20/05-2021 הרצאה 9

89

תזכורת: למה טכנית

$\forall \delta>0$: F_δ - closed set, $0 \le \delta_1 \le \delta_M$, $\delta_1<\delta_2 \Rightarrow F_{\delta_1}\subset F_{\delta_2}$

$$y\in\bigcap_{\delta>0}F_\delta \Leftrightarrow \exists y_k \in F_{\delta_k},\ \delta_k\to 0$$

$$y=\lim_{k\to\infty}y_k$$

$\dot{x}=f(x), x\in\mathbb{R}^n$, f מדיד, לפי Lebesgue

חסומה, לוקלית

$$\forall x_0\ \exists\delta>0:\ \boxed{ess}\sup_{x\in x^\delta} f(x)<\infty$$

אי

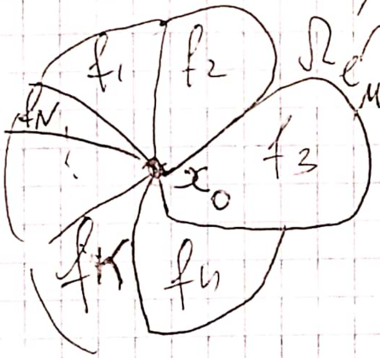
אפשר לזרוק קבוצות ממידה 0 ⇐ sup רגיל

$$\dot{x}\in f(x)\Leftrightarrow \dot{x}\in F(x)$$

$$F(x)=K_F[f](x)=\bigcap_{\delta>0}\bigcap_{\mu N=0}\overline{co}\,f(x^\delta\setminus N)$$

$$=\bigcap_{\delta>0}\overline{co}\,f(x^\delta\setminus N_0)$$

נקודות שהן לא נקודות של רציפות דירוגין



$x_0\in\bigcap_{k\in N}\Omega_k$

למה, $\Omega_l^{int}\cap\Omega_k=\emptyset$ $l\neq k$

$\mu(\partial\Omega_k)=0$

$$f(x)=\begin{cases} f_k(x), & \exists k: x\in\Omega_k \text{ (interior)}\\ \text{אחרת - לא מעניין} \end{cases}$$

$\mathbb{R}^n=\bigcup\Omega_k$, סופית

תחומים סגורים - Ω_k

f_k - רציפות על סגור של Ω_k ($\partial\Omega_k$ מסומנים)

$$y\in F_{(x_0)}=K_F[f](x_0)\Leftrightarrow y\in\overline{co}\left\{\lim_{x\to x_0}f_k(x)\right\}_{k=1,2,\dots N}$$

הוכחה: 1. למה, 2 ⇐ $F(x_0)\ni\lim_{x\to x_0}f_k(x)$ ⇐ "⇐"

נסמן $y_{\infty l}=\lim_{x\to x_0}f_l(x)$

$y=\lim_{k\to\infty} y_k,\ y_k\in\overline{co}\, f(x^{\delta_k}\setminus D) \Leftarrow y\in F(x_0)$ "$\Rightarrow$" .2

$\delta_k\searrow 0$ $\qquad D=\bigcup_{k=1,\dots,N}\partial\Omega_k,\ \mu D=0$

איחוד

$$\Rightarrow y_k\in co\,\overline{f(x^{\delta_k}\setminus D)},\ y_k=\sum_{l=1}^{n+1}\lambda_{kl}\,y_{kj(l)}\ \overset{y_{\infty l}}{/\!/}$$

איחוד

$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2=$
$=(\alpha_1+\alpha_2)\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}y_1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}y_2\right)$

$$y_{kj(l)}\in\overline{f_{j(l)}(x_0^{\delta_k}\setminus D)}\Rightarrow\|y_{kj(l)}-\lim_{x\to x_0}f_l(x)\|\le\varepsilon_{kl}\le\varepsilon_k$$

$\varepsilon_k\to 0,\ \varepsilon_k>0$ אפשר לבחור

$$\Rightarrow y_{kj(l)}=\overbrace{\lim_{x\to x_0}f_l(x)}^{y_{\infty l}}+\varepsilon_{kl},\quad \varepsilon_{kl}\to 0,\ k\to\infty$$

$y_k\in\left(\sum\lambda_{kl}\lim f_l\right)^{\varepsilon_k}$ $y_{\infty l}$ במיקום, שונה

$$\Rightarrow \cancel{y_k=\hat{y}_k}\quad y_k\in(\hat{y}_k)^{\varepsilon_k},\ \hat{y}_k\in co\Big\{\overbrace{\lim_{x\to x_0}f_l(x)}^{y_{\infty l}},\ l=1,\dots,N\Big\}$$

$$\Rightarrow\|y_k-\hat{y}_k\|\to 0\Rightarrow y=\lim\hat{y}_k\in\overline{co}\{y_{\infty l}\}_{l=1,\dots,N}$$

$y_{\infty l}=\lim_{x\to x_0}f_l(x)$ $\qquad$ מ.ש.ל.

