משפט

$$y' = Ay$$

A - מטריצה קבועה

אם $\text{Spec}\, A \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid Re\,\lambda < 0\} = \mathbb{C}_-$

אז הפתרון $y=0$ יציב

אסימפטוטית

יציבות אסימפטוטית:

יציבות + $\lim_{t\to\infty} \|y(t)-y_*(t)\| = 0$ 146

הרצאה 11, 29/12-2020

~~משפט~~

"הוכחה": כל הפתרונות הם

$0 \longleftarrow e^{+\lambda t}(c_1+c_2t^2+\dots+c_kt^{m_k-1})$ כפול פולינומים

דוגמאות

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

פתרון $y=0$ יציב אסי'

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$

אם יש ערך עצמי אחד עם חלק ממשי חיובי

$\Leftarrow$ אין יציבות

$$\begin{pmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

דוגמא

147

$\cancel{p(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-8}$, $\cancel{\lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{7}}$

לא יציב

$$p(\lambda)=\lambda^2-4\lambda-8$$

$$\lambda=+2\pm2\sqrt{3}i$$

מקרה סקלרי

$$y^{(n)}+F(t,y,\dot y,\dots,y^{(n-1)})=0$$

$y=y_*(t)$, $y_*(t_0)=\xi_0$, ..., $y_*^{(n-1)}(t_0)=\xi_{n-1}$ תנאי התחלה

נקרא יציב (יציב אסימפטוטית) אם $\vec{y}_*$

$$\vec{y}_*=\begin{pmatrix}y_*\\ \vdots\\ y_*^{(n-1)}\end{pmatrix} \text{ of } \begin{pmatrix}y\\ \dot y\\ \vdots\\ y^{(n-1)}\end{pmatrix}^{\cdot}=\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_{n-1}\end{pmatrix}^{\cdot}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ -F(t,y_0,\dots,y_{n-1})\end{pmatrix}$$

יציב (יציב אסימפטוטית)

דוגמא

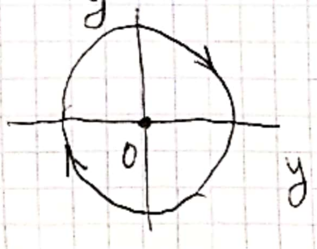
$$y^{(5)}+a_1y^{(4)}+\dots+a_5y=0$$

$$p(\lambda)=\lambda^5+a_1\lambda^4+\dots+a_5=(\lambda^2-3\lambda+2)(\lambda+1)^3$$

$y\equiv0$ - לא פתרון יציב, הוכחה:

$\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-2)(\lambda-1)$ $\quad 1,2\notin\mathbb{C}_-$, $1,2>0$

דוגמא



$$\ddot y+y=0 \qquad y_*\equiv0$$

יציב אבל לא אסימפטוטית

משפט אם למערכת לינארית אי-הומוגנית, $\dot{y}=A(t)y+B(t)$, A,B רציפים

יש פתרון יציב אסימפטוטית אז כל הפתרונות יציבים אסימפטוטית,

הוכחה נניח $y_*(t)$ יציב אס'

$y_*(t_0)=\xi_0$

אז $\forall y:\ y(t)-y_*(t)\to 0$

אבל ~~$\tilde{y}_*$~~ $\tilde{y}=y-y_*$

$\tilde{y}=y-y_*$

מקיים משוואה $\dot{\tilde{y}}=A(t)\tilde{y}$

y_* יציב אס' $\iff$ $\boxed{\begin{array}{l}\tilde{y}\to 0\\ 0\ \text{יציב}\end{array}}$

$\Leftarrow$ $\tilde{y}=0$ פתרון יציב אס' ל- $\dot{\tilde{y}}=A(t)\tilde{y}$

ניקח y_{**} כל פתרון אחר

$\dot{y}_{**}=A(t)y_{**}+B(t)$

אז $\hat{y}=y-y_{**}$

מקיים $\dot{\hat{y}}=A(t)\hat{y}\Rightarrow \hat{y}=y-y_{**}\to 0$

יציבות אס'.

