

מאמר צינור (צינור) גילוי
2020

כרטיז ארזיה עמק

עזר קננה: עפי בקסה ג - Zoom

<http://www.tau.ac.il/~levant/ode/>

קורס צומה (יוקר מתמטי):

<http://www.tau.ac.il/~levant/ode1/>

יש ספר ירזזים עם כרזון

חומר עמק פ גרזיה ג'ר

Arnold Ordinary Differential Equations (ODE)

Boyce, DiPrima Elementary DEs
and Boundary Value Problems

~~Coddington, Levinson~~ → דס כרז

20/10-2020

הרצאה 1

(1)

משוואות דיפרנציאליות

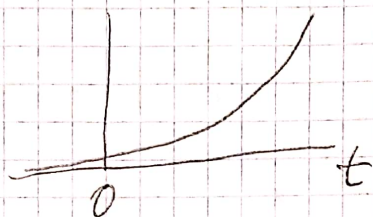
Newton: זה שיהיה לנתון מהאוויר
פידר (צ'יאו) פדור

מאחר שפידר/צ'יאו קטן
מתאר שנתון עכשיו גזמן
(לא נחמה)

גורם הצדקה הקורונה
כש חוסר מצוקה אכזרית היא
אז אם מפרד האוכל הוא N

קדם $dN = \alpha N dt$

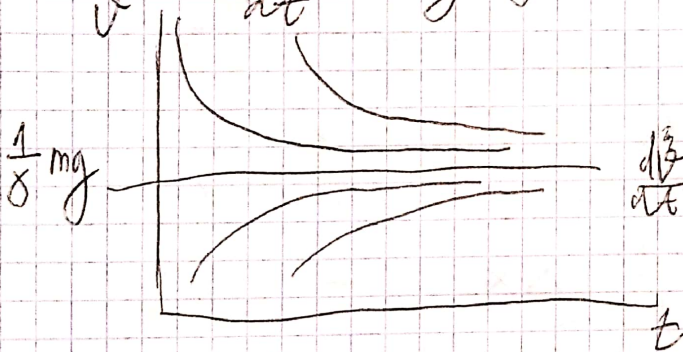
$\frac{dN}{dt} = \alpha N \Rightarrow N(t) = N(0)e^{\alpha t}$ (נראה)



אקספוננציאלי
"גורם עקומה"

גורם (נראה) מושך

$m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$



מ-0 מוארך
N-gamma v יכול

$\frac{dv}{dt} = 0, v = const$

1960-1970 אוכלוסייה כצ'ור הארץ קצ'ור

$N = \frac{K}{2020-t}$
מספר
איש

$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{K}{2020-t} \right) = \frac{K}{(2020-t)^2} = K' N^2$

הגדלה גדולה פרופורציונלית
למספר נשים אש: מאים
מספר נשים: $\frac{1}{2} N(N-1) \approx \frac{1}{2} N^2$

$\frac{dN}{dt} = (\lambda - \mu)N - \epsilon N^2$
 2.3 $\lambda = 0.02$ $\mu = 0.01$ $\epsilon = 10^{-12}$
 2% $\lambda = 0.02$ $\mu = 0.01$ $\epsilon = 10^{-12}$

2

$$\frac{dN}{dt} = (\lambda - \mu)N - \epsilon N^2$$

$\frac{dN}{dt} = 0 \Rightarrow N(\lambda - \mu - \epsilon N) = 0$
 $N = \frac{\lambda - \mu}{\epsilon} = \frac{0.02 - 0.01}{10^{-12}} = 2 \cdot 10^{10}$

$f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$: דאטא

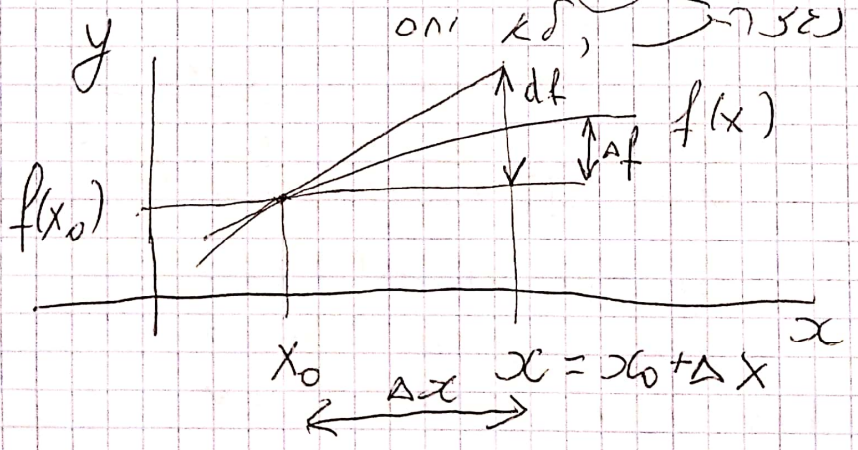
$y' = \frac{dy}{dx}$, $z'_u = \frac{\partial z}{\partial u}$, $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}(x)$

