{R}^n,\ t_1>t_0$

$y(t_0)\in\pi_0\subset\mathbb{R}^n,\ y(t_1)\in\pi_1\subset\mathbb{R}^n$

תנאי שפה מופרדים

שני קבוצות (קווים) $\Phi_1\pi_0$



$\Phi_1(\xi)=\varphi(t_1,t_0,\xi)$

יש פה שני פתרונות לבעיית ערך שפה

אין חיתוך $\Leftarrow$ אין פתרון

$u = u(x)$

דוגמא

$(y = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix})$

$$\begin{cases} u'' = e^x \\ u'(0) - u(0) = 0 \\ u'(1) - \frac{1}{2}u(1) = 0 \end{cases}$$

נראה שאין לה,

פתרון כללי הוא

$$u = \underbrace{c_1 x + c_2}_{\text{פתרון למשוואה ההומוגנית}} + e^x$$

מציאת שני הקבועים

$$c_1 + e^0 - c_2 - e^0 = 0$$

$$c_1 + e - \frac{1}{2}(c_1 + c_2 + e) = 0$$

$$\begin{cases} c_1 = c_2 \\ \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}(c_1 - c_2) = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow e = 0$ **סתירה**

סקלרים

מספר כללי נעצ' שהם צריך

לקבוע n פרמטרים (לפי $n=2$) $\Leftarrow$ 2 תנאים

דוגמא

$$\begin{cases} u'' = e^x \\ u'(0) - u(0) = 0 \\ u'(1) - \alpha u(1) = 0 \end{cases}$$

$$c_1 + e^0 - c_2 - e^0 = 0$$

$$c_1 + e - \alpha(c_1 + c_2 + e) = 0$$

$$\begin{cases} c_1 = c_2 \\ (1-\alpha)e + (1-2\alpha)c_2 = 0 \end{cases}$$

$$c_1 = c_2 = -\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}e$$

פתרון יחיד כאשר $\alpha \neq \frac{1}{2}$

זו תמונת מצב של בעיית ערך שפה

במקרה Sturm-Liouville מיוחד

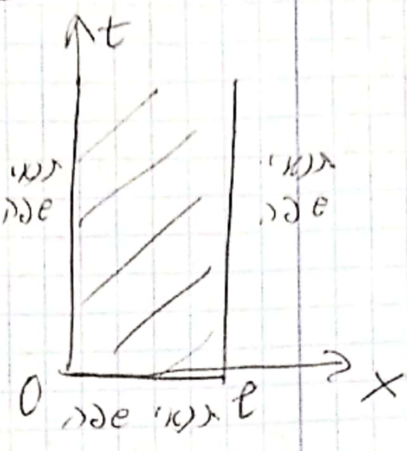
בעיות ~~ערך~~ שפה, תורת Sturm-Liouville

מוטיבציה

משוואת מעבר חום והפרדת משתנים

$$\underset{x=0}{\bullet}\longrightarrow\underset{x=l}{\bullet}$$

מוט כלשהו



$0\le x\le l\ ,\ t\ge0$

נתון: טמפרטורה $u(x,0)=f(x)$

$u(0,t)=0\ ,\ u(l,t)=0$

$f(0)=f(l)=0$ לרציפות

$$\alpha^2u''_{xx}=u'_t \qquad \alpha^2\left[\frac{cm}{s}\right]=0{,}00144 \ \text{מים} \quad 0{,}12\ \text{פלדה}$$

Thermal diffusivity

מקרה כללי:

$$\begin{cases}\gamma_1u'_x(0,t)+\delta_1u(0,t)=0\\ \gamma_2u'_x(l,t)+\delta_2u(l,t)=0\end{cases}$$

פיזיקאי:

$u'_x(0)=u'_x(l)=0$

אין מעבר חום בקצוות

שיטת Fourier: הפרדת משתנים

מחפשים פתרון בצורה $u(x,t)=X(x)T(t)\not\equiv0$

$$\alpha^2X''(x)T(t)=X(x)T'(t)$$

$$\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{תלוי ב-}x}=\underbrace{\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}}_{\text{תלוי ב-}t}$$

לכן:

$$\frac{X''}{X}=\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T}=-\lambda=const\in\mathbb{R}$$

$0=u(0,t)=X(0)T(t)\Rightarrow X(0)=0$

$0=u(l,t)=X(l)T(t)\Rightarrow X(l)=0$

אחרת $T(t)\equiv0 \Leftarrow u(x,t)\equiv0$

מקדמים!

