הרצאה 7, 06/05-2021

71a

הבעיה העיקרית שלנו עד סוף הקורס:

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}$$

a, b_x - חלקים, $\sigma : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ חלקה, $\sigma(t,x)$ (יציאת עדיפה)

היעד: לאפס את σ בזמן סופי

~~יעד~~: דינמיקת אפס לא מתפוצצת (practically stable)

פתרונות $x(t)$ מוארכים בזמן עד ∞ אם $u(t)$ חסום לאורך הפתרון

נניח: relative degree r

$$\sigma^{(r)} = h(t,x) + g(t,x)u$$

$$|h| \le C, \quad g(t,x) \in [K_m, K_M], \quad K_m > 0$$

σ נמדד $\Leftarrow$ לבנות $u(t)$

זכור $\Leftarrow$ $u = U(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)})$ (חסום)

הרצאה 7, 06/05-2021 | בעיות הכרעה

71

1. Equivalent control (Utkin et al. 1970s)

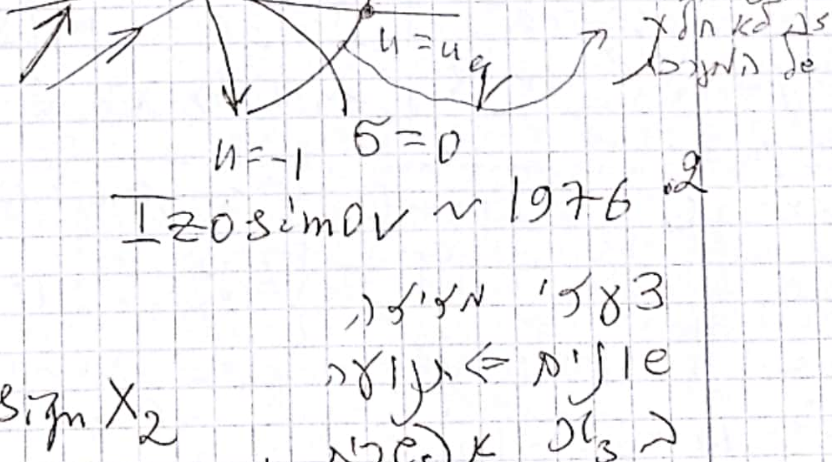
$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$
$$\dot{x} = v(x,u)$$

$u = -\operatorname{sign}\sigma, \quad \sigma \equiv 0$

$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \cancel{v} = 0$

$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x)\, v(x,u) = 0 \Rightarrow u = u_{eq}$

$$\Leftarrow \begin{cases} \dot{x} = v(x, u_{eq}) \\ \sigma(x) \equiv 0 \end{cases}$$

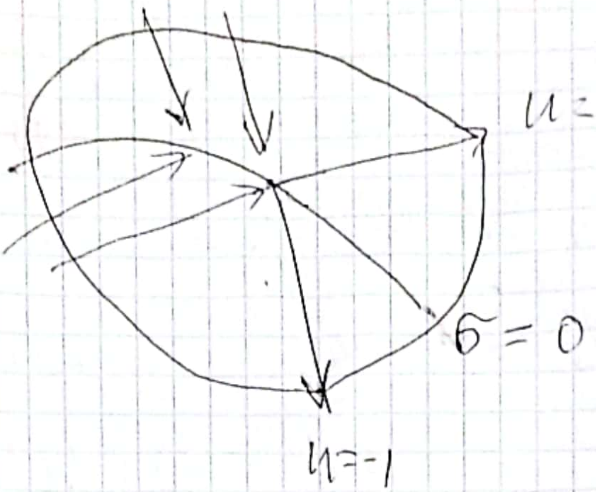


2. Izosimov ~1976

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\operatorname{sign} x_1 \\ \dot{x}_2 = -\operatorname{sign} x_2 \\ \dot{x}_3 = \operatorname{sign} x_1 \cdot \operatorname{sign} x_2 \end{cases}$$

בעצם מיוחד, אין $\Leftarrow$ תנועה ב x_3 אפשרית בכל כיוון!