עוד הפעם!

$$\Rightarrow K_Ff(x_0)=co\{y_{\infty 1},\dots,y_{\infty N}\}$$

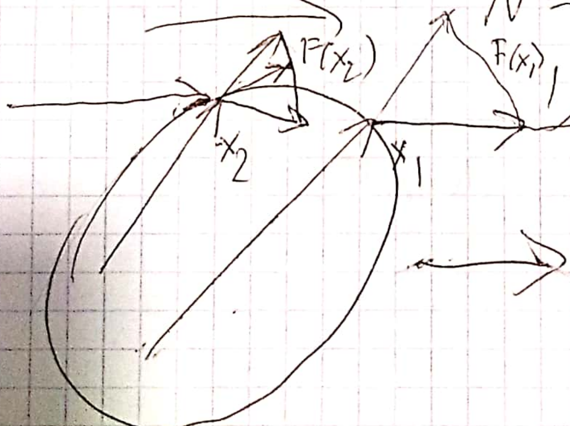
$$y\in K_Ff(x_0)\Leftrightarrow\exists\, l(1),\dots,l(n+1):\ y=\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j y_{\infty l}$$

$$\lambda_j\ge 0,\ \sum\lambda_j=1$$

$$y_{\infty l}=\lim_{x\to x_0}f_l(x)$$

נכון גם ל- $N=\infty$

בדוגמא שכיחה לו



Sliding Mode מצבי החלקה

89b

(לפי Filippov) $x \in \mathbb{R}^n \quad \dot{x} = f(t,x)$

Lebesgue measurable, locally bounded

הגדרה: כל [illegible] בקבוצה.

אי-רציפות, $F(t,x)$ כולל שני גבולות שונים לפונק

נקראת מתקיימת ב-SM,

$\sigma : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $\sigma(t,x) \equiv 0$ מתקיים [illegible] Sliding Mode

$\longrightarrow \bullet \longleftarrow \ \sigma$

כך ש $\dot{\sigma} < 0$ כאשר $\sigma > 0$

$\dot{\sigma} > 0$ כאשר $\sigma < 0$

Filippov (1960)

σ נקרא SM variable

Equivalent control

$$\dot{x} = f(t,x) + g(t,x)u \ , \ \text{rel. degree} = 1$$

$$\nabla\sigma g \neq 0 \ , \ u = \begin{cases} u_+(t,x) & \sigma > 0 \\ u_-(t,x) , & \sigma < 0 \end{cases}$$

u_+, u_- רציפות

$$\begin{cases} \dot{x} = f + g u \\ \dot{t} = 1 + 0 u \end{cases} \qquad L_{\binom{g}{0}} \sigma = \nabla\sigma g + \sigma'_t \cdot 0$$

$$L_{\binom{f}{1}} \sigma = \nabla\sigma \cdot f + \sigma'_t \cdot 1$$

$$\dot{\sigma} = \overset{\nabla\sigma f +}{\sigma'_t} + \nabla\sigma \cdot g\, u$$

נשתמש בהגדרת Filippov

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{pmatrix} \in \left\{ \underset{1}{\begin{pmatrix} \cancel{\dot{x}}\ \vartheta \\ \dot{t} \end{pmatrix}} = \lim \vartheta_k \ , \ \vartheta_k = \begin{cases} f + g u , & \sigma \neq 0 \\ f + g(\lambda_1 u_+ + \lambda_2 u_-) , & \sigma = 0 \end{cases} \right\}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

מטלה!

$$\dot{x} \in \overrightarrow{co} \underset{\text{קטע}}{\left\{ u_-(t,x), u_+(t,x) \right\}}$$

מכאן מקבלים

$[u_-, u_+]$ או $[u_+, u_-]$

נניח SM מתקיים $\Leftarrow$ $\dot{\sigma} = \nabla\sigma f + \sigma'_t + \nabla\sigma \cdot g u = 0$

$$u = u_{eq} = -\left(\frac{\sigma'_t(t,x) + \nabla\sigma f}{\nabla\sigma(t,x) \cdot g(t,x)} \right)$$

