22/12-2020 10 [illegible]

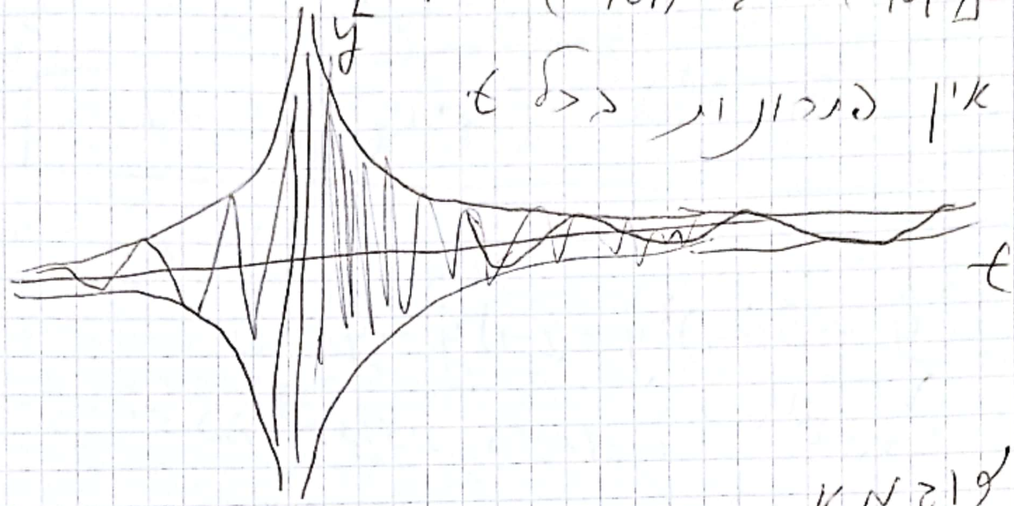
דוגמא 136

$$t^2\ddot{y}+3t\dot{y}+2y=0$$

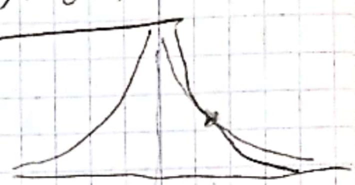
$$p(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+2\ ,\ \lambda_{1,2}=-1\pm i$$

$$y=\begin{cases} t^{-1}\left[c_1\cos(\ln t)+c_2\sin(\ln t)\right], & t>0\\ t^{-1}\left[\tilde{c}_1\cos(\ln|t|)+\tilde{c}_2\sin(\ln|t|)\right] & t<0\end{cases}$$

אין פתרונות בכל t



דוגמא



$$t^2\ddot{y}+3t\dot{y}+y=0$$

$$p(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2$$

$$y=\begin{cases} c_1t^{-1}+c_2\ln(t)\cdot t^{-1}, & t>0\\ \tilde{c}_1t^{-1}+\tilde{c}_2\ln|t|\,t^{-1}, & t<0\end{cases}$$

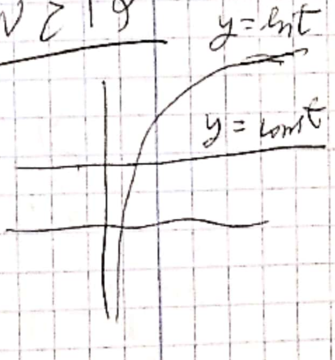
אין פתרונות רציפים

דוגמא

$$t^2\ddot{y}+t\dot{y}=0$$

$$p(\lambda)=\lambda^2$$

$$y=\begin{cases} c_1+c_2\ln t, & t>0\\ \tilde{c}_1+\tilde{c}_2\ln|t|, & t<0\end{cases}$$



$\forall t\in\mathbb{R}\quad y\equiv c$ יש פתרון קבוע

משוואת מסדר 3 (137)

$$t^3 \dddot{y} + a_1 t^2 \ddot{y} + a_2 t \dot{y} + a_3 y = 0$$

$$y = t^\lambda$$

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + a_1\lambda(\lambda-1) + a_2\lambda + a_3$$
$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda + a_1\lambda^2 - a_1\lambda + a_2\lambda + a_3$$

$$\boxed{P(\lambda) = \lambda^3 + (a_1-3)\lambda^2 + (-a_1+a_2+2)\lambda + a_3}$$