.3



תנועה אפשרית בכל כיוון!
בלי מנוע (Actuator) מסוים;

1. פונקציה רציפה בהחלט (בקטע) $x(t)$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall n\ \sum^{n}|\Delta t_i|<\delta \Rightarrow \sum|\Delta x_i|<\varepsilon$$

בלתי נחתכים

ידוע שהיא גזירה כמעט בכל נקודה

2. σ-אלגברה של קבוצות

עם יחידה I

$$A_i \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

$\neg A = I - A,\ A \in I$ $\quad$ $I \in \Sigma,\ \neg I = \emptyset,\ A \in \Sigma \Rightarrow \neg A \in \Sigma$

$$A \cap B = \neg(\neg A \cup \neg B) \in \Sigma,\quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

3. מידה Measure

$$\mu : \Sigma \to R,\quad \mu(\emptyset)=0,\ \mu(A)\geq 0$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) \Leftarrow \forall_{i \neq j}\ A_i \cap A_j = \emptyset$$

R^n קבוצות סגורות ⇐ גם פתוחות ⇐ σ-Algebra של Borel

Cantor Set

מידה נקראת סופית אם $\mu(I)<\infty$

σ-סופית: $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ \mu(A_i)<\infty$

מידה נקראת שלמה (Complete) אם $B \subset A,\ \mu(A)=0 \Rightarrow B \in \Sigma,\ \mu(B)=0$

דוגמא: Borel Measure לא שלמה

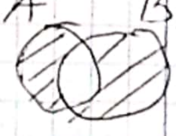
measure completion Lebesgue מידת

$$\mu^*(B) = \cancel{\sup} \inf_{\substack{A \supseteq B \\ A \in \Sigma}} \mu(A)$$

$B \in \Sigma^* \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists A \in \Sigma : \mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ מגדירים

מדידה לפי Lebesgue

$$A \Delta B = (A \setminus B) \uplus (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



$\mu(B) \overset{def}{=} \mu^*(B)$

Lebesgue מידת ⟸ [נק׳, קטע, אורך ; Borel קבוצות (מידת Borel)]

$\mu[a,b] = b-a$ $\quad \mathbb{R}, \mathbb{Z} : \mu = 0$

$\mu(\text{Cantor set}) = 0$, (Cantor: $x \in [0,1]$ בלי 1 בבסיס 3)

4. פונקציה מדידה

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Lebesgue → Borel

מקור של כל קבוצה מדידה לפי Bore(l) מדידה לפי Lebesgue

פונקציה מורכבת לא מדידה

פונקציה מדידה לפי Borel

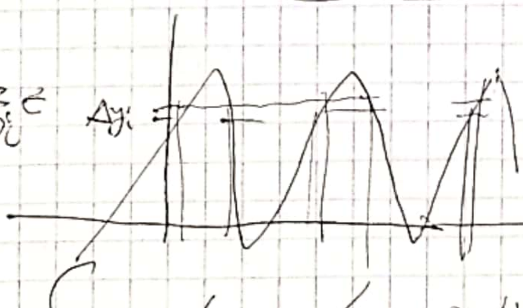
Borel → Borel $\quad \cancel{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}$

פונקציה מורכבת מדידה

אינטגרל Lebesgue

5.

$\xi_i \in \Delta y_i$

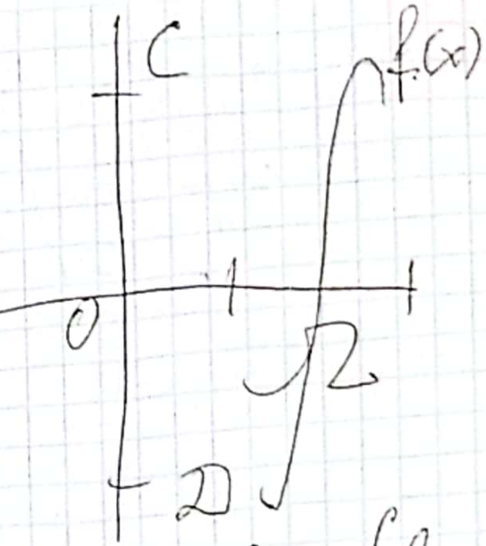


$$I = \lim_{\max|\Delta y_i| \to 0} \sum \xi_i \mu(f^{-1}(\Delta y_i))$$

פונקציה חסומה ומדידה ⟸ אינטגרבילית

$$f_C = \begin{cases} C, & f(x) > C \\ f(x), & 0 < f(x) \le C \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f_D = \begin{cases} 0, & f(x) > 0 \\ f(x), & D < f(x) \le 0 \\ D, & f(x) < D \end{cases}$$



$$\int_\Omega f(x)\,dx = \lim_{C\to\infty} \int_\Omega f_C(x)\,dx + \lim_{D\to-\infty} \int f_D(x)\,dx$$