Equivalent control

ה SM אפשרי $\Leftrightarrow u_{eq} \in \overline{co}\{u_+, u_-\}$

קטע

במקרה ״מולטי״ rel. degree $(1,1,\dots,1)$

מרובעת

$\sigma \in \mathbb{R}^m, \; u \in \mathbb{R}^m \qquad \dot{x} = f + g u$

$\dot{\sigma} = \nabla\sigma f + \sigma'_t(t,x) + \nabla\sigma \overset{(t,x)}{g}(t,x) u \in \mathbb{R}^m$

$u_{eq} = -(\nabla\sigma g)^{-1}(\sigma'_t + \nabla\sigma f), \; u = u_{eq} \Rightarrow \dot{\sigma} = 0$

תנועה ב SM (zero dynamics)

$\begin{cases} \dot{x} = f + g u_{eq} \\ \sigma(t,x) = 0 \end{cases}$ — תנועה במשטח

הערה בקר אקוויולנטי u_{eq}

כי, בבקר המקיים $\sigma(t,x) \equiv 0$.

Sliding-Mode Control

מקרה אפיני $\dot{x} = f(x) + g(x)u, \; u \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$

$\mathrm{rank}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\} = n$

$\mathrm{span}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2}\}$ involutive

$\Leftarrow$ אפשרי לייצב את המערכת בכלל (

בק' x_0 שבה מקיים $\exists \lambda \in \mathbb{R}: f(x_0) + \lambda g(x_0) = 0$

הוכחה:

$\exists \sigma$: rel. degree $= n$ $\qquad \sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(n-1)}$ קואורדינטות חדשות

$\sigma^{(n)} = \underbrace{L_f^n \sigma}_{\alpha} + \underbrace{L_g L_f^{n-1} \sigma}_{\beta \neq 0} \cdot u$

$\sigma = \sigma(x_0)$

$\dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(n-1)} = 0,$ $\qquad \delta^{\beta}$ מתאימים $\quad x_0, u = \lambda$

$\sigma^{(n)} = \alpha(x) + \beta(x) u \;, \; \alpha(x_0) + \lambda\beta(x_0) = 0$

$\tilde{\sigma} = \sigma - \underbrace{\sigma(x_0)}_{= const} \;, \qquad \Sigma = \tilde{\sigma}^{(n-1)} + \gamma_1 \tilde{\sigma}^{(n-2)} + \dots + \gamma_{n-1}\tilde{\sigma}$

Hurwitz

[illegible] מספיק

$$\alpha+\beta u = -K\,\text{sign}\,\Sigma(x)$$

$$\alpha+\beta u = -c_1\sigma^{(n-1)} - \dots - c_{n-1}\dot\sigma - c_n(\sigma-\sigma(x_0))\big)/K$$

כך ש $s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_n$ Hurwitz

מייצב את המערכת לוקלית

ואסימפטוטית — רק סביב,
מושלם,

הערך SMC של היא להחזיק $\Sigma=0$

SM control

$$\Sigma = \tilde\sigma^{(n-1)} + \gamma_1\tilde\sigma^{(n-2)} + \dots + \gamma_{n-1}\tilde\sigma = 0 \qquad \Sigma = p_{n-1}\left(\frac{d}{dt}\right)\tilde\sigma$$

$$\dot\Sigma = \underbrace{\alpha(x)+\beta(x)u}_{-K\,\text{sign}\,\Sigma} + \underbrace{\gamma_1\tilde\sigma^{(n-1)} + \dots + \gamma_{n-1}\dot{\tilde\sigma}}_{\text{חסום בסביבה}}$$

(בערך מוחלט) $\le \frac{K}{2}$

$$\dot\Sigma \in -K\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]\text{sign}\,\Sigma$$

ו $|\dot\Sigma| \ge K/2$

⇐ תוך זמן סופי $\frac{2}{K}|\Sigma(0)|$ מתאפסת Σ

אחר כך $\Sigma\equiv 0$ כי פתרון ד"ס לפי Filippov

הפתרון מתאים ל $u = u_{eq,\Sigma}$

$$u_{eq\,\Sigma} = \underbrace{-\frac{\alpha}{\beta}}_{u_{eq}} - \underbrace{\left(\gamma_1\sigma^{(n-1)} + \dots + \gamma_{n-1}\dot\sigma\right)}_{\to 0}$$

למה (Slotine 1991)

$$\Sigma = p_{n-1}\left(\frac{d}{dt}\right)\sigma$$

נניח לאורך הפתרון מתקיים $|\Sigma(x)| \le \delta$

⇐ עבור זמן סופי מתקיים $\exists\,\omega_0 \dots \omega_{n-1} > 0$

$$|\sigma| \le \omega_0\delta,\ \dots,\ |\sigma^{(n-1)}| \le \omega_{n-1}\delta,$$