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T' + \alpha^2 \lambda T = 0 \\ T(0) = 1, \quad T = e^{-\alpha^2 \lambda t} \end{cases}$$

$u = X(x)T(t) = aX(x)\frac{1}{a}T(t)$ כי מתלויים סגורות

אז אפשר לבחור $a \neq 0$

$$\tilde{T} = \underbrace{\frac{1}{a}T(0)}_{\text{פונקציה חלקה}} = 1 \cdot e$$

$$\begin{cases} \gamma_1 X'(0) + \delta_1 X(0) = 0 \\ \gamma_2 X'(l) + \delta_2 X(l) = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

במקרה הכללי נקבל ערכים עצמיים אחרים לפונקציה $X(x)$

$$t = 0 \Rightarrow T(0) = 1, \quad u(x,t) = X(x) = f(x)$$

לא כל $f(x)$ מתאים כי $X(x)$ כבר מוגדר מראש

1. $\boxed{\lambda > 0}$

$$X = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0, \quad X(l) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\, l = n\pi \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad \boxed{X = \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)}$$

עד לפרופורציונליות

2. $\boxed{\lambda = 0}$

$$X'' = 0$$

$$\cancel{X = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}},$$

$$X = c_1 x + c_2, \quad X(0) = X(l) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

אין פתרון שונה מ-0

3. $\boxed{\lambda < 0}$

$$X'' - \mu^2 X = 0, \quad \mu = \sqrt{-\lambda} \text{ נסמן}$$

$$X = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}, \quad \mu > 0$$

נמצא c_1, c_2, μ מתנאי השפה

$$x=0 \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\mu l} + c_2 e^{-\mu l} = 0 \end{cases} \quad x = l$$

$(c_1, c_2) \neq (0,0)$ כי $X \not\equiv 0$

אז חייב להתקיים

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu l} & e^{-\mu l} \end{vmatrix} = 0$$

$$= \underbrace{e^{-\mu l}}_{<1} - \underbrace{e^{\mu l}}_{>1} < 0$$ סתירה

אין כאן פתרון לא אפסי

נשאר

$$u = a \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-\alpha^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2} t}$$

חייב להתקיים $u(x,0) = a \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = f(x)$

זה כמובן לא מתקיים בדרך כלל.

נשתמש בכך שהמשוואה לינארית.

לכן אם $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + \dots$ פתרונות של המשוואה

אז המשוואה פתרון

$$\cancel{f(x)}\; u(x,0) = u_1(x,0) + u_2(x,0) + \dots$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

לכן צריך שיתקיים

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$ טור Fourier

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-\alpha^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2} t}$$

פתרון;

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

בעיית Sturm-Liouville

(במקרה הפשוט (מקדמים קבועים)

תנאי שפה:

$$\begin{cases} u''(x) + q\,u(x) + \lambda u(x) = 0 \\ \alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) = 0 \\ \alpha_2 u'(\ell) + \beta_2 u(\ell) = 0 \end{cases}$$

$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, q \in \mathbb{R}$ קבועים!

$(\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0)$

$(\alpha_2, \beta_2) \neq (0,0)$

$$u : [0,\ell] \to \mathbb{C} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

λ נקרא ערך עצמי, $u \neq 0$ נקרא פונקציה עצמית

אלה תנאי שפה מופרדים (separable)

boundary conditions

התנאים ב $x=\ell$ ו $x=0$ לא מעורבבים

תנאי שפה מחזוריים: $u(0) = u(\ell)$

גם אפריים $u'(0) = u'(\ell)$

מקרה ספציפי אחר כך

---

1. טענות: ערכים עצמיים ממשיים אפשר לסדר אותם בצורה $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ (רק תנאי שפה מופרדים!)