6. תזכורת: Absolutely continuous function

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(t)\,dt$$

פונקציה אינטגרבילית

ספר Filippov

הכלה, דיפרנציאלית

Differential Inclusion

$x \in \mathbb{R}^n$, $\dot{x} \in F(x) \subset T_x\mathbb{R}^n$

הגדרה: פתרון להכלה הוא כל פונקציה, $x(t)$ רציפה בהחלט לוקלית אשר מקיים $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ כמעט בכל נקודת זמן t (במובן לבג)

דרישות בסיסיות של Filippov ל-$F(x)$:

1. לא ריקה
2. חסומה וסגורה (קומפקטית)
3. קמורה convex
4. חצי-רציפה מלמעלה (upper semicontinuous)

הגדרה $\rho(x,y)$ מרחק

$\rho(x,y)=\|x-y\|$, $\rho(x,A)=\inf_{y\in A}\rho(x,y)$

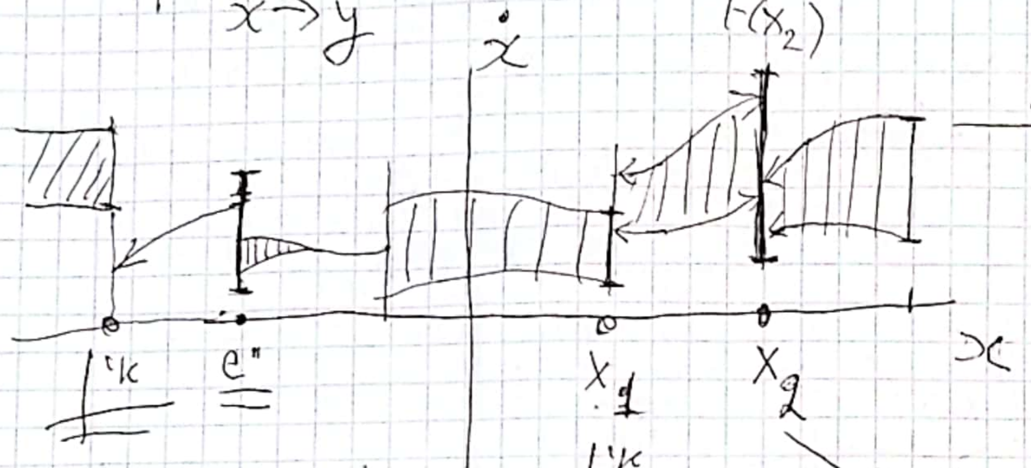
$F(x)$ קומפקטי נקראת חצי רציפה מלמעלה

אם

$$x\to y \Rightarrow \underbrace{\max_{x\in F(x)}\rho(x,F(y))}_{\max\limits_{x}\min\limits_{y\in F(y)}\rho(x,y)}\to 0$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\|x-y\|<\varepsilon\Rightarrow\max_{x\in F(x)}\min_{y\in F(y)}\|x-y\|<\delta$$

הסבר גאומטרי:



דוגמא

$x\in\mathbb{R}$

$F(x)$ - קומפקטי, קמור

$\Downarrow$

קטע

הגדרה הכלה דיפרנציאלית נקראת הכלת Filippov אם מתקיימים תנאים מסוימים של Filippov (מוסבר פה)

משפט (Filippov ~1958)

להכלת Filippov תמיד יש פתרון לוקלי לבעיית Cauchy (לא יחיד)

סימון $\bar{M}$ - סגור קבוצת M, conv M - קמור M

(קבוצה מינימלית סגורה שמכילה M) (קבוצה מינימלית קמורה שמכילה M)

convex closure $\overline{co}\,M$ - קמור סגור

קבוצה מינימלית (חיתוך של כולם)
שהיא קמורה, סגורה, ומכילה M

מש (6.ם) (Caratheodory, 1907)   ללא הוכחה

~~$(coM=M)$ M קמורה~~, $M\subset R^n$ קומפקטי ⇐

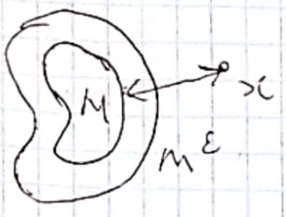
$$\forall x\in coM \Leftrightarrow \exists\, k\in[1,n+1],\ \alpha_i\geq 0,\ a_i\in M,\ i=1,\dots,k$$
כך ש
$$x=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i a_i,\quad \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$$

מסקנה: M קומפקטי ⇐ $coM=\overline{co}M=\overline{coM}$

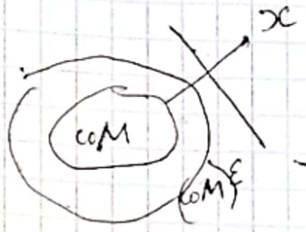
סימון Filippov: $M^\varepsilon=\{x\in R^n \mid \rho(x,M)\leq\varepsilon\}$ נפוח M ב-ε, $\varepsilon\geq 0$

ברור ש M^ε תמיד קבוצה סגורה.