מ.ש.ל.

מסקנה: כל פתרונות של $\dot{y}=A(t)y+B(t)$ יציבים אסימפטוטית או לא יציבים אסימפטוטית

ביחד עם כל הפתרונות של המערכת ההומוגנית $\dot{y}=A(t)y$

אותו דבר לגבי יציבות (רגילה)

דוגמא

האם יש פתרונות יציבים למשוואה

$$y^{(7)} - y^{(6)} + \cos t\, y''' - t^2 y = 0$$

פתרון: אין, לפי נוסחת Abel

$$W' = W \Rightarrow W(t) = W(t_0)e^{t-t_0}$$

$W[y_1,\dots,y_7](t)$ אם $W(t_0)\neq 0$ $W(t)\to\pm\infty$

$$= W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_7 \\ y_1' & y_2' & & y_7' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(6)} & y_2^{(6)} & & y_7^{(6)} \end{vmatrix}$$

נבחר תנאי התחלה ל $y_1(t),\dots,y_7(t)$ קטנים ככל שנרצה עם התנאי היחיד $W(t_0)\neq 0$

אז $W(t)\to\infty \Leftarrow$ אחת מהעמודות לא חסומה

$\Leftarrow$ יש פתרון שמתבדר ל ∞

$\Leftarrow$ אין יציבות.

מסקנה: כל פתרוני' של המשוואה,

$$y^{(7)} - y^{(6)} + \cos t\, y'' - t^2 y = e^t - \ln(t^2+1)$$

לא ~~חסומים~~ יציבים

(משוואה לא הומוגנית)

דוגמא האם פתרון לבעיית קושי

$$t^2\ddot{y}+3t\dot{y}+y=\arctan(t^2+1)$$

$$y(1)=\pi,\ \dot{y}(1)=-1$$

יציב אסימפטוטית?

תשובה: כן מחליף זמן $t=e^{\tau}$ ונקבל

$$y''+2y'+y=\arctan(e^{2\tau}+1)$$

יש יציבות אס' — $\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2$

החלפת זמן $\tau=\ln t$ לא משנה את היציבות! $\Rightarrow$ כל פתרונות יציבים אס' בתחום $t\geq t_0>0$

הגדרה ~~משפט~~ פולינום נקרא **יציב** אם כל השורשים שלו נמצאים ב-$\mathbb{C}_-$ (חלקם הממשיים שליליים)

משפט אם פולינום אופייני יציב אז כל פתרונות מע"ד ליניארית

$$\dot{y}=A(t)y+B(t)$$

יציבים אסימפטוטית

מקרה פרטי: מע"ד סקלרי מסדר גבוה

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_ny=b(t)$$

רציפה

$a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ קבועים

הוכחה: תרגיל

יום ו

קריטריון Routh–Hurwitz

מגדיר מתי כל השורשים של הפולינום עם מקדמים ממשיים הם ב־$\mathbb{C}_-$. הסתכלו ב Wikipedia את הנוסחאות

משפט שימושי

1. אם $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$, $a_i \in \mathbb{R}$ פולינום עם ממ"מ הוא יציב אז $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

2א. אם יש מקדם שלילי $\Leftarrow$ יש שורש אחד לפחות עם חלק ממשי חיובי

2ב. אם כל המקדמים חיוביים חוץ מכמה אפסים אז או שיש שורש עם חלק ממשי חיובי או שיש שורש מדומה

3. פולינום ממעלה 2, עם מקדמים ממשיים יציב $\Leftrightarrow a_1, a_2 > 0$

הוכחה:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

א. $a_1^2 - 4a_2 \geq 0 \Rightarrow \cancel{a_1 > 4a_2}$ $\cancel{\sqrt{a_1^2-4a_2}}$ שורשים ממשיים $\Rightarrow$ יציבות $\Rightarrow a_1 < 0, a_2 > 0$

