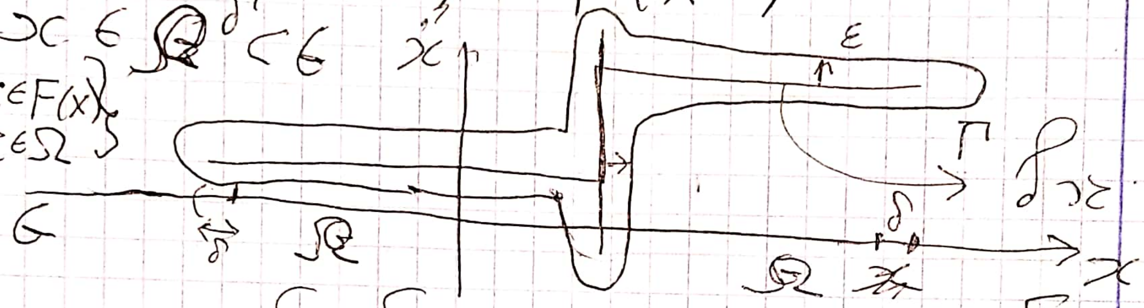
הרצאה 8 13/05-2021

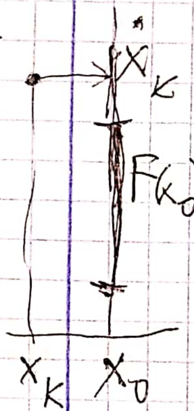
תלות רציפה בתנאי התחלה, וגם 31 ימ'

$$\dot{x} \in F^*(x) \subset F(x^{\varepsilon})^{\varepsilon}$$

$x \in \Omega^{\delta} \subset \Omega$

$$\Gamma = \left\{ (x, \dot{x}) \,\middle|\, \begin{array}{l} \dot{x} \in F(x) \\ x \in \Omega \end{array} \right\}$$





__למה__ $F(x)$ חסומה לוקלית, סגורה, לא ריקה

בתחום הגדרה סגור

תנאי רציפות מלמעלה $\Longleftrightarrow$ הגרף סגור

ב $\mathbb{R}^{2n} \sim \mathbb{R}^n \times T\mathbb{R}^n$

__הוכחה__ 1. "$\Leftarrow$" $\Gamma \ni (x_k, \dot{x}_k) \to (x_0, \dot{x}_0)$

מטילים ל $F(x_0)$ לנק' הקרובה ביותר ל $\dot{x}_k$

$$\exists x_{k_\ell} \to x_0, \quad \dot{x}_{k_\ell} - \dot{x}_{pk_\ell} \to 0, \quad \dot{x}_{pk_\ell} \to \dot{x}_0 \in F(x_0)$$

מקומפקטיות של $F(x_0)$ ... ל

2. "$\Rightarrow$" נניח בשלילה!

$$\boxed{x_k \to x_0, \ \rho\big(F(x_k), F(x_0)\big) \not\to 0}$$

$F(x_0)$ ⊃ כי Γ closed

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall k \ \underbrace{}_{(\exists \ell > k)} \ \exists \dot{x}_\ell \in F(x_\ell), \ \rho\big(\dot{x}_\ell, F(x_0)\big) \geq \varepsilon \Rightarrow \rho\big(\lim_k \dot{x}_\ell, F(x_0)\big) \geq \varepsilon$$

משפיעה

סתירה

מסקנה
טענה 1

L Filippov הכללה $\dot x \in F(x)$

נתון $x \in$ רציפות $\epsilon_k \to 0$

פתרונות $\dot x_{\epsilon_k} \in \left[coF(x_{\epsilon_k}^{\epsilon_k})\right]^{\epsilon_k}$

מוגדרים בקטע $t \in [\alpha_k, \beta_k]$

~~$\lim_{k\to\infty} x_{\epsilon_k} = x_*$, x~~

כך ש $(\alpha_k, \beta_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (\alpha, \beta)$ כך ש

אז לכל תת-קטע $[\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta)$ קיימת

תת סדרה $k_\ell \to \infty$ כך ש.

$$\lim_{\ell \to \infty} x_{\epsilon_{k_\ell}} = x_* , \quad \dot x_* \in F(x_*)$$