גם $x\notin M^\varepsilon \Rightarrow \rho(x,M)=\rho(x,M^\varepsilon)+\varepsilon$

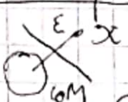


למה 1: M חסומה ⇐
$$\boxed{co(M^\varepsilon)=(coM)^\varepsilon}$$



מישור מפריד

דרך הוכחה: $x\notin co(M^\varepsilon)\Leftrightarrow x\notin(coM)^\varepsilon$
$$\Downarrow$$
$\rho(x,coM)>\varepsilon \Rightarrow$



~~למה 2~~ נובע מזה:

M חסומה, $coM=M$
$$\Rightarrow\ coM^\varepsilon=M^\varepsilon$$

עכשיו נראה למה צריכים קמירות וסגירות

למה 2

$x_k : [\alpha,\beta] \to R^n$ רציפות בהחלט

כמעט בכל מקום $\dot{x}_k \in M$, M חסומה, $\forall y \in M : \|y\| \le L$

$x_k(\cdot) \rightrightarrows x_*(\cdot) \Rightarrow$ $x(t)$ רציפה בהחלט, $\dot{x}(t) \in \overline{co}M$

במידה שווה

הוכחה

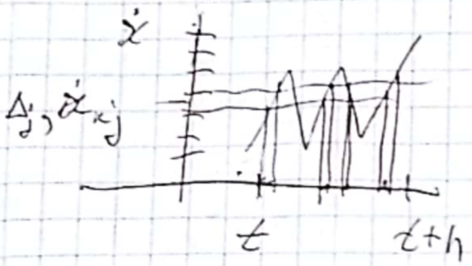
$$\|x_k(t') - x_k(t'')\| \le \Big\| \int_{t''}^{t'} \dot{x}_k(t)\,dt \Big\| \le L\,|t' - t''|$$

$$\xrightarrow{k\to\infty} \|x_*(t') - x_*(t'')\| \le L\,|t' - t''|$$

רציפות בהחלט (ליפשיץ)

$$q_{k,h} = \frac{x_k(t+h) - x_k(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \dot{x}_k(s)\,ds =$$

$$= \lim_{\max(\Delta_j)\to 0} \sum_j \frac{\dot{x}_{k_j}\,\mu(\dot{x}_{k_j}^{-1}(\Delta_j))}{h} = \lim \sum \dot{x}_{k_j}\alpha_j$$



$$\alpha_j = \frac{\mu(\dot{x}_{k_j}^{-1}(\Delta_j))}{h}, \quad \sum_j \alpha_j = 1$$

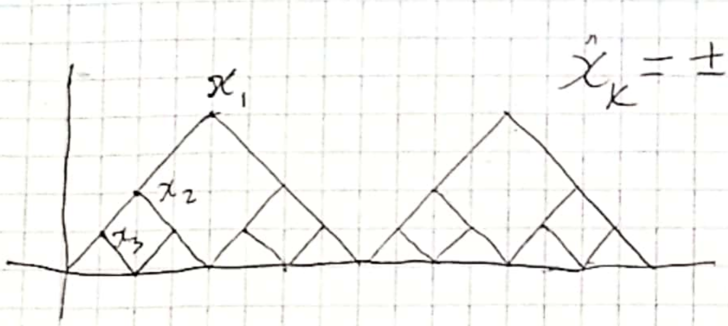
$$= \lim \sum_j \underset{\vartheta_j \in M}{\vartheta_j}\,\alpha_j = \lim \vartheta \in \overline{co}M$$

$$\overline{co}M \ni \lim \vartheta$$

$$q_h = \lim_{k\to\infty} q_{k,h} = \frac{x_*(t+h) - x_*(t)}{h} \in \overline{co}M$$

$$\dot{x}_* = \lim_{h\to 0} q_h \in \overline{co}M$$ כאשר פ"פ

דוגמא $\dot{x}_k = \pm 1$, $M = \{1,-1\}$



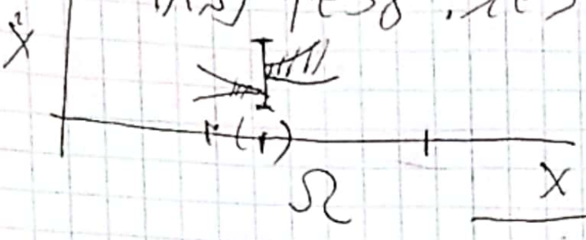
$x_k \rightrightarrows 0$, $\dot{0} \in \overline{co}M$