$a_1 < 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} < 0$

$a_1^2 - 4a_2 \leq 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \underbrace{-\frac{a_1}{2}}_{\text{מצייר יציבות}} \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\, i$, $a_2 > 0$

ב. להפוך: אותם שני מקרים

3. $p(\lambda) = \begin{cases} \lambda = \alpha \pm \beta i \\ \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2 \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \lambda^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 \end{cases}$

שורשים מרוכבים   שורשים ממשיים

$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_k)\prod_{j=1}^{e}(\lambda^2-2\alpha_j\lambda+\alpha_j^2+\beta_j) \quad .1 \quad 152$$

$\lambda_1,\dots,\lambda_k<0$ $\lambda=\alpha_j\pm\beta_j i,\ \alpha_j<0$

אם פולינום יציב $\Leftarrow$ $\left|\begin{array}{l}-\lambda_1,\dots,-\lambda_k>0\\ -\alpha_1,\dots,-\alpha_e>0\end{array}\right.$ מש.ל

2. תלות רציפה של מקדמים הפולינום בשורשים (ראה, למשל)

מש.ל

דוגמאות

$\lambda^2+2\lambda+1,\ \lambda^2+\pi\lambda+e,\ \lambda^2+0.1\lambda+0.0001$

כולם יציבים

$\lambda^2+\pi\lambda-1,\ \lambda^2-e^{\pi}\lambda+\pi^{e}$ לא יציבים

יש שורשים ב $\mathbb{C}_+=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}\,\lambda>0\}$

$$\ddot y+\pi\dot y+\pi^2 y=\cos t+\frac{1}{t^2+1}$$

כל הפתרונות יציבים

$$\dddot y+\pi\ddot y-\dot y=e^t$$

אין יציבות לא אסימפטוטית ולא בכלל

$$y^{(7)}-\dot y=\text{constant}$$

אין יציבות בכלל

$p(\frac{d}{dt})y=0$

סיכום: במקרה של משוואה סקלרית מסדר גבוה

אם יש ~~...~~ שורשים מדומים

$\Leftarrow$ אין יציבות אסימפטוטית

ריבוי גדול מ-1 $\Leftarrow$ אין יציבות

$\alpha=0,\ \lambda_1=\alpha\pm\beta i\quad \mathrm{Re}\,\lambda_1=0$ מקרה ג) 153

ריבוי m

$$y=\cancel{c_1e^{\lambda_1t}}\ \cos(\beta t)(c_1+\dots+c_mt^{m-1})+\sin(\beta t)(d_1+\dots+d_mt^{m-1})$$

$m>1 \Rightarrow$ פתרון | לא חסום ויש

$m=1 \Rightarrow$ | אין יציבות אסימפטוטית

גם [illegible]
מתקיים
למקרה
$p(\frac{d}{dt})y=b(t)$

$\cancel{A(\frac{d}{dt})}$

דוגמא

$$y^{(11)}+y^{(5)}+y^{(3)}=0$$

יש פתרונות לא חסומים

דוגמא

למערכה כזו לא [illegible]

$$\dot y=Ay\ ,\quad A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\quad \lambda_{1,2,3,4}=\pm i$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}y_3\\y_4\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_3\\y_4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_3\\c_4\end{pmatrix}$$

כמה שראינו במקרה

$p(\frac{d}{dt})y = b(t)$, רציפה - b

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b(t)$, $p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$

כל הפתרונות יציבים או יציבים אס׳

או לא יציבים בכלל <u>ביחד</u>

כי לכל פתרון $y(t)$ ו $y_*(t)$

$\hat{y}(t) = y(t) - y_*(t) \Rightarrow p(\frac{d}{dt})\hat{y} = 0$

$y_*(t) \to 0$

<u>דוגמא</u>

$\dddot{y} + \pi^2 \ddot{y} - \dot{y} + \cos(1) \cdot y = e^{\cos t}$

אין פה פתרונות יציבים!