דוגמא

$$(t-1)^3 \dddot{y} + 3(t-1)^2 \ddot{y} + (t-1)\dot{y} - y = 0$$

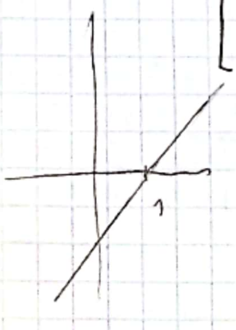
יש כאן הזזה נציב $\hat{t} = t-1$, $y = (t-1)^\lambda$

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (3-3)\lambda^2 + (-3+1+2)\lambda - 1 = \lambda^3 - 1$$

$$\lambda^3 - 1 = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$$

$$\lambda = 1, -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$y = \begin{cases} c_1(t-1) + (t-1)^{-\frac{1}{2}}\left[c_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t-1)\right) + c_3\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t-1)\right)\right] & t>1 \\ \tilde{c}_1(t-1) + |t-1|^{-\frac{1}{2}}\left[\tilde{c}_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|t-1|\right) + c_3\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|t-1|\right)\right] & t<1 \end{cases}$$



יש פתרון $y = c(t-1)$ תקף ב R כולו

דוגמא

$$(t+1)^3 \dddot{y} + (t+1)\dot{y} - y = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (0-3)\lambda^2 + (0+1+2)\lambda - 1 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda-1)^3$$

$$y = \begin{cases} c_1(t+1) + c_2\ln(t+1)\cdot(t+1) + c_3\ln^2(t+1)\cdot(t+1) & t>-1 \\ \tilde{c}_1(t+1) + \tilde{c}_2\ln|t+1|\,(t+1) + \tilde{c}_3\ln^2|t+1|\,|t+1| & t<-1 \end{cases}$$

כל הפתרונות מתאפסים ב $t=-1$, פתרון $c(t+1)$ אמיתי בR

138 **אוילר** | למצוא פתרון לבעיית קושי

$$t^2\ddot{y} + 4t\dot{y} + 2y = te^t, \quad t>0$$

$$y(1)=0, \quad \dot{y}(1)=1$$

$$y = y_h + y_p$$

נמצא פתרון לבעיה ההומוגנית

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda+1)$$

$$y_h = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2} \quad ; \quad y_p = ?$$

צריך לעבור למערכת, שמאפשרת שימוש לווריאציית המקדמים

$$\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}^{\cdot} = A(t)\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{t}e^t \end{pmatrix}$$

חילקנו ב-t^2 את המשוואה!

$$\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \Phi(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{-1} & t^{-2} \\ -t^{-2} & -2t^{-3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_p \\ \dot{y}_p \end{pmatrix} = \Phi(t)\begin{pmatrix} \tilde{c}_1(t) \\ \tilde{c}_2(t) \end{pmatrix}$$

מחפשים

$$\cancel{\dot{\Phi}\tilde{C}} + \Phi\dot{\tilde{C}} = \cancel{A\Phi\tilde{C}} + B, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{t}e^t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{t}\dot{\tilde{c}}_1 + \frac{1}{t^2}\dot{\tilde{c}}_2 = 0 & \Big| \times t^2 \\ -\frac{1}{t^2}\dot{\tilde{c}}_1 - \frac{2}{t^3}\dot{\tilde{c}}_2 = \frac{1}{t}e^t & \Big| \times(-t^3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t\dot{\tilde{c}}_1 + \dot{\tilde{c}}_2 = 0 \\ t\dot{\tilde{c}}_1 + 2\dot{\tilde{c}}_2 = -t^2e^t \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} t & 1 \\ t & 2 \end{vmatrix} = t$$

$$\dot{\tilde{c}}_1 = \frac{1}{t}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -t^2e^t & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{t}t^2e^t = te^t$$

$$\dot{\tilde{c}}_2 = \frac{1}{t}\begin{vmatrix} t & 0 \\ t & -t^2e^t \end{vmatrix} = \frac{1}{t}(-t^3e^t) = -t^2e^t$$

$$\tilde{c}_1 = \int_1^t se^s\,ds = se^s\Big|_1^t - \int_1^t e^s\,ds = te^t - \cancel{e} - e^t + \cancel{e}$$

$$\tilde{c}_2 = -\int_1^t s^2e^s\,ds = -s^2e^s\Big|_1^t + 2\int_1^t se^s\,dt =$$

שמוש

$$= -t^2e^t + e + 2te^t - 2e^t$$

$$y_p = \tilde{c}_1 t^{-1} + \tilde{c}_2 t^{-2} = (te^t - e^t)\frac{1}{t} + (-t^2e^t + 2te^t - 2e^t + e)\frac{1}{t^2}$$