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}$

$y = f(x)$

$$dy = df = f'(x)dx = f'(x)\Delta x$$

$$dx = \Delta x = \left(\frac{dx}{dx}\right) \cdot \Delta x$$



Δx Δf
 df, dx

$$df = \begin{cases} \Delta f \\ f'(x) dx \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{הפרש } f \text{ בקטע} \\ \text{הנגזרת } f' \text{ בקטע} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{NIK} \\ \text{AKS} \end{matrix}$$

3

$$df = f'(x) dx = \begin{cases} f'(x) \Delta x \\ f'(x) \dot{x} \Delta t \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{הפרש } x \text{ בקטע} \\ \text{הפרש } x(t) \text{ בקטע} \end{matrix}$$

Leibniz se na'ax ! $\int f(x) dx = \int f(x(t)) \dot{x}(t) dt$ \rightarrow $\int f(x) dx$ \rightarrow $\int f(x(t)) \dot{x}(t) dt$

$$df(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} f'_x(x,y) dx + f'_y(x,y) dy$$

Δx Δy

$$df = df(x,y, \Delta x, \Delta y)$$

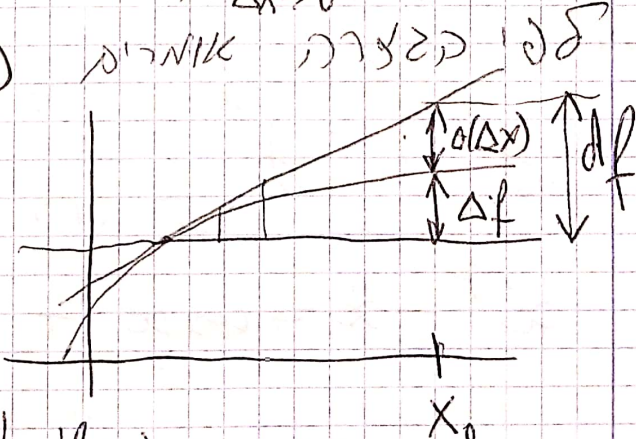
$$d^2 f = d(f'_x \Delta x + f'_y \Delta y) = (df'_x) \Delta x + (df'_y) \Delta y$$

$$= f''_{xx} \Delta x^2 + 2f''_{xy} \Delta x \Delta y + f''_{yy} \Delta y^2$$

$$df = \begin{cases} \Delta f \\ f'(x) \Delta x \end{cases} \quad \text{? } \Delta x \text{ מיון, ה } \Delta x \text{ נכנס}$$

$$\begin{cases} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f \\ f'(x_0) \Delta x + o(\Delta x) \end{cases} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

$$o(\Delta x) = o(\Delta x)$$



$$o(\Delta x) \quad \begin{matrix} \text{הפרש } \Delta x \\ \text{הפרש } \Delta x \end{matrix}$$

$\int f(x) dx = \int f(x(t)) \dot{x}(t) dt$ Leibniz מיון Δx

חיי"ו מולקולר (ביאומי)

Laplace $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 0$

מערכת של משוואות דיפרנציאליות חלקיות

אם יש רק צירי x ו- y (מרחב 2D) אזי משוואה חלקית
משוואה דיפרנציאלית חלקית

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \cos u = e^x$ משוואה דיפרנציאלית חלקית

$u = u(x, y) = ?$ Partial dif. equation PDE חיי"ו

$u'' + u' = e^u$ משוואה דיפרנציאלית חלקית
 $u = u(x) = ?$ חיי"ו

סדר גבוה

$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ $y(x) = ?$
הסדר הגבוה ביותר של הנגזרות
סדר x הוא סדר של משוואה (n) גבוה