2. אפשר לבחור פונקציות עצמיות ממשיות

3. פונקציות עצמיות ניצבות אחת לשניה,

$$i \neq j \Rightarrow \int_0^\ell u_{\lambda_i} \cdot \overline{u_{\lambda_j}}\, dx = \langle u_{\lambda_i}, u_{\lambda_j} \rangle = 0$$

4. טור Fourier

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_{\lambda_k}$$

$f \in C^1$, מקיימת תנאי שפה, $a_k = \dfrac{\langle f, u_{\lambda_k} \rangle}{\langle u_{\lambda_k}, u_{\lambda_k} \rangle}$

הסבר לנוסחת Fourier

$u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, \dots, u_{\lambda_k}$ מהווים בסיס אורתוגונלי במרחב של כל הפונקציות האינטגרביליות בקטע $[0,\ell]$ עם מכפלה סקלרית של ℓ

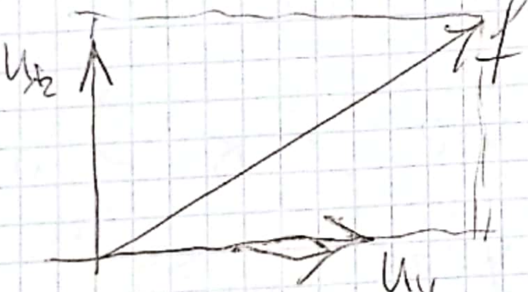
$$\langle u, v\rangle = \int_0^{\ell} u(x)\,\overline{v}(x)\,dx$$

$$u, v \in L_2 = \left\{ f:[0,\ell]\to\mathbb{R} \;\middle|\; \int |u|^2 dx < \infty \right\},$$

$\boxed{\|f\| = \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}}$ בעזרת אינטגרל Lebesgue

$$\forall f \in L_2 \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_{\lambda_k}, \quad \left\| f - \sum_{k=1}^{N} a_k u_{\lambda_k} \right\| \to 0$$

אנלוגיה ב-$\mathbb{R}^2$



$$f = a_1 u_{\lambda_1} + a_2 u_{\lambda_2}$$

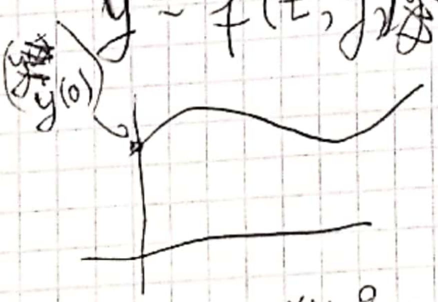
$$\langle f, u_{\lambda_1}\rangle = a_1 \langle u_1, u_1\rangle$$

$$a_1 = \frac{\langle f, u_{\lambda_1}\rangle}{\langle u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}\rangle}$$

Boundary value problem בעיית ערך שפה

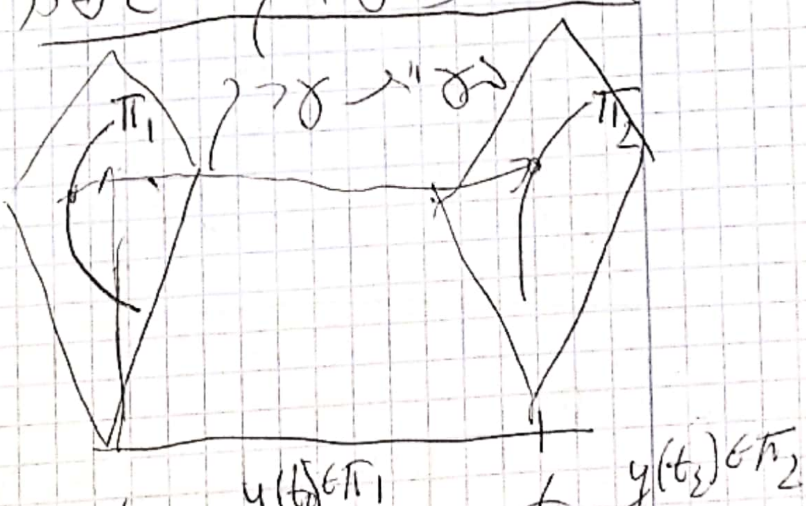
בעיית Cauchy

$$y' = f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^2$$



דרוש 2 תנאים

$y_1(0), y_2(0)$



דרוש 2 תנאים

הסבר

נסמן : $\qquad$ 169

$$Lu = u'' + qu$$

$$M = \{u \in C^2[0,\ell] \mid \mathcal{D}u = 0\}$$

$$\mathcal{D}u = \begin{pmatrix} \alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) \\ \alpha_2 u'(\ell) + \beta_2 u(\ell) \end{pmatrix}$$ כאשר