($\int_1^t \dots$ כי) $y_p(1) = \dot{y}_p(1) = 0$ לפי השיטה

$$y_p = \cancel{e^t} - \frac{1}{t}e^t - \cancel{e^t} + 2\frac{1}{t}e^t - 2\frac{1}{t^2}e^t + \frac{e}{t^2} =$$

$$= \frac{1}{t}e^t + \cancel{\frac{2}{t}e^t} - \frac{2}{t^2}e^t + \frac{e}{t^2}$$

$$y = c_1t^{-1} + c_2t^{-2} + y_p$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(1) \\ \dot{y}(1) \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} \frac{1}{t} & \frac{1}{t^2} \\ -\frac{1}{t^2} & -\frac{2}{t^3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right|_{t=1} + 0 = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_1 - 2c_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -c_2 = 1,\ c_2 = -1,\ c_1 = 1$$

$$\boxed{y = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}e^t - \frac{2}{t^2}e^t + \frac{e}{t^2}}$$

תרגיל

$t^2\ddot{y} - t\dot{y} + y = \ln t \quad , \quad t > 0$

$y(1) = \dot{y}(1) = 0$

החלפה:

$\tau = \ln t \ , \ t = e^\tau$

$\frac{d}{dt}(\cdot) = \frac{d}{d\tau}(\cdot)\frac{1}{t} \quad , \quad \frac{d^2}{dt^2}(\cdot) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{d\tau}(\cdot)\right) =$

$= -\frac{1}{t^2}\frac{d}{d\tau} + \frac{1}{t^2}\frac{d^2}{d\tau^2}$

$y'' - 2y' + y = \tau \quad , \quad p(\lambda) = (\lambda - 1)^2$

$y = c_1 e^\tau + c_2 \tau e^\tau + y_p$ אין רזוננס

$y_p = d_1 + d_2\tau$ מנחשים

$y_p' = d_2 \ , \ y_p'' = 0$

$-2d_2 + d_1 + d_2\tau = \tau$

$d_1 - 2d_2 = 0$

$d_2 = 1 , \ d_1 = 2$

$y_p = 2 + \tau$

$y(\tau) = c_1 e^\tau + c_2 \tau e^\tau + 2 + \tau$

$$\boxed{y(t) = c_1 t + c_2 \ln t \cdot t + 2 + \ln t}$$

$y(1) = 0 , \ \dot{y}(1) = 0$ נציב תנאי:

ונקבל

$0 = y(1) = c_1 + c_2 \ln 1 \cdot 1 + 2 + \ln 1 = c_1 + 2$

$$\boxed{c_1 = -2}$$

$\dot{y} = c_1 + \frac{c_2}{t} \cdot t + c_2 \ln t + \frac{1}{t} = c_1 + c_2 + c_2 \ln t + \frac{1}{t}$

$0 = \dot{y}(0) = -2 + c_2 + 0 + 1 \rightarrow \boxed{c_2 = 1}$

(141) $(t-1)^2\ddot{y}+3(t-1)\dot{y}+y=\frac{1}{(t-1)}$, $t>1$ 	אוילר (141)

$y(2)=0,\ \dot{y}(2)=1$

$t=2 \Rightarrow \tau=0 \quad \tau=\ln(t-1),\ t-1=e^{\tau}$ החלפה!

כמו שכתבת חישבנו

$\frac{d}{dt}(\cdot)=\frac{d}{d\tau}(\cdot)\frac{d\tau}{dt}=\frac{d}{d\tau}(\cdot)\cdot\frac{1}{t-1}=\frac{d}{d\tau}(\cdot)\ \frac{1}{t-1}$

$\frac{d^2}{dt^2}(\cdot)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(\cdot)\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{d\tau}(\cdot)\cdot\frac{1}{(t-1)}\right)=-\frac{1}{(t-1)^2}\frac{d}{d\tau}(\cdot)+\frac{1}{(t-1)^2}\frac{d^2}{d\tau^2}(\cdot)$

~~y הנגזרות של פי על כך~~ במקום

$y''+(3-1)y'+y=e^{-\tau}$

$p(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2$ 	תהודה! $e^{-\tau}$

$y=c_1e^{-\tau}+c_2\tau e^{-\tau}+y_p,\quad y_p=d\tau^2e^{-\tau}$

$\cancel{\tau de^{-\tau}}$ 	מציבים 	$y_p'=d(-\tau^2+2\tau)e^{-\tau}$

$y_p''=d(\tau^2-2\tau-2\tau+2)e^{-\tau}$

$=d(\tau^2-4\tau+2)e^{-\tau}$

$d\left[\cancel{\tau^2}-4\tau+2+2(\cancel{-\tau^2}+2\tau)+\cancel{\tau^2}\right]=1$

חייב להצטמצם בה!