במידה שווה, מעל $[\alpha', \beta']$

טענה 2

$$\forall \delta > 0 \ \exists \epsilon > 0 : \forall x_\epsilon(\cdot) : \dot x_\epsilon \in \left[coF(x_\epsilon^\epsilon)\right]^\epsilon , \ t \in [\alpha, \beta]$$

קיים $\exists x_*(\cdot) : \dot x_* \in F(x_*)$

$$\max_{t\in[\alpha,\beta]} \|x_*(t) - x_\epsilon(t)\| = \|x_* - x_\epsilon\|_C < \delta$$

הוכחה:

טענה 1 = למה + Arzela

נצייר זאת במשפט (ג), $\exists$

1. קיום של $x_{\epsilon_k} \to x_*$ ⇐
2. $\forall \epsilon : \dot x_* \in \left[coF(x_*^\epsilon)\right]^\epsilon$
3. ⇐ $\dot x_* \in F(x_*)$

טענה 2: צריך שלילה:

$$\exists \delta > 0 \ \forall \epsilon > 0 \ \exists x_\epsilon , \ \forall x_* \ \|x_* - x_\epsilon\|_C \geq \delta , \ \dot x_* \in F(x_*)$$

אז נקבל קיום, פתרון $\epsilon_k \to 0$ ⇐ סתירה לטענה 1.

מש"ל.

מסקנה:

קיבלנו כל הפתרונות

סטנדרטיים ב-

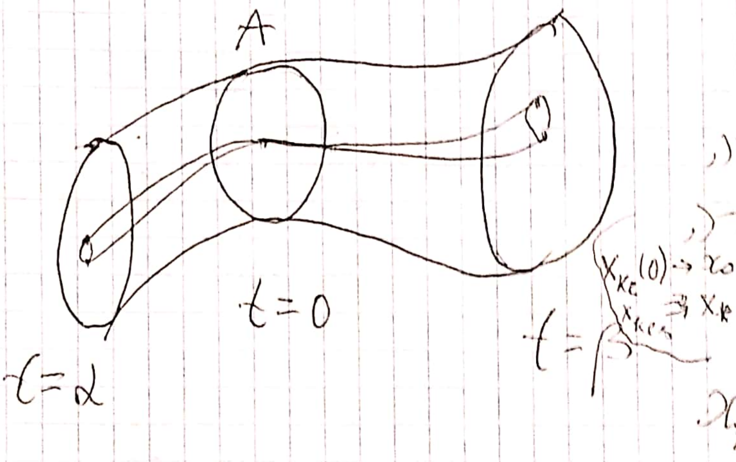
כמו ODE של

הערות
ϵ_k - Euler solutions
if $\dot x \in F$

משפט
נתונה הכללה $\dot{x} \in F(x)$ Filippov $x \in G$ תחום
נניח $x(0) \in A$ תנאי התחלה
לכל תנאי התחלה כזה קיים פתרון
$x(t) \in G$, $t \in [\alpha,\beta]$, $0 \in [\alpha,\beta]$, A - קומפקט
תנאי (נוסף): G - קומפקטי אז F חסומה בG אפשר להוכיח בלעדיו (Filippov) ~~בלעדיו~~

1. קבוצת הפתרונות קומפקטית ב $C[\alpha,\beta]$
2. קבוצת הנקודות של המסלולים קומפקטית ב R^n

הוכחה:



1. $x_k(t)$ סדרה, Arzela ⟸ תת-סדרה מתכנסת לפתרון עם תנאי התחלה ב-A $x_k(0) \in A$
2. ניקח סדרה $x_k(t_k)$ נבחר תת-סדרה $t_{k_\ell} \to t_0$, $x_{k_\ell} \to x_*$ ⟸ $x_{k_\ell}(t_k) \to x_*(t_k)$ מוכיח.