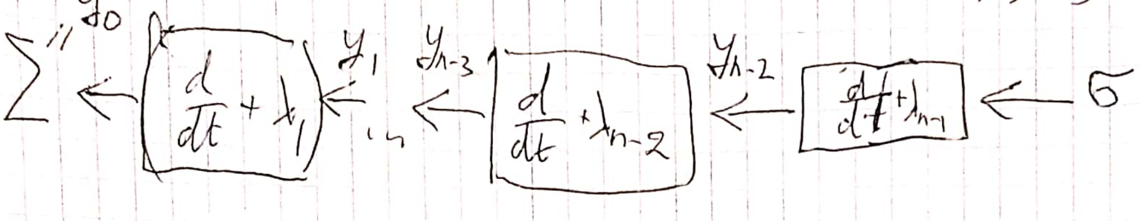
זאת אומרת $\|(\sigma, \dot\sigma, \dots, \sigma^{(n-1)})\| \le \underset{\text{מספר}}{\omega}\, \delta$

הוכחה:

$$P_{n-1}\left(\frac{d}{dt}\right) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{d}{dt} + \lambda_j\right)$$

מינוס שורש $\lambda_j = \alpha_j + \beta_j i$, $\alpha_j > 0$

[illegible]



$$y_{n-2} = \dot\sigma + \lambda_{n-1}\sigma$$

$$\vdots$$

$$y_{K-1} = \dot y_{K} + \lambda_K y_{K} \qquad K = n-1, \dots, 1$$

$$\dot y_1 + \lambda_1 y_1 = \Sigma(t) \qquad |\Sigma| \le \delta$$

$$y_1 = y_{10} e^{-\lambda_1 t} + \int_0^t e^{-\lambda_1 (t-\tau)} \Sigma(\tau)\, d\tau$$

$$|y_1| \le |y_{10} e^{-\lambda_1 t}| + \delta |e^{-\lambda_1 t}| \int_0^t |e^{\lambda_1 \tau}|\, d\tau \qquad \lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$$

$$\le |y_{10}| e^{-\alpha_1 t} + \delta e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 \tau}\, d\tau =$$

$$= |y_{10}| e^{-\alpha_1 t} + \delta e^{-\alpha_1 t} \frac{1}{\alpha_1}\left(e^{\alpha_1 t} - 1\right) \le$$

$$\le \underbrace{\left(|y_{10}| + \frac{\delta}{\alpha_1}\right) e^{-\alpha_1 t}}_{\to 0} + \frac{\delta}{\alpha_1} \le \frac{\textcircled{2}}{\alpha_1}\delta$$

כל מספר גדול מ-1

כעבור זמן סופי

$$|y_1| \le \frac{2}{\alpha_1}\delta$$

$$|y_2| \le \frac{4}{\alpha_1 \alpha_2}\delta$$

$$|\sigma| = |y_{n-1}| \le \frac{(\dots)}{\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}}\delta$$

כקודם — מקבלים

$$|\sigma| \le \omega_0 \delta$$

$$|y_{n-2}| \le \tilde\omega_0 \delta, \quad y_{n-2} = \dot\sigma + \lambda_{n-1}\sigma$$

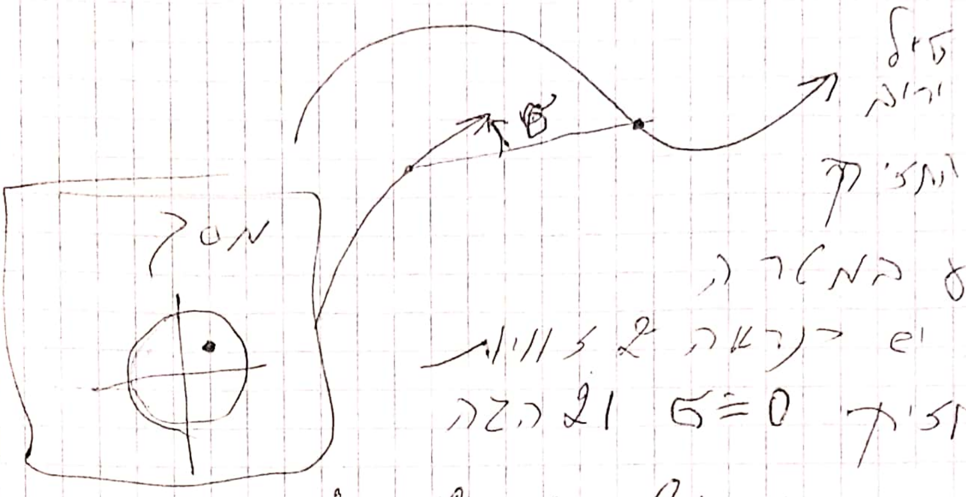
$$\Rightarrow |\dot\sigma| \le \omega_1 \delta, \quad \omega_1 = \omega_0 + |\lambda_{n-1}| \tilde\omega_1$$

מ.ש.ל.