$2d=1 \qquad d=\frac{1}{2}$

$y=c_1e^{-\tau}+c_2\tau e^{-\tau}+\frac{1}{2}\tau^2e^{-\tau}$, $y'=-c_1e^{-\tau}+c_2(-\tau+1)e^{-\tau}+(-\frac{1}{2}\tau^2+\tau)e^{-\tau}$

$y\big|_{\tau=0}=y\big|_{t=2}=0,\quad \dot{y}\big|_{t=2}=\frac{1}{2-1}y'\big|_{\tau=1}=y'\big|_{\tau=0}$ 	תנאי התחלה $\boxed{y\big|_{\tau=0}=0,\ y'\big|_{\tau=0}=1}$

$\left.\begin{aligned}0&=c_1+0\\1&=-c_1+c_2\end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned}c_1&=0\\c_2&=1\end{aligned}$ 	$y=\tau e^{-\tau}+\frac{1}{2}\tau^2e^{-\tau}$

$=\ln(t-1)\frac{1}{t-1}+\frac{1}{2}\ln^2(t-1)\frac{1}{t-1}$

$e^{-\tau} = e^{-\ln(t-1)} = \frac{1}{t-1}$ כלל!!

פתרון

$$y = \frac{c_1}{t-1} + c_2\frac{\ln(t-1)}{t-1} + \frac{1}{2}\frac{\ln^2(t-1)}{t-1}$$

פתרון לבעיית קושי:

$$y = \frac{\ln(t-1)}{t-1} + \frac{7}{2}\frac{\ln^2(t-1)}{t-1}$$

<u>דוגמא</u> לפתור בעזה

$$(t+1)^3\dddot{y} - \cancel{(t+1)^2\ddot{y}} + (t+1)\dot{y} - y = 0$$

~~תוצאה~~

באותה צורה מחפשים פתרון פרטי למשוואה

$$(t+1)^3\dddot{y} + (t+1)\dot{y} - y = t^2,\ t>-1$$

~~הוכחה לפני נוסחה~~:

$\cancel{t^3 y''' + a_1 t^2 y'' +}$ מציבים $y=(t+1)^\lambda$ מקבלים

$$(t+1)^3\left(\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda - 1\right) = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda + \lambda - 1 = 0$$

פולינום אופייני $\underbrace{\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1} = (\lambda-1)^3 = 0$

ראינו גם שהחלפה

$t>-1,\quad t+1 = e^\tau,\ \tau = \ln(t+1)$

מביאה למשוואה עם אותם מקדמים

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

לכן

$$y = c_1e^\tau + c_2\tau e^\tau + c_3\tau^2e^\tau$$

(43)

הפתרון הכללי ב t הוא

$$y=\begin{cases} c_1(t+1)+c_2\ln(t+1)(t+1)+c_3\ln^2(t+1)\cdot(t+1) & t>-1 \\ \tilde{c}_1|t+1|+\tilde{c}_2\ln|t+1|\,|t+1|+\tilde{c}_3\ln^2|t+1|\,|t+1| & t<-1 \end{cases}$$

יש פתרון יחיד $y=c(t+1)$

אפשר לתפור פתרונות רציפים (לא גזירים ב $t=-1$)

$$\lim_{t\to-1}\ln|t+1|(t+1)=\lim_{t\to-1}\ln^2|t+1|(t+1)=0$$

תשובה לסעיף 2:

$$t^2=(t+1-1)^2=(t+1)^2-2(t+1)+1=$$

$$=e^{2\tau}-\underbrace{2e^{\tau}}_{\text{רזוננס}}+1$$

לכן הפתרון הפרטי מחפשים בצורה,

$$y_p=d_1e^{2\tau}+d_2\tau e^{\tau}+d_3$$

הוא יקבל את הצורה,

$$y_p=d_1(t+1)^2+d_2(t+1)\ln(t+1)+d_3$$

בזמן המקורי.

כמובן אפשר לחפש פתרון ע״י שיטת וריאציית המקדמים.