$(y^{(5)})^{10} - y^{1000} = x^7$, $y(x) = ?$ אם $n > 10$
סדר משוואה הוא 5

$\ddot{x}^7 - \ddot{x} = \cos(x'' + \dot{x})$ $x(t) = ?$
סדר משוואה הוא 3

Autonomous DE

נייטרלי

המשוואה היא $x'' + \cos(x) = 0$ כאשר $x(0) = \pi/2$ ו- $x(\pi) = \pi/2$

$x'' - x^7 + \cos(x) = 0$ $x(t) = ?$

2 פתרונות, נייטרלי

$x^{(5)} + \ln(1+x^2) = 0$ $x(t) = ?$

5 פתרונות, נייטרלי

$y'' \cdot y^2 - e^{\frac{y}{y^2+1}} = 0$ $y(x) = ?$

2 פתרונות, נייטרלי

$(y''')^8 + \cos x = 0$ $y(x) = ?$

3 פתרונות, נייטרלי

המשוואה היא $y'' + \sin y = 0$ כאשר $y(0) = \pi/2$ ו- $y(\pi) = \pi/2$

אם נגדור $y = \pi/2 + u$ נקבל $u'' + \sin(\pi/2 + u) = 0$

המשוואה היא $y'' + \sin y = 0$ כאשר $y(0) = \pi/2$ ו- $y(\pi) = \pi/2$

$x'' y^{(5)} + \cos(x + e^x) y = 0$

5 פתרונות, נייטרלי

$x^{(11)} + x^2 x + t = 0$

11 פתרונות, נייטרלי

$x'' + 5x' - x + x = 0$

3 פתרונות, נייטרלי

המשוואה היא $y'' + \sin y = 0$ כאשר $y(0) = \pi/2$ ו- $y(\pi) = \pi/2$

המשוואה $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ היא משוואה דיפרנציאלית

6

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

המשוואה היא משוואה דיפרנציאלית
עם נקודות!

1. $y = y(x), dx = \Delta x, dy = y' \Delta x = y'_x \Delta x$

המשוואה היא $M(x,y) \Delta x + N(x,y) y' \Delta x = 0$

$$M(x,y) \Delta x + N(x,y) y' \Delta x = 0$$

2. $M(x,y) + N(x,y) y' = 0, y(x) = ?$
 1. משוואה דיפרנציאלית $\Leftarrow N \neq 0$

2. $x = x(y), dy = \Delta y, dx = x' \Delta y$

$$M(x,y) x' \Delta y + N(x,y) \Delta y = 0$$

$\Delta y \neq 0$
 \Rightarrow

$$M(x,y) x' + N(x,y) = 0, x(y) = ?$$

1. משוואה דיפרנציאלית $\Leftarrow M \neq 0$

$$N(x,y) = 0, M \equiv 0$$

משוואה דיפרנציאלית, משוואה דיפרנציאלית

$$\frac{dx}{dy} = \frac{M}{N}$$

$$x dx + y dy = 0$$

$y(x) = ?$ $x + y y' = 0$

$x(y) = ?$ $x x' + y = 0$

משוואה דיפרנציאלית

111

משוואה דיפרנציאלית

$$\left(2x dx + 2y dy = 0 \right) \quad \text{!} \quad \int \text{ (integrate) } \quad 7$$

$$dx^2 + dy^2 = 0$$

$$d(x^2 + y^2) = 0 \quad x^2 + y^2 = \text{const} = c \geq 0$$

$$y = \pm \sqrt{c - x^2} \quad \text{!} \quad \int \text{ (integrate) }$$

$$x = \pm \sqrt{c - y^2} \quad \text{!} \quad \kappa$$

שלושה סוגי משוואות דיפרנציאליות

$$y' = f(x)g(y) \quad \text{!} \quad \text{משוואה נפרדת}$$

משוואה נפרדת (Separable equation)

משוואה נפרדת (Separable equation)

$$g(y) = 0 \quad \text{!} \quad \text{משוואה נפרדת}$$

(אם $g(y) = 0$ אז $y = y_0$)

$$y(x) = y_0$$

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) \quad \Leftarrow g(y) \neq 0$$

$$\int \frac{y'(x) dx}{g(y(x))} = \int f(x) dx$$

$$G(y) + C_2 = \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx = F(x) + C_1$$

$y = y(x)$ $\lambda > \mu$ $\lambda < \mu$ $\lambda = \mu$ $\lambda < \mu$ $\lambda > \mu$ $\lambda = \mu$ 8

התנאי הראשון הוא $\lambda < \mu$ והתנאי השני הוא $\lambda > \mu$ והתנאי השלישי הוא $\lambda = \mu$

$F(x) - G(y) = C (= C_2 - C_1)$

$\dot{N} = (\lambda - \mu) N$ $\lambda > \mu$

התנאי הראשון הוא $\lambda < \mu$ והתנאי השני הוא $\lambda > \mu$ והתנאי השלישי הוא $\lambda = \mu$

$N = 0$

$\frac{\dot{N}}{N} = \lambda - \mu$ $\int \frac{\dot{N}}{N} dt = \int (\lambda - \mu) dt$