Output Regulation

דוגמא

היגוי ברכב



מספיק להחזיק

$\theta \le const < 90^\circ$

כדי שהכוון במהרה,

במציאות יש דרגה 2 בזוויות

ננסה להחזיק $\sigma \equiv 0$ וזה הכל

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u\ ,\quad \sigma = \sigma(t,x) \in \mathbb{R}$$

$u \in \mathbb{R}$ היעד: $\sigma \equiv 0$

relative degree $\in \mathbb{N}$ (סדר יחסי) r

$$\sigma^{(r)} = h(t,x) + g(t,x)u\ ,\quad g \neq 0$$

לא מתאפס

בונים בקר $u(t,x)$

$$\dot{x} \in K_F[a+bu](t,x) = a_{(t,x)} + b_{(t,x)} K_F[u](t,x)$$

מניחים של כל פתרון מאורך עד $t=\infty$

מעניין ש~~$u(t,x(t))$~~ $u(t)$ נשאר חסום לאורך הזמן

(למשל $u(t,x(t))$ יכול להיות)

$u_{eq} = -h(t,x)/g(t,x)$ (Utkin 1980) משל $\boxed{r=1}$

1. נניח $u(t)$ מציע, $|u|, |u_{eq}| \le U_M$

$|\dot{u}_{eq}| \le L$, $\dot{g} = g'_t + g'_x(a+bu)$, $|\dot{g}| \le D$

$$\left|\frac{1}{g}\right| = |g^{-1}| \le C$$

2. $|\sigma^{(r-1)}| \le \varepsilon$ מתחיל

מסק Utkin:

$\frac{1}{\alpha}\dot z + z = u(t)$, $z(0)=0$, $z\in\mathbb{R}$

$\alpha \gg 1$

הפתרון במובן Caratheodory

(מקרה פרטי של Filippov)

משפט (Levant, Yu, 2018)

$$\left|z-u_{eq}(t,x(t))\right| = \underset{\varphi(t)\to 0}{\underset{\parallel}{o(1)}} + O\left(\frac{1}{\alpha}\right)+O(\varepsilon)+\underbrace{O(\alpha\varepsilon)}_{\text{חסר אצל Utkin}}$$

כיצד להאריך את u_{eq}

$\boxed{\text{דוגה}}$ (Golembo 1976)   **דוגמא**

$f(t)$ נמדד, $|\dot f| \le C$, $\dot x = u$

$\sigma = x - f$

$\dot\sigma = u - \dot f$, $u = -k\,\mathrm{sign}\,\sigma$, $k > C$

$$\dot\sigma \in -k\,\mathrm{sign}\,\sigma + [-C,C] = \begin{cases} -k\,\mathrm{sign}\,\sigma + [-C,C], & \sigma\neq 0\\ \left[\underset{<0}{-(k+C)},\ \underset{>0}{+k+C}\right] \ni 0 & \sigma = 0\end{cases}$$

$\mathrm{sign}\,\sigma \to K_F[\mathrm{sign}(\cdot)]\sigma$

$\sigma \equiv 0$ מקבלים SM

$$\boxed{u_{eq} = \dot f}$$

$\frac{1}{\alpha}\dot z + z = u(t)$

מוצאים $u_{eq}(t)$

תחת תנאים: $|\dot u_{eq}| = |\ddot f| \le L$

במימוש דסקרטי ברור ש $|\sigma| \le \gamma\tau$

$\gamma \sim k + C$

τ-צעד מעילה

$$|z - \dot f| = o(1) + O\left(\frac{1}{\alpha}\right) + O(\tau) + O(\alpha\tau)$$

$$\Rightarrow \alpha \approx \tau^{-\frac{1}{2}} \gg 1$$

[illegible] [illegible] ~~[illegible]~~ אותה | מסנן

$r = 1 - \delta$ [illegible]

$$\downarrow \; u_{ave}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^{t} u(s)\, ds \qquad \alpha \sim \frac{1}{T}$$

$$\boxed{|u_{av} - u_{eq}| = O\left(\frac{\varepsilon}{T}\right) + O(\varepsilon)}$$