תזכורת: במרחב מטרי שני הגדרות שקולות: (א) קומפקט זאת קבוצה M שלכל כיסוי שלה בקבוצות פתוחות יש תת-כיסוי סופי
(ב) לכל סדרה $\{x_k\}$ יש תת סדרה $x_{k_\ell} \to x_* \in M$

הגדרת Filippov

f - מדידה לבג, $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

חסומה לוקלית

(מוגדרת במובן בכל נקודה)

__הגדרה:__ $x(t)$ נקרא פתרון במובן של Filippov אם הוא מקיים את ההכלה הדיפרנציאלית:

$$\dot{x} \in F(x) = K_F[f](x) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\mu N=0} \overline{co}\, f(x^\delta \setminus N)$$

כאשר μ - מידת Lebesgue

__משפט:__ $\dot{x} \in K_F[f](x)$ - הכלת Filippov

__הוכחה לא קלה__

אפשר מעט לפשט את ההגדרה,

__הגדרה:__ Approx. continuity, רציפות קירובית

נק' x_0 נקראת נק' של Approximate continuity של הפונקציה $f(\cdot)$ אם קיימת קבוצה $E(x_0)$ בסביבת x_0 אשר מקיימת:

1. $f(x)$ רציפה ב-x_0 על $E(x_0)$

$$f(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E(x_0)}} f(x)$$

2.

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\mu\left(E(x_0) \cap x_0^\delta\right)}{\mu\, x_0^\delta} = 1$$

__משפט:__ f מדידה $\Leftarrow$ במעט כל נקודה היא נק' של רציפות קירובית

למה: $K_F[f](x) = \bigcap_{\delta>0} \overline{co} f(x^\delta \setminus N_0)$

N_0 - כל נקודות שבהן לא של רציפות קירובית

הוכחה:

$\forall N_1, \mu(N_1)=0: \overline{co} f(x^\delta \setminus N_1) \supset \overline{co} f(x^\delta \setminus N_0)$

באמת: אם $x_0 \notin N_0$, $\|x_0 - x\| < \delta$ $\Leftarrow$ $\boxed{\forall N, \mu N=0 \Rightarrow f(x_0) \in \overline{f(x^\delta \setminus N)} \quad \forall \delta>0}$

כי $E(x_0)$ ממידה >0 בכל x_0^δ

$\Leftarrow$ גם אחרי שזורקים N נשארות מ $E(x_0)$

$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} x_k, \quad x_k \in \left(E(x_0) \cap x_0^\delta\right) \setminus N$

לכל δ: $\overline{co} f(x^\delta \setminus N_1) = \overline{co} f(x^\delta \setminus (N_1 \cap N_0)) \supset \overline{co} f(x^\delta \setminus N_0)$

$\Leftarrow \bigcap_{\mu N=0} \overline{co} f(x^\delta \setminus N) \subset \overline{co} f(x^\delta \setminus N_0)$
$\supset \overline{co} f(x^\delta \setminus N_0)$

מש"ל

~~הערה: אינטגרל Lebesgue של ... $N_1 \cap$~~

(... [illegible]) **למה:** $F = \bigcap_{\delta>0} F_\delta$, F_δ - סגורים, $\delta \in \mathbb{R}$; $\delta_1 < \delta_2 \Rightarrow F_{\delta_1} \subset F_{\delta_2}$

$\exists \underset{\text{סדרה}}{\delta_k \to 0}, y_k \in F_{\delta_k}, y = \lim_{k\to\infty} y_k \Leftrightarrow y \in F$

הוכחה: 1. "$\Leftarrow$" $\forall \delta\ y \in F_\delta \Rightarrow y = \lim y_k$
$y_k = y, \quad \delta_k \to 0$

2. "$\Rightarrow$" $\exists \lim y_k = y, \quad y_k \in F_k, \quad k \to \infty$

$\boxed{\forall \delta\ \exists k_0: \delta > \delta_{k_0}}$

$\Leftarrow$ נבחר תת-סדרה $\underset{\text{מונוטונית}}{\delta_{k_\ell} \searrow 0}$ $\Leftarrow$ $\forall \ell > \ell_0\ y_{k_\ell} \in F_{\delta_{k_0}} \subset F_\delta$
$\forall \delta \Rightarrow \lim y_{k_\ell} = y \in F$

$f(x)$ - מדידה, חסומה מקומית, $x \in \mathbb{R}^n$

גישת Filippov

$$F(x) = \bigcap_{\delta>0} \overline{co} f(x^{\delta} \setminus N_0) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\mu N=0} \overline{co} f(x^{\delta} \setminus N)$$

תכונות Filippov.