$\ln|N| + C_2 = \int \frac{dN}{N} = (\lambda - \mu)t + C_1$, $C_1 - C_2 = C$

$\ln|N| = (\lambda - \mu)t + C$

$|N| = e^{(\lambda - \mu)t + C} = e^C e^{(\lambda - \mu)t}$

$\tilde{C} = \pm e^C, 0$

התנאי הראשון

$N = \tilde{C} e^{(\lambda - \mu)t}$

התנאי הראשון הוא $\lambda < \mu$ והתנאי השני הוא $\lambda > \mu$ והתנאי השלישי הוא $\lambda = \mu$

$N = 8 \cdot 10^9$
 התנאי הראשון
 $\lambda - \mu = 0.02$

התנאי הראשון הוא $\lambda < \mu$ והתנאי השני הוא $\lambda > \mu$ והתנאי השלישי הוא $\lambda = \mu$

2020 $\lambda < \mu$ $\lambda > \mu$

$8 \cdot 10^9 = \tilde{C} e^{40.4}$ $t = 2020$

$\tilde{C} = 8 \cdot 10^9 \cdot e^{-40.4}$

$y(x) = ?$ $y' = f(x, y)$ $y(x_0) = y_0$

Couchy $\lambda < \mu$ $\lambda > \mu$

y' ctg x + y = 2, y(0) = -1

ctg x · y' = 2 - y

y = 2

x ≠ π/2 + kπ

x ≠ kπ

y' / (2-y) = ctg x

∫ y' dx / (2-y) = ∫ ctg x dx, k ∈ Z, k = 0, ±1, ±2, ...

-ln|2-y| + C2 = ∫ sin x / cos x dx = -∫ d cos x / cos x =

-∫ dy / (y-2) = -∫ d(y-2) / (y-2) = ln|cos x| + C1

ln|y-2| = -ln|cos x| + C, C = C2 - C1

y-2 = C / cos x, C = 0, ±e^C

y = C / cos x + 2, x ≠ π/2 + kπ, x ≠ kπ

Handwritten notes in Hebrew, partially crossed out, mentioning '100' and '1000'.

Handwritten notes in Hebrew, discussing mathematical concepts.

Handwritten notes in Hebrew, including a large square root symbol.

kg \rightarrow $\Delta x = -\frac{x}{100} \Delta t + o(\Delta t)$ $\frac{x}{100}$

10

$$\Delta x = -\frac{x}{100} \Delta t + o(\Delta t)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{x}{20} + 0$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{20} x, \quad x(0) = 10$$

$$\frac{\dot{x}}{x} = -\frac{1}{20} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int -\frac{1}{20} dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -\frac{1}{20} dt$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{20} t + \tilde{C}$$

$$x = e^{\tilde{C}} e^{-\frac{1}{20} t} = C e^{-\frac{1}{20} t}, \quad C = 0, \pm e^{\tilde{C}}$$

$$C e^{-\frac{1}{20} \cdot 0} = 10$$

$$C = 10$$

$$x = 10 e^{-\frac{1}{20} t}, \quad x(60) = 10 e^{-3}$$

$$\approx 0.498 \text{ kg}$$

$x(t+\Delta t) \approx x(t) - 0.01 x(t) \Delta t$

$x(t+\Delta t) \approx x(t) - 0.01 x(t+\Delta t) \Delta t$

$$\leq x(t) - 0.01 x(t) \Delta t + 0.0001 x(t) \Delta t^2$$

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) \in -0.01 x(t) \Delta t + [0, 10^{-4}] x(t) \Delta t^2$$

$$\dot{x}(t) \in -0.01 x(t) + [0, 10^{-4}] x(t) \Delta t \rightarrow 0 \quad \Delta t \rightarrow 0$$

1 גרסא פון די איינפאכע ליניארע דיפערענציאלע גלייכונג

$$y' + a(x)y = b(x) \quad a, b \in \mathbb{C}$$

אינטעגראציע פון די ליניארע דיפערענציאלע גלייכונג
 פון די פארעם $y' + a(x)y = b(x)$ מיט $a, b \in \mathbb{C}$
 פון די פארעם $y' + a(x)y = b(x)$ מיט $a, b \in \mathbb{C}$

$$y' + a(x)y = 0$$

$$y = 0 \quad (y(x) = 0)$$

$$\frac{y'}{y} = -a(x)$$

$\Leftrightarrow y \neq 0, a(x) \neq 0$
 אינטעגראציע

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{y'(x) dx}{y(x)} = - \int a(x) dx$$