אותה הוצאה

$\sigma^{(r-1)} = \sigma$ $\to g(t,x)\left(u - u_{eq}(t,x)\right) \quad \left(= gu - g\left(-\frac{f}{g}\right)\right)$

~~$\sigma(t) - \sigma(t-T)$~~ $= \Delta\sigma = \sigma^{(r-1)}(t) - \sigma^{(r-1)}(t-T)$

$$\frac{\Delta\sigma^{(r-1)}}{T} = \int_{t-T}^{t} \frac{\sigma^{(r)}(s)}{T}\, ds = \int \frac{g}{T}(u - u_{eq})\, dt$$

$g = g(t) - \Delta g, \; |\Delta g| \le \Omega(s-t)$

$u_{eq} = u_{eq}(t) - \Delta u_{eq}, \; |\Delta u_{eq}| \le L(s-t)$

##

$$\frac{\Delta\sigma^{(r-1)}}{T} = \int \frac{g(t) - \Delta g}{T}\left(u - u_{eq}(t) + \Delta u_{eq}\right) ds =$$

$$= g(t)\left[u_{av}(t) - u_{eq}(t)\right] - \underbrace{\int_{t-T}^{t} \frac{\Delta g}{T} u_{eq}(t)\, ds}_{} + \underbrace{\int \frac{\overset{g}{\Delta g}\, \overset{\sim L}{\Delta u_{eq}}}{T}\, ds}_{O(T)}$$

$0 < g^{-1} \le c \;,\; \left|\frac{\Delta\sigma^{(r-1)}}{T}\right| \le \frac{\varepsilon}{T}$

$$\boxed{u_{av}(t) - u_{eq}(t) = O\left(\frac{\varepsilon}{T}\right) + O(T)}$$

$\Rightarrow T \sim \sqrt{\varepsilon}$ מתאים $\left(\alpha \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ [illegible]

מ.ש.ל.

Matching condition

תנאי התאמה

$\dot{x} = f(x) + g(x)u + \xi(x) \qquad x = (\bar{x}, t)$

$r =$ relative degree

תלויה איננה ~~[illegible]~~ zero dynamics מה

? ξ ב

מקרה $r=1$

$$\dot{\sigma} = \nabla\sigma f + \nabla\sigma \xi + \nabla\sigma g \cdot u \quad , \nabla\sigma g \neq 0$$

$$\left(\begin{matrix} \sigma \in \mathbb{R}^m , u \in \mathbb{R}^m , r = (1,\dots,1) \\ \det(\nabla\sigma g) \neq 0 \end{matrix} \right)$$

$$u_{eq} = -\frac{\nabla\sigma f}{\nabla\sigma g} - \frac{\nabla\sigma \xi}{\nabla\sigma g}$$

ב SM מקבלים

$$\dot{x} = f + g u_{eq} + \xi , \sigma \equiv 0$$

$$\dot{x} = f(x) - g(x)\frac{\nabla\sigma f}{\nabla\sigma g} + \xi - g\frac{\nabla\sigma \xi}{\nabla\sigma g} , \sigma \equiv 0$$

$$\xi = g \underbrace{\frac{\nabla\sigma \xi}{\nabla\sigma g}}_{\tilde{\xi}} \Rightarrow \xi = g\tilde{\xi} , \xi \in \mathbb{R}$$

$(\mathbb{R}^m$ ב MIMO case$)$

תנאי של אי-תלות (invariancy)

$$\left[\xi - g\frac{\nabla\sigma \xi}{\nabla\sigma \xi} \right]\Bigg|_{\sigma \equiv 0} = 0 \qquad \left[\xi - g(\nabla\sigma g)^{-1}\nabla\sigma \xi \right]\Bigg|_{\sigma \equiv 0} = 0$$

$u, \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^m$

תנאי מספיק: $\xi = g\tilde{\xi}$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)(u + \tilde{\xi})$$

הפרעה ה, פועלת
דרך ערוץ g הבקר

מקרה כללי (relative degree $\delta > 1$)

ישירות:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + \xi(x) =$$
$$= f(x) + g(x)(u + \tilde{\xi}(x))$$

עניני מקור ההצבה, פורמלית

<u>דוגמא</u>

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + \varepsilon \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \qquad \sigma = x_1 \qquad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

unmatched

$\varepsilon = \text{const}$

אי-אפשר לפצות!