הבעיה שלנו

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = 0 \\ \mathcal{D}u = 0 \end{cases} \qquad L : M \longrightarrow C[0,\ell]$$ פונקציות רציפות

בעיה צמודה לעצמה

(1) $$u, v \in M \Rightarrow \langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$$

$$\langle Lu, v\rangle - \langle u, Lv\rangle = \int_0^\ell \left[(u'' + \cancel{qu})\bar{v} - u(\bar{v}'' + \cancel{q\bar{v}})\right] dx =$$

$$= \left[u'\bar{v} - u\bar{v}'\right]_0^\ell - \int \underbrace{(u'\bar{v}' - u'\bar{v}')}_{0} dx$$

$$= \underbrace{\left(u'(\ell)\bar{v}(\ell) - u(\ell)\bar{v}'(\ell)\right)}_{=0} - \underbrace{\left(u'(0)\bar{v}(0) - u(0)\bar{v}'(0)\right)}_{=0}$$

כדטרמיננטה, $\qquad$ כדטרמיננטה,

$$\begin{cases} \alpha_2 u'(\ell) + \beta_2 u(\ell) = 0 \\ \alpha_2 \bar{v}'(\ell) + \beta_2 \bar{v}(\ell) = 0 \\ (\alpha_2, \beta_2) \neq (0,0) \end{cases}$$ כי

$$\begin{cases} \alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) = 0 \\ \alpha_1 \bar{v}(0) + \beta_1 \bar{v}(0) = 0 \\ (\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0) \end{cases}$$ כי

מקרה שני $\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$ כאשר

גם כאשר $$\mathcal{D}u = \begin{pmatrix} u(\ell) - u(0) \\ u'(\ell) - u'(\ell) \end{pmatrix}$$

תנאים מחזוריים

מכך ש L צמוד לעצמו

מ״ע מקבלים

(2) $Lu+\lambda u=0 \Rightarrow \lambda\in\mathbb{R}$

$u\neq 0$

$$\langle Lu,u\rangle=\langle-\lambda u,u\rangle=-\lambda\langle u,u\rangle$$
$$\overset{\shortparallel}{\langle u,Lu\rangle}=\langle u,-\lambda u\rangle=-\bar{\lambda}\langle u,u\rangle \Rightarrow \bar{\lambda}=\lambda$$

(3,) ו״עים

$$\langle u_{\lambda_1},u_{\lambda_2}\rangle=0 \Leftarrow \lambda_1\neq\lambda_2$$
$$\lambda_{1,2}\in\mathbb{R}$$

$$\langle Lu_{\lambda_1},u_{\lambda_2}\rangle=-\lambda_1\langle u_{\lambda_1},u_{\lambda_2}\rangle$$
$$\shortparallel$$
$$\langle u_{\lambda_1},Lu_{\lambda_2}\rangle=-\lambda_2\langle u_{\lambda_1},u_{\lambda_2}\rangle$$
$$\Rightarrow \underset{\neq 0}{(\lambda_1-\lambda_2)}\langle u_{\lambda_1},u_{\lambda_2}\rangle=0$$

(4,) ~~לכל~~

לכל ערך עצמי מתאימה רק פונקציה עצמית אחת

$$\begin{cases}Lu_1+\lambda u_1=0\\ \mathcal{B}u_1=0\end{cases} \qquad \begin{cases}Lu_2+\lambda u_2=0\\ \mathcal{B}u_2=0\end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cancel{L\Delta u+\lambda\Delta u=0}\\ \mathcal{B}\Delta u=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha_1u_1'(0)+\beta_1u_1(0)=0\\ \alpha_1u_2'(0)+\beta_1u_2(0)=0\end{cases}$$

$$W[u_1,u_2](0)=0 \Leftarrow (\alpha_1,\beta_1)\neq(0,0)$$

$\Leftarrow W\equiv 0 \Rightarrow u_1,u_2$ פרופורציונליים

$$W=\begin{vmatrix}u_1'(t) & u_1(t)\\ u_2'(t) & u_2(t)\end{vmatrix}\equiv 0 \Rightarrow$$ פרופורצ׳ פונקציות