$t^2 \ddot{y} + \pi t \dot{y} + \pi^7 y = \ln(1 + t^7)$

כל הפתרונות יציבים כי ההחלפה

$t > 0$, $t = e^\tau$

מעבירה את המשוואה ל

$y'' + \underbrace{(\pi - 1)}_{\text{חיוביים!}} y' + \underbrace{\pi^7}_{} y = \ln(1 + e^{7\tau})$

$\le |t| + 1$

$|t-1| \le |t| + 2$

$t^2 \ddot{y} + \frac{\pi}{4} t \dot{y} + \pi^7 y = \tan\left(\frac{|t-1|}{2 + |t|}\right)$ רציף

אין פה פתרונות יציבים

כי אחרי ההחלפה, $t > 0$, $t = e^\tau$

$y'' + \underbrace{\left(\frac{\pi}{4} - 1\right)}_{<0} y' + \pi^7 y = \tan\left(\frac{|e^\tau - 1|}{2 + e^\tau}\right)$ מתבדרים

1549

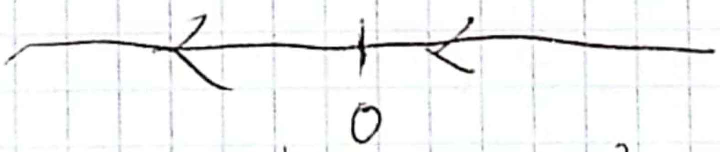
דוגמא

תמיד רואים משהו!

מקרה לא ליניארי סקלרי

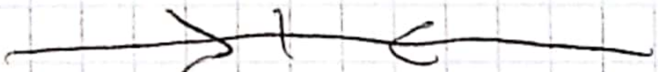
$$\dot{y} = -\cos^2 y \cdot y \qquad y \in \mathbb{R}$$

אין יציבות



$$\dot{y} = -\cancel{\cos^2 y} \cdot y$$

יש יציבות אסימפטוטית



יציבות בקירוב הראשון

$y\in\mathbb{R}^n$, $\dot{y}=f(y)$, $f(y_*)=0$ — נק' קריטית

$y(t)=y_*=\text{const}$ — פתרון קבוע

אפשר לבצע את הלינאריזציה,

$$\dot{z}=Az,\quad A=\frac{\partial f}{\partial y}(y_*)$$

(מטריצה של נגזרות חלקיות (מטריצת Jacobi))

$$f=\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y_*), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(y_*)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(y_*), & \dots, & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(y_*)\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Spec}A$ – ערכים עצמיים

$$\mathbb{C}_-=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}\lambda<0\}$$

$$\mathbb{C}_+=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}\lambda>0\}$$

משפט (ללא הוכחה)

1. $\mathrm{Spec}A\subset\mathbb{C}_-\Rightarrow y_*$ - היא נק' איזון יציבה אסימפטוטית

2. $\mathrm{Spec}A\cap\mathbb{C}_+\neq\emptyset$ יש ערכים עצמיים עם חלק ממשי חיובי

$\Leftarrow$ אין יציבות לפתרון הקבוע $y(t)=y_*$ יש בכל סביבה קטנה פתרונות עם תנאי התחלה קטנים כל שהוא שהם עוזבים אותה.

דוגמא

15

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \sin(y_1 - 2y_2 - 1) \\ \dot{y}_2 = 3y_1 - 5y_2 + y_1 y_2 - 3 \end{cases} \qquad y_* = (1,0)^T$$

$f(y_*) = 0$

$$A = \frac{\partial f}{\partial y}(y_*) = \left.\begin{pmatrix} \cos(y_1 - 2y_2 - 1), & -2\cos(y_1 - 2y_2 - 1) \\ 3 + y_2, & -5 + y_1 \end{pmatrix}\right|_{(y_1,y_2)=(1,0)} = \begin{pmatrix} 1, & -2 \\ 3, & -4 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$$

(לא 3)

יש יציבות אסימפטוטית!