matched disturbance מטפלת כלול ב-SM

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x} = x_3, \quad \dot{x}_3 = u + \tilde{\xi}(t) = v$$

$$\dddot{X}_1 = \cancel{u} = -(x_1 + 3X_2 + 3X_3) \quad \Leftarrow \text{ אם } \xi \text{ ידוע}$$

$$\dddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 + 3\ddot{x}_1$$

$\| \; \dot{x}_3$

$|\xi| \le 1$, אם ξ לא ידוע

$$\Leftarrow$$

$$u = -\cancel{2x}(K+1)\,\text{sign}\underbrace{(x_1 + 2X_2 + X_3)}_{\Sigma}$$

לוקלי

$$\dot{\Sigma} = X_2 + 2X_3 + u + \xi, \quad K = |X_2| + 2|X_3| + 1$$

גלובלי $\Leftarrow$

<u>דוגמא</u>

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x}^2 \cos 3x = u$$

Slotine, p. 294

$$1 \le a \le 2 \qquad x = x_c(t)$$

<u>[illegible]</u>

מוחרים

$$\sigma = (x - x_c)^{\circ} + \lambda(x - x_c)$$

$$\dot{\sigma} = -a\dot{x}^2 \cos 3x + u - \ddot{x}_c + \lambda\dot{x} - \lambda\dot{x}_c$$

$$a = 1{,}5 + \Delta a, \quad |\Delta a| \le 0{,}5$$

$$u := \underbrace{1{,}5\,\dot{x}^2 \cos(3x) + \ddot{x}_c - \lambda(\dot{x} - \dot{x}_c)}_{u_{eq}} + u_1$$

בעצם חלק של u_{eq}

$$\dot{\sigma} = -\Delta a\,\dot{x}^2 \cos 3x + u_1$$

$$\dot{\sigma}\sigma < 0, \ |\dot{\sigma}| > k \ \Leftarrow \ \sigma \ne 0 \text{ חוצים}$$

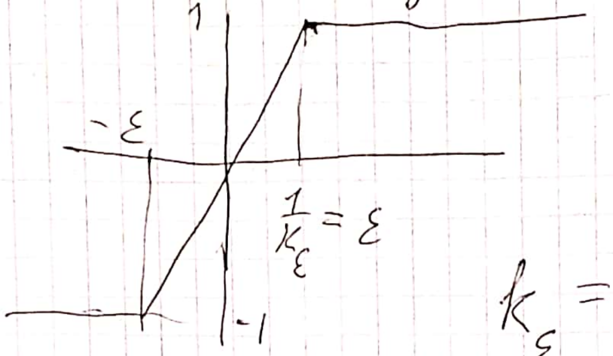
$$u_1 = -\left(0{,}5\,\dot{x}^2|\cos 3x| + k\right)\operatorname{sign}\sigma$$

ר׳ 3 לסימון

$$x_c = \sin(\pi t/2)$$

$$a(t) = |\sin t| + 1$$

$$\lambda = 20, \quad k = 0{,}1, \quad \operatorname{sign}\sigma = \operatorname{sat}\frac{\sigma}{\varepsilon} = \operatorname{sat}(k_\varepsilon \sigma)$$



$$\operatorname{sat} s = \begin{cases} 1 & s > 1 \\ s & |s| \le 1 \\ -1 & s < -1 \end{cases}$$

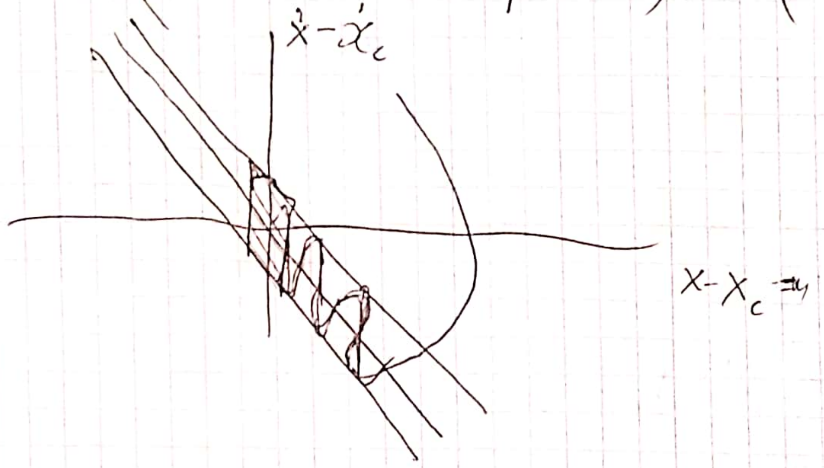
$$k_\varepsilon = 10$$

$$\operatorname{sign}\sigma \simeq \frac{\sigma}{\varepsilon + |\sigma|}$$ בק

[illegible]

$$\Rightarrow |\sigma| \le \varepsilon = \frac{1}{k_\varepsilon} = 0{,}1$$

$$u_1 = -\left(0{,}5\,\dot{x}^2|\cos 3x| + 0{,}1\right)\operatorname{sat}(10\sigma)$$