כמה במקרה של $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ מראים שמווקטורים עצמיים אפשר לבנות בסיס (Hilbert Open)

5. אפשר לבחור $u_\lambda(x)$ ממשי

$$\begin{cases} L\,\mathrm{Re}\,u_\lambda+\lambda\,\mathrm{Re}\,u_\lambda=0 \\ \mathcal{D}\,\mathrm{Re}\,u_\lambda=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L\,\mathrm{Im}\,u_\lambda+\lambda\,\mathrm{Im}\,u_\lambda=0 \\ \mathcal{D}\,\mathrm{Im}\,u_\lambda=0 \end{cases}$$

171

אז

$u_\lambda=\mathrm{Re}\,u_\lambda+i\,\mathrm{Im}\,u_\lambda$

אחד מהם שונה מ-0.

טור Fourier של פונקציה $f\in L_2$ לפי הבסיס $u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, \dots, u_{\lambda_n}$

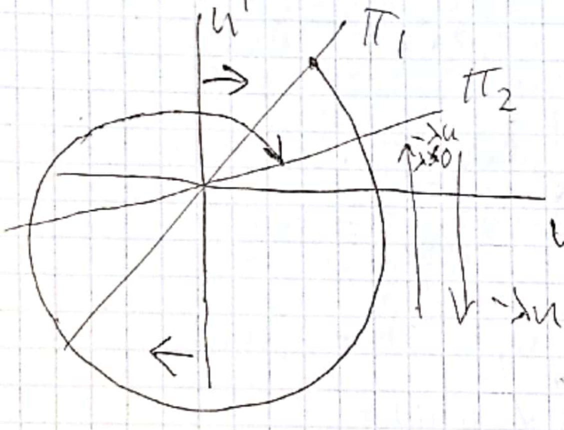
~~הערה~~ משפט: אפשר לסדר

$$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\dots \qquad \lambda_k\to\infty$$

אין נקודות צבירות

קודמת צבירות

$$u''+qu=-\lambda u$$



π_1: $\alpha_1u'+\beta_1u=0$

π_2: $\alpha_2u'+\beta_2u=0$

$(u,u')|_{x=0}\in\pi_1$

$(u,u')|_{x=\ell}\in\pi_2$

אין פתרונות

עבור $\lambda<0$ ו-$|\lambda|\gg1$.

שני בעיות:

1. למצוא פונקציות עצמיות

2. לפתח פונקציה לטור Fourier

דוגמא

למצוא ערכים עצמיים
ופונקציות עצמיות
אפשר רק בצורה גרפית

$$\begin{cases} u''+u+\lambda u=0 \\ u'(0)=0\,,\ u'(1)+2u(1)=0 \end{cases}$$

בעית מסוג
Sturm-Liouville
$\Leftarrow \lambda\in\mathbb{R}$

פונקציות עצמיות שונות מ-0 צורות לפי ההגדרה

1. $\lambda+1>0$, $\lambda>-1$

$$u=c_1\cos(\sqrt{\lambda+1}\,x)+c_2\sin(\sqrt{\lambda+1}\,x)$$

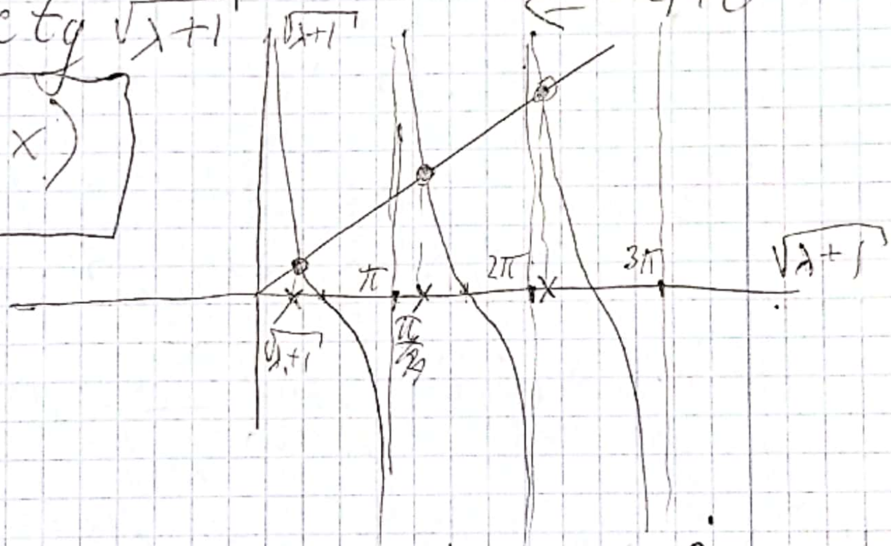
$$u'=-c_1\sqrt{\lambda+1}\sin(\sqrt{\lambda+1}\,x)+c_2\sqrt{\lambda+1}\cos(\sqrt{\lambda+1}\,x)$$

$$u'(0)=0 \Rightarrow c_2=0\,,\ u=c_1\cos(\sqrt{\lambda+1}\,x)$$

$$u'(1)+2u(1)=0 \Rightarrow -c_1\sqrt{\lambda+1}\sin(\sqrt{\lambda+1})+2c_1\cos(\sqrt{\lambda+1})=0$$

$$\sqrt{\lambda+1}=2\,\mathrm{ctg}\sqrt{\lambda+1} \quad \Leftarrow c_1\neq 0$$

$$\boxed{u_k=\cos(\sqrt{\lambda_k+1}\,x)}$$



2. $\lambda+1=0$, $\lambda=-1 \Rightarrow$

$$u''=0$$
$$u=c_1x+c_2$$

$$u'(0)=0 \Rightarrow c_1=0\,,\ u'(1)+2u(1)=2c_2=0 \Rightarrow c_2=0$$

$u=0$ אין פתרון!

3. $\lambda+1<0$, $\lambda<-1$, $\mu=\sqrt{|\lambda+1|}>0$

$$u''-\mu^2u=0$$
$$u=c_1e^{-\mu x}+c_2e^{\mu x}$$
$$u'=-c_1\mu e^{-\mu x}+c_2\mu e^{\mu x}$$

$$\begin{cases} \mu(c_1-c_2)=0 \Rightarrow c_1=c_2\neq 0 \\ c_1(-\mu+2)e^{-\mu}+c_2(\mu+2)e^{\mu}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-\mu+2)e^{-\mu}+(\mu+2)e^{\mu}=0$$

אבל $e^{\mu}(\mu+2)>e^{-\mu}(-\mu+2)$ אין פתרון

לכן λ_k מצאנו מהכרח, $\lambda_k > -1$

$-1<\lambda_1<\lambda_2<\dots$

$u_k=\cos(\sqrt{\lambda_k+1}\,x)$

אין מקדם

כי u_k מוגדר עד כדי פרופורציונליות

הרצאה 10 → טורי Fourier

משפט Steklov

$f\in C^2,\ \Delta f=0\ (f\in M)$

⇐ הטור $\sum_k c_k u_{\lambda_k}(x)$, $c_k=\dfrac{\int f(x)u_{\lambda_k}(x)\,dx}{\int |u_{\lambda_k}(x)|^2\,dx}$

מתכנס במידה שווה ובהחלט.

משפט f, f' רציפות למקוטעין ב-$[0,l]$

⇐ הטור מתכנס נ.ב. $(0,l)$

$$\forall x\in(0,l)\quad \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}c_k u_{\lambda_k}(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

משפט $f\in C[0,l]$, f' רציפה למקוטעין ב-$[0,l]$

(a) במקרה של תנאי שפה $u(0)=0$ או $u(l)=0$

דרוש גם $f(0)=0$ או $f(l)=0$

⇐ התכנסות בכל נקודות $x\in[0,l]$ ל-$f(x)$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}c_k u_{\lambda_k}(x)=f(x)$$