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \tan(y_1 + 2y_2 - 2) \\ \dot{y}_2 = -\sin(2y_1 - y_2 + 1) \end{cases} \qquad y_* = (0,1)^T$$

$f(y_*) = 0$ בודקים!

$$A = \frac{\partial f}{\partial y}(y_*) = \left.\begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2(y_1 + 2y_2 - 2)} & \frac{2}{\cos^2(y_1 + 2y_2 - 2)} \\ 2\cos(2y_1 - y_2 + 1) & , -\cos(2y_1 - y_2 + 1) \end{pmatrix}\right|_{\substack{y_1 = 0 \\ y_2 = 1}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad p(\lambda) = \lambda^2 - 5$$

אין יציבות בכלל!

(לא לינאריות)

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -4y_2 \pm y_1^3 \\ \dot{y}_2 = 3y_1 \pm y_2^3 \end{cases} \qquad y_* = (0,0)^T, \; A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \; p(\lambda) = \lambda^2 + 12$$

מקרה קריטי

משפט לא עוזר!

$$(3y_1^2 + 4y_2^2)^\bullet = \pm(6y_1^4 + 8y_2^4)$$

$-$ ⇐ יציבות אס'

$+$ ⇐ אין יציבות, מתבדרות ⇐ ∞

פתרון מד"ר בעזרת טורים

$$a(t)\ddot{y} + b(t)\dot{y} + c(t)y = d(t),\quad y\in\mathbb{R}$$

כל המקדמים אנליטיים בסביבת $t=t_0$, $a(t_0)\neq 0$

t_0 - נקרא אז נק' רגולרית

אנליטיות:

$$a(t) = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + \dots$$

$$b(t) = b_0 + b_1(t-t_0) + b_2(t-t_0)^2 + \dots$$

$$c(t) = c_0 + c_1(t-t_0) + c_2(t-t_0)^2 + \dots$$

טורים מתכנסים ב $|t-t_0| < r_a, r_b, r_c$ מתאימים

$$r_a = \varlimsup_{k\to\infty} |a_k|^{-\frac{1}{k}},\quad r_b = \varlimsup_{k\to\infty} |b_k|^{-\frac{1}{k}},\quad r_c = \varlimsup |c_k|^{-\frac{1}{k}}$$

אז לכל תנאי התחלה $y(t_0)=\alpha_0,\ \dot{y}(t_0)=\alpha_1$

יש פתרון אנליטי בצורה

$$y(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t-t_0) + \alpha_2(t-t_0)^2 + \dots$$

עם רדיוס התכנסות $\min(r_a, r_b, r_c)$

דוגמא $\ddot{y} + 4y = 0$

$$\alpha_0 = y(0),\quad \alpha_1 = \dot{y}(0) \Rightarrow y = \underbrace{\alpha_0\cos(2t)}_{\alpha_0\left(1-\frac{1}{2}(2t)^2+\dots\right)} + \underbrace{\alpha_1\frac{\sin(2t)}{2}}_{\alpha_1\left(\frac{2t}{2}-\frac{(2t)^3}{2\cdot 3!}+\dots\right)}$$

כאשר a,b,c פולינומים ממעלה עצמן

קיים הטור, טור Taylor

הוא מקרה פרטי אבל לא חייב

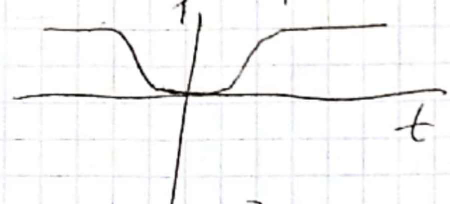
להתכנס

$$f(t)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & t>0 \\ 0, & t=0 \end{cases}$$