1. $F(x)$ לא ריקה, נקח $\delta_k \searrow 0$

$y_k = f(x_k),\ x_k \in x^{\delta_k} \setminus N_0 \Rightarrow y_k$ חסומה

$y_{k_\ell} \to y_*$ תת-סדרה $\Rightarrow \forall k_0\ y_{k_\ell} \in f(x^{\delta_k} \setminus N_0)$ סגורה (לכל)

$x_{k_\ell} \to x \Rightarrow y_* \in F(x)$

2. חסומה, קמורה, סגורה - כחיתוך של כאלה

3. $F(x)$ רצ' למחצה מלמעלה

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_\delta \in x^{\delta}: \|x - x_\delta\| < \delta \Rightarrow \forall y \in F(x_\delta)\ \ \rho(y, F(x)) < \varepsilon$$

תזכורת:

$\rho(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$

$\rho(y, M) = \inf_{m \in M} \rho(y, m) = \min_{m \in M} \rho(y, m)$ אם M - compact

נניח בשלילה:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x_\delta \in x^{\delta},\ y_\delta \in F(x_\delta): \ \rho(y_\delta, F(x)) \geq \varepsilon$$

בפרט עבור סדרה

$$\delta_k \searrow 0,\ x_{\delta_k} \to x,\ \rho(y_{\delta_k}, F(x)) \geq \varepsilon$$

$$y_{\delta_k} \in F(x_{\delta_k}) \Rightarrow \exists\ \hat{y}_{\delta_k 1}, \dots, \hat{y}_{\delta_k, n+1} \in f(x_{\delta_k}^{\delta_k} \setminus N_0),\ \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \geq 0$$

$$\Big\| y_{\delta_k} - \underbrace{\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \hat{y}_{\delta_k j}}_{\tilde{y}_{\delta_k}} \Big\| < \delta_k, \quad \sum \alpha_j = 1$$

ברור

$$\hat{y}_{\delta_k} \in \overline{co}\, f(x^{\delta_k}_{\delta_k} \setminus N_0) \subset \overline{co}\, f(x^{2\delta_k} \setminus N_0)$$

$$\lim y_{\delta_k} = \lim \hat{y}_{\delta_k} \Leftarrow \|y_{\delta_k} - \hat{y}_{\delta_k}\| < \delta_k, \quad \delta_k \to 0$$

$$\lim_{l\to\infty} \hat{y}_{\delta_{k_l}} = y_* \Leftarrow y_{\delta_{k_l}} \to y_* \quad \text{נבחר}$$

$$\rho(y_{\delta_k}, F(x)) \ge \varepsilon \Rightarrow \rho(y_*, F(x)) \ge \varepsilon$$

פונקציה רציפה, ג.מ. y

מצד שני

$$y_* = \lim_{l\to\infty} \hat{y}_{\delta_{k_l}} \in \bigcap_{\delta>0} \overline{co}\, f(x^{\delta} \setminus N_0) = F(x) \Rightarrow \rho(y_*, F(x)) = 0$$

(הגדרה)

סתירה

מ.ש.ל.

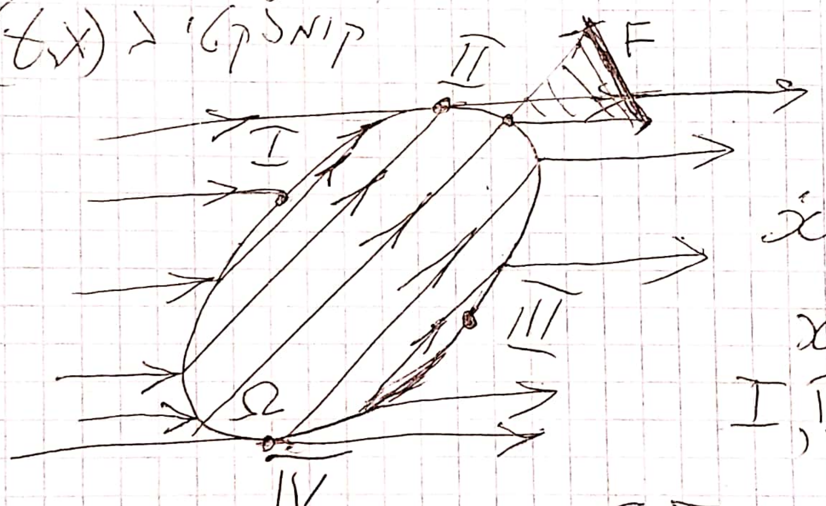
Imperfections

שגיאה, היסטרזיס, עיכוב מעגל (דלאי), ...