$\dot{0} = 0 \notin M$

(78)

משפט: $F(x)$ - קומפקטית, לא ריקה, רציפה למחצה מלמעלה $\Leftarrow$ $F(x)$ חסומה בסביבה של כל נקודה $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$ (קומפקט)

הוכחנו מחצי רציפות $F(x)$ חסומה בסביבה מסויימת של כל נקודה $\Omega\ni x$. עכשיו נבחר תת-כסוי סופי מ.ש.ל.



$\dot{x}\in F(x)$ - הכללת Filippov

הגדרה: פתרון להכללה

$\dot{x}_\delta\in[\operatorname{co}F(x^\delta)]^\delta$

נקרא δ-פתרון

למה 3: $\dot{x}_k\in[\operatorname{co}F(x_k^{\delta_k})]^{\delta_k}$, $\delta_k\to 0$

סדרת δ-פתרונות מוגדרים ב $t\in[\alpha,\beta]$

נניח $x_k\rightrightarrows x_*$ (באופן אחיד במידה שווה ~)

$\Leftarrow$ $x_*(t)$ רציפה בהחלט ו- $\dot{x}_*\in F(x_*)$

הוכחה: נקבע $t_0\in[\alpha,\beta]$ כלשהו

נניח $\mathbb{R}^n\ni x_0=\lim_{k\to\infty}x_k(t_0)$ נקודה

א. רציפות בהחלט

מרציפות בהחלט $\Leftarrow$ $F(x)\subset F(x_0)^\varepsilon$ בסביבת x_0

$\Leftarrow$ גם בסביבת "$t=t_0$", $\dot{x}_k\in \underbrace{F(x_0)^{2\varepsilon}}_{\text{קומפקט}}$, $x_k\to x_*$

$\boxed{(\forall t_0)\ t_0 \text{ רציפה בהחלט בסביבת } x_*(\cdot)}$ $\Leftarrow$ למה 2

ב. נראה:

$\dot{x}_k\in[\operatorname{co}F(x_k^{\delta_k})]^{\delta_k}\subset[\operatorname{co}F(x_0)^\varepsilon]^{\delta_k}=[F(x_0)^\varepsilon]^{\delta_k}=F(x_0)^{\varepsilon+\delta_k}$

$\delta_k\to 0$

$\dot{x}_k\in F(x_0)^{2\varepsilon}$, $x_k\to x_*\Rightarrow\dot{x}_*\in F(x_0)^{2\varepsilon}$

$\forall\varepsilon>0$ $\delta_k\to 0\Rightarrow\dot{x}_*\in F(x_0)^{2\varepsilon}$

$\varepsilon\to 0$ $\Leftarrow$ אם קיים $\dot{x}_*$ אז $\dot{x}_*(t_0)\in F(x)$ מ.ש.ל.

משפט קיום הפתרון לוקלי

79

$F: G \to T\mathbb{R}^n$ $\qquad \dot{x} \in F(x)$

הכלה Filippov, בעיית Cauchy $x(t_0)=x_0$

נניח $V=\{x \mid \|x-x_0\| \le b\} \subset G$

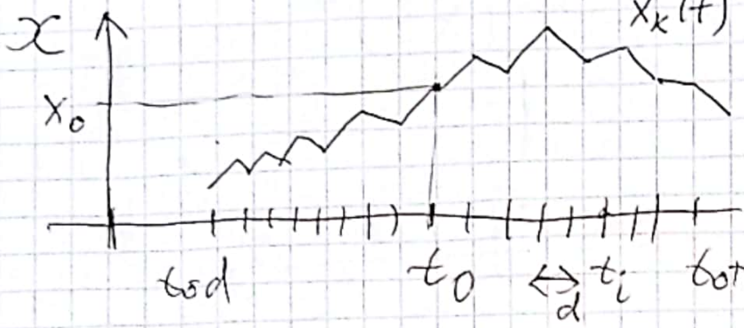
$m=\sup\{\|y\| \mid y \in F(x), x \in V\}$ (קיים סופי כי משפט)