<u>דוגמא</u> 158

$f(t)$ של [illegible] ב-0, נגזרות קיימות

$f(t) \neq 0$



$f^{(k)}(0)=0 \ \forall k$,

$f(t) \neq 0+0\cdot t+0\cdot t^2+\dots$

$f(t)=0+\dots+\boxed{R_k(t)}$ — שארית טור Taylor

<u>טורים שימושיים</u>

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\dots$$

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\dots$$

$$\sin t=\frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\dots$$

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\dots \qquad \ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\dots$$

לכל פונקציה חלקה $y(t)$ יש "[illegible]" [illegible]

$$y(t)=\alpha_0+\alpha_1(t-t_0)+\dots+\alpha_k(t-t_0)^k+R_k(t)$$

$$R_k=o\left((t-t_0)^k\right) \quad , \quad R_k=O\left((t-t_0)^{k+1}\right)$$

זאת אומרת שאם קיים גם כן ⇐

$$\boxed{\alpha_j=\frac{y^{(j)}(t_0)}{j!}} \quad j=0,\dots,k$$

~~דמגוא~~ <u>דוגמא</u>

<u>פיתוח</u> לטור חזקות של e^t ידוע

מהגדרה, הפתרון היחיד:

$$\left(e^t\right)^{\cdot}=e^t,\quad e^0=1$$

<u>פתרון</u> נניח $y=e^t=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\dots$

נציב במשוואה! $\dot{y}=y,\ y(0)=\alpha_0$

$$\alpha_1+2\alpha_2 t+3\alpha_3 t^2+\dots+k\alpha_k t^{k-1}+\dots=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\dots+\alpha_{k-1}t^{k-1}+\dots$$

מתנאי ההתחלה נקבל $\alpha_0+0=1\Rightarrow\alpha_0=1$

$$\left.\begin{array}{l|l}
t^0 & \alpha_1=\alpha_0\\
t^1 & 2\alpha_2=\alpha_1\\
t^2 & 3\alpha_3=\alpha_2\\
\vdots & \\
t^{k-1} & k\alpha_k=\alpha_{k-1}\\
\vdots &
\end{array}\right]\Rightarrow
\begin{array}{l}
\alpha_1=\alpha_0=1\\
\alpha_2=\alpha_1/2=\frac{1}{2}\\
\alpha_3=\alpha_2/3=\frac{1}{6}\\
\dots\\
\alpha_k=\frac{\alpha_{k-1}}{k}=\frac{1}{(k-1)!\,k}=\frac{1}{k!}
\end{array}$$

משווים לפי אינדקסים $\alpha_{k-1}=\frac{1}{(k-1)!}$ — e

<u>פיתוח</u> סינוס

פונקציה $\sin t$ מקדמים

$$\ddot{y}+y=0,\quad y(0)=0,\ \dot{y}(0)=1$$

$$y=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\alpha_3 t^3+\dots$$
$$\dot{y}=\alpha_1+2\alpha_2 t+3\alpha_3 t^2+4\alpha_4 t^3+\dots$$
$$\ddot{y}=2\alpha_2+6\alpha_3 t+12\alpha_4 t^2+20\alpha_5 t^3+\dots$$

$y(0)=0\Rightarrow\alpha_0=0$

$\dot{y}(0)=1\Rightarrow\alpha_1=1$

$$2\alpha_2+6\alpha_3 t+12\alpha_4 t^2+20\alpha_5 t^3+\dots+k(k+1)\alpha_{k+1}t^{k-1}+\dots+\alpha_0+\alpha_1 t+\dots=0$$

$$\begin{array}{l|l}
t^0 & 2\alpha_2+\alpha_0=0\ \Rightarrow\ \alpha_2=-\frac{\alpha_0}{2}=0\\
t^1 & 6\alpha_3+\alpha_1=0\ \Rightarrow\ \alpha_3=-\frac{\alpha_1}{6}=-\frac{1}{6}
\end{array}$$

...

160 לפי האנליזה נקבל

$\alpha_{2k} = 0 \;, \quad k = 0, 1, \ldots$

$\alpha_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$