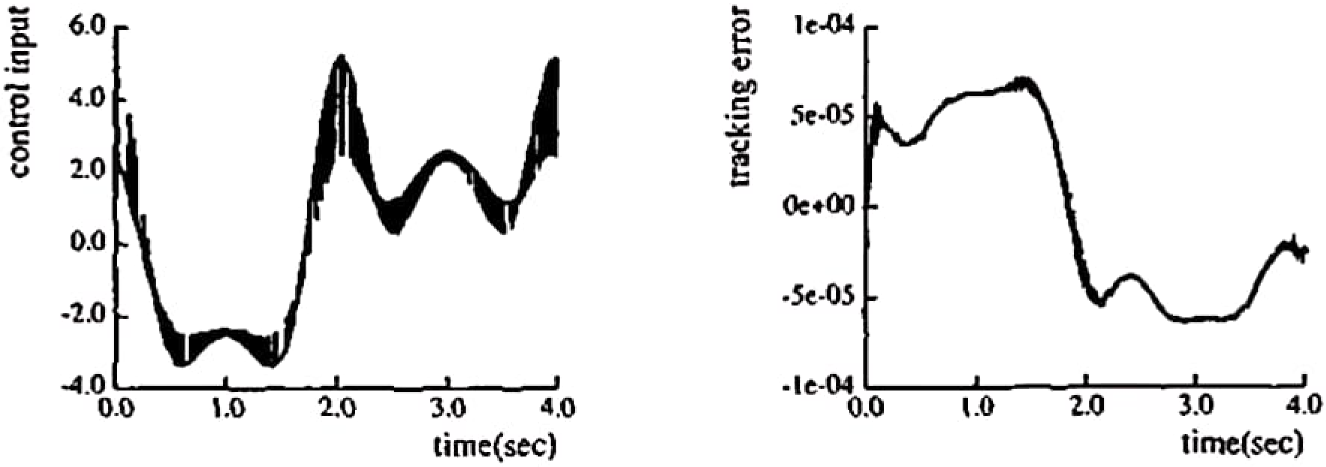


Figure 7.7 : Switched control input and resulting tracking performance

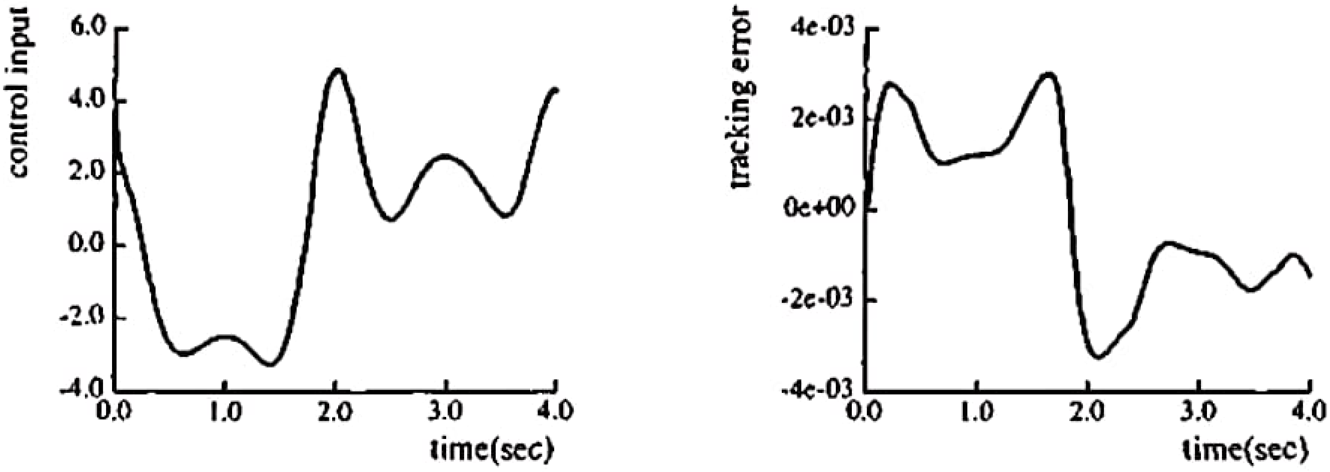


Figure 7.8 : Smooth control input and resulting tracking performance