⇐ פתרון לוקלי קיים ומוגדר ב- $t\in[t_0-d, t_0+d]$

כאשר $d=\frac{b}{m}$

אין יחידות

הערה: משפט נכון גם ל-ODE
$\dot{x}=f(x),\ f\in C$ (משפט Peano)



הוכחה: פתרון Euler

$t_{i+1}-t_i=\frac{d}{k}$

בכל t_i מגדירים $\dot{x}(t_i)$ בצורה אקראית

$\dot{x}_k(t_i) \in F(x_k(t_i))$ $\qquad \dot{x}_k=\dot{x}_k(t_i),\ t_i \le t < t_{i+1}$

$$\|x_k(t_{i+1})-x_k(t_i)\| \le \frac{d}{k}\cdot m$$

⇐ כמובן $x_k(t)$ רציפות, מוגדרות ב-$[t_0-d, t_0+d]$

ואפילו ליפשיץ עם קבוע ליפשיץ m

משפט Arzela-Ascoli: כל קבוצה של פונקציות

רציפות באופן אחיד (equicontinuous) וחסומות

באופן אחיד היא קדם-קומפקטית (precompact)

בכל סדרה יש תת-סדרה מתכנסת ב-C.

⇐ $x_{k_\ell} \underset{\ell\to\infty}{\rightrightarrows} x_*$, $\quad \dot{x}_k \in F(x_k(t_i)),\ t\in[t_i, t_{i+1})$

$$\Rightarrow \dot{x}_k \in F(x_k(t_i)) \subset \left[co F(x_k^{m\frac{d}{k}})\right]^{\delta} \subset \left[co F(x_k^{m\frac{d}{k}})\right]^{m\frac{d}{k}}$$ (80)

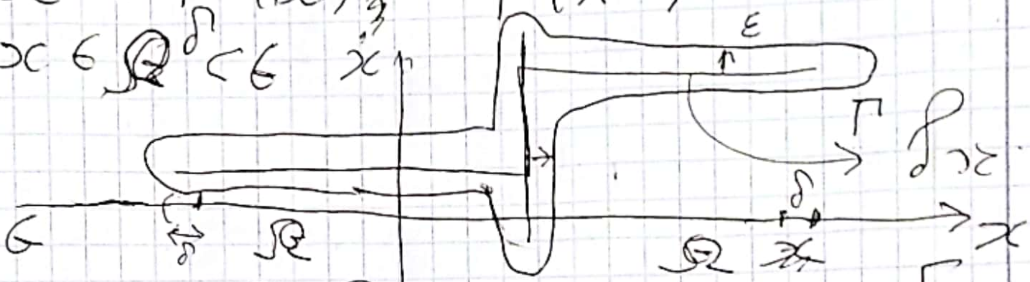
למה 3 ⇐ $x_*(t)$ רציפה, מוגבלת ומקיימת $\dot{x} \in F(x)$ מושלם.

משפט F מוגדר בקומפקט מתוך G פתוח
⇐ כל פתרון אפשר להאריך בכל כיוון הזמן עד לשפת הקומפקט או עד ∞.

תלות רציפה בתנאי ההתחלה ובצד ימין

$$\dot{x} \in F^*(x) \subset F(x^{\varepsilon})^{\varepsilon}$$

$x \in \Omega^{\delta} \subset G$



למה $F(x)$ חסומה לוקלית, סגורה, לא ריקה בתחום הגדרה סגור
תנאי רציפות מלמעלה ⟺ הגרף סגור ב- $R^{2n} \sim R^n \times TR^n$

הוכחה: 1. "⇐" $\Gamma \ni (x_k, \dot{x}_k) \to (x_0, \dot{x}_0)$
מטילים על $F(x_0)$ לנק' הקרובה ביותר ל $\dot{x}_k$

$$\exists x_{k_\ell} \to x_0,\quad \dot{x}_{k_\ell} - x_{pk_\ell} \to 0,\quad x_{pk_\ell} \to \dot{x}_0 \in F(x_0)$$

מקומפקטיות $F(x_0)$

2. "⇒" צריך שלילה! $x_k \to x_0$, $\rho(F(x_k), F(x_0)) \not\to 0$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall K\ (\exists \ell > K)\ \exists \dot{x}_\ell \in F(x_\ell),\ \rho(\dot{x}_\ell, F(x_0)) \ge \varepsilon \Rightarrow \rho(\lim \dot{x}_\ell, F(x_0)) \ge \varepsilon$$

סתירה