$$\ln |y| = - \int a(x) dx + \tilde{C}$$

$$y = c_1 e^{- \int_{x_0}^x a(x) dx} = c_1 y_h(x)$$

c_1 איז א קאנסטאנט
 homogeneous solution

$$y(x) = c_1(x) y_h(x)$$

particular solution

$$c_1'(x) y_h(x) + c_1(x) y_h'(x) + a(x) c_1(x) y_h(x) = b(x)$$

$$c_1(x) [y_h'(x) + a(x) y_h(x)] = 0$$

$$c_1'(x) y_h(x) = b(x) \quad c_1' = \frac{b(x)}{y_h(x)}, \quad c_1 = \int \frac{b(x)}{y_h(x)} dx$$

$$y(x) = c_1(x) y_h(x) = \left[\int_{x_0}^x \frac{b(x)}{y_h(x)} dx + C \right] y_h(x)$$

$$y(x) = C_0(x) y_h(x) + C \cdot y_h(x),$$

$$C_0(x) = \int_{x_0}^x \frac{b(x)}{y_h(x)} dx$$

ידידות, פ
לימודים

12

הצורה הכללית: $y' + ay = b$

עוד $\mu(x)$ נבחר

$$(my)' = \mu y' + \mu ay = \mu b$$

$$(m(x)y)' = m(x)b(x), \quad y = \frac{1}{m(x)} \int_{x_0}^x m(x)b(x) dx + C$$

$$\mu' y + \mu y' = (my)' = \mu y' + \mu ay$$

$$\mu' y = \mu ay$$

$$\mu' = \mu a(x)$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = a(x), \quad \mu(x) = e^{\int_{x_0}^x a(x) dx}$$

$$= \frac{1}{y_h(x)}$$

הנפרדון משתקף
הוא בצורה אלו
שבו ראוי

עדיף קודם

$$(2x+1)y' = 4x + 2y$$

$$\frac{KN \geq 19}{x \neq -\frac{1}{2}}$$

13

$$y' - \frac{2y}{2x+1} = \frac{4x}{2x+1}$$

$$y' - \frac{2y}{2x+1} = 0$$

$$y = 0 \quad | \text{17-10}$$

, 1

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{2x+1}$$

$$\ln |y| = \int \frac{2 dx}{2x+1} = \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = \ln |2x+1| + \tilde{C}$$

$$y = C_1 \underbrace{(2x+1)}_{y_h}, \quad C_1 = 0, \pm e^{\tilde{C}}$$

$$|y = 0 \quad | \text{17-10}$$

$$y = C_1(x) y_h(x), \quad y_h' - \frac{2}{2x+1} y_h = 0 \quad \text{rek}$$

$$C_1'(x) (2x+1) + C_1 (2x+1)' - C_1 \frac{2(2x+1)}{2x+1} = \frac{4x}{2x+1}$$

$$C_1'(x) = \frac{4x}{(2x+1)^2}$$

$$d(2x+1)^2 = 2(2x+1) \cdot 2 dx = 8x dx + 4 dx$$

$$C_1(x) = \int \frac{4x dx}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+1)^2}{(2x+1)^2} = \int \frac{2 dx}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2} \ln |2x+1|^2$$

$$= \int \frac{d(2x+1)}{(2x+1)^2}$$

$$= \ln |2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C$$

$$y = C_1 y_h = \ln |2x+1| \cdot (2x+1) + 1 + C(2x+1), \quad x \neq -\frac{1}{2}$$

$$y' - \frac{2}{2x+1}y = \frac{4x}{2x+1}, \quad x \neq -\frac{1}{2}$$

מכאן נבחר $\mu(x) = 2x+1$

$$(\mu y)' = \mu y' - \frac{2}{2x+1} \mu y$$

$$\mu' y + \mu y' - \frac{2}{2x+1} \mu y = \frac{4x}{2x+1} \mu$$

$$\mu' = -\frac{2}{2x+1} \mu, \quad \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2}{2x+1}$$

$$\ln|\mu| = -\int \frac{2 dx}{2x+1} = -\int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = -\ln|2x+1|$$

$$\mu = \frac{1}{2x+1}$$

אפשר גם לומר
בגורם

$$(\mu y)' = \frac{4x}{(2x+1)^2}$$

$$y = \underbrace{(2x+1)^{-1}}_{\mu^{-1}} \int \frac{4x dx}{(2x+1)^2}$$

הציון כאן צריך

אם μ אחר (גם μ אחר) הנוסחה

גבוה שונה, אבל גורם אחר

הגורם μ (אוסף כל הפתרונות)

← קשה להצוק. כל קורה עם
המשך