מושג היציבות

זה אחד מהמושגים היסודיים ביותר
גם במע"ד וגם בחיים בכלל.
בצורה אינטואיטיבית
יציבות זאת התכונה המאפשרת
להגיע בצורה ריגורית
"מה שהיה זה מה שיהיה"

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & y \in \mathbb{R}^n \\ y(t_0) = \xi_0, & y_*(t) : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$y_*(t_0) = \xi_0$$

יציבות של הפתרון $y_*(t)$ לפי ליאפונוב
Lyapunov

זה בעצם תלות רציפה של הפתרון
לבעיית Cauchy מעל $t \in [0,\infty)$
בתנאי ההתחלה ξ

<u>הגדרה</u>

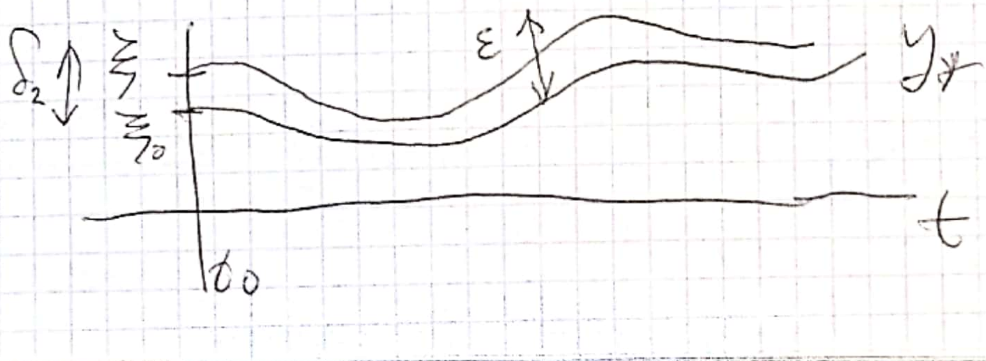
y_* יציב לפי ליאפונוב אם

1. קיים $\delta_1 > 0$ כך שלכל $\xi : \|\xi - \xi_0\| < \delta_1$
ישנו פתרון $y(t), t \geq 0$ של המקיים $y(t_0) = \xi$

$\delta_2 < \delta_1$

2. "רציפות"

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0 : \|y(t_0) - \xi_0\| < \delta_2 \Rightarrow \forall t > t_0 \ \|y(t) - y_*(t)\| < \varepsilon$$



אנו מעוניינים במקרה פרטי של
נק' קריטית
פתרון קבוע

$$\dot y = f(t,y)$$

$$\forall t>t_0 : f(t,\xi)\equiv 0$$

$y=\xi$ פתרון קבוע

פתרון קבוע יציב, שיווי משקל יציב,
מצב מתמיד יציב,
נק' איזון יציבה, ...

נק' שיווי משקל $y=\xi$ נקראת יציבה
אם בסביבתה כל פתרון אפשר
להאריך עד אין-סוף בזמן (רק בכיוון $+\infty$)
ו-אם לכל $\varepsilon>0$ $\exists\delta$ אם מתחילים מספיק
קרוב ל-ξ אז הפתרון אף פעם לא
הולך מ-ξ יותר מ-ε.

דוגמא

$$\dot y = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} y\ ,\quad y\in\mathbb{R}^2 \qquad y(0)=0$$

$$\boxed{y_*(t)\equiv 0}$$

הפתרון

$$y=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y(0)\\ \dot y(0)\end{pmatrix}$$

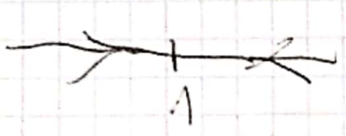
$$y^2+\dot y^2 = y(0)^2+\dot y(0)^2 = const$$

פשוט: $\varepsilon=\delta$

דוגמא

$$\dot y = -(y-1)\ ,\ y\in\mathbb{R}$$

$$\xi = 1,\ y_* = 1$$



יציב

הוכחה:

המרחק מ-1

$(y-1)^{\cdot} = \dot{y} = -(y-1) < 0$ כאשר ורק כאשר $y>1$

< 0 כאשר $y<1$

שוב לוקחים $\delta = \varepsilon$

משפט

$$\dot{y} = Ay$$

A - מטריצה קבועה

אם $\operatorname{Spec} A \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda < 0\} = \mathbb{C}_-$

אז הפתרון $y=0$ יציב אסימפטוטית

יציבות אסימפטוטית:

יציבות +

$$\lim_{t\to\infty} \|y(t) - y_*(t)\| = 0$$

~~משפט~~

"הוכחה": כל הפתרונות הם קומבינציות של פולינומים

$0 \longleftarrow e^{+\lambda t}(c_1 + c_2 t^2 + \dots + c_k t^{m_k - 1})$

דוגמא

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

פתרון $y=0$ יציב אס'

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$

אם יש ערך עצמי אחד עם חלק ממשי חיובי

$\Leftarrow$ אין יציבות