hysteresis delay

$$\dot{x}_\varepsilon \in [\overline{co}\, F(x^\varepsilon)]^\varepsilon = (\overline{co}\, F(x^\varepsilon))^\varepsilon$$

$\varepsilon \to 0$ פתרונות מתכנסים לפתרון של $\dot{x} \in F(x)$ במידה וזה מקיים כל תנאים קומפקטי ב (t,x)



דוגמא

$$\dot{x} = \begin{cases} (1,1) & x \in \Omega \\ (1,0) & x \notin \Omega \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^2$

נקודות I, II, III, IV

מיקום

III-IV-SM לא יציב, I-II - SM, II-III, IV-I

מעבר חלק

(פיליפוב Filippov) $x \in \mathbb{R}^n$ $\dot{x} = f(t,x)$

Lebesgue measurable, locally bounded

<u>הגדרה</u>

$\delta >$ כל [illegible] בקבוצה,

א'-רציפות $F(t,x)$ כולל שני וקטורים לגמרי

נקראת [illegible] מ-SM,

משוואות עם אי-רציפויות

הגדרות, כלליות — של Filippov (1959)

$$\dot{x} = f(t,x) \in T_x\mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

f מדידה לפי Lebesgue, בתחום G

לכל $D \subset G$, D קומפקט, קיימת פונקציה $m(t)$ סופית כמעט בכל t ומדידה,

אשר מקיימת $|f(t,x)| \leq m(t)$ כמעט בכל $(t,x) \in D$, $\exists \int_{t_1}^{t_2} m(t)\,dt$

לכל $t_1 \leq t_2$ שנמצאים ב-D

הגדרה Caratheodory כללית

$$\dot{x} \in F(t,x) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\mu N=0} \overline{co}\, f(t, x^{\delta} \setminus N)$$

t ו-x לא שווי זכויות פה

הגדרה של

$$\dot{x} = f(t,x) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ \dot{t} = 1 \end{cases}$$

$$\dot{x} \in F(t,x) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\mu N=0} \overline{co}\, f((t,x)^{\delta} \setminus N)$$
$$\dot{t} = 1$$

כאן יש יותר גמישות במעבר

גם מעבר וגם מתגלים הקירובים

הגדרה Caratheodory (1918)

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad f(\cdot,x) \text{ — מדידה לפי Lebesgue}$$

$$|f(t,x)| \leq m(t) \qquad f(t,\cdot) \text{ — רציפה (כמעט בכל } x\text{)}$$

$$\exists \int_0^t m(t)\,dt$$

$\Leftarrow$ קיום פתרון (כפונקציה ~~x~~ רציפה, בהחלט)

הכללה לא מערכים חלקה

חלקה: $\dot{x} = f(x)$, $y=\varphi(x)$, $x=\varphi^{-1}(y)$

$$\dot{y} = \varphi'(x)\dot{x} = \varphi'_x(\varphi^{-1}(y))f(\varphi^{-1}(y))$$

$$\dot{y} \in \varphi'_x(\varphi^{-1}(y))F(\varphi^{-1}(y))$$

העתקה לא ליניארית כדיפאו

היא שומרת על קמירות, וחצי רציפות עליונה קומפקטיות

⇐ גם פונקציית Lyapunov

משפט (Clarke, Ledyev, Stern, 1998)

הכלה Filippov $\dot{x} \in F(x)$

$x=0$ - נק' איזון יציבה אסימפ' גלובלית

(לוקלית - אז גלובלית)

⇔ קיימת פונקציה $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

פונקציית Lyapunov ו- $W:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$

1. $W,V\in C^\infty$
2. מוגדרות חיוביות

positive definite: $W,V \geq 0$, $W(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$V(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

3. אם global AS stability

אז V - radially unbounded

($V \leq c$ קבוצת חסומה ב- $\mathbb{R}^n$ לכל c)

($\lim V(x_k)=\infty \Leftarrow \lim_{k\to\infty}\|x_k\|=\infty$ ⇔)

---

max:

$$\sup_{\dot{x}\in F} \nabla V(x)\dot{x} \leq -W(x)$$