22/04-2021, הרצאה 5

כיוון שני

50

$\operatorname{rank}[g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g] = n$

$\Delta = \operatorname{span}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$ involutive

נמצא [illegible] ממשוואות

מקרה אופטימלי: $z_1,\ z_2 = L_f z_1, \dots, z_n = L_f^{n-1} z_1$

ממשפט Frobenius קיים w, $0 \neq \nabla w \perp \Delta$

מקרה לא אופטימלי: $\Leftarrow$ $z_1 = w$

ממשפט Frobenius קיימים w_1, w_2

נניח $\underbrace{\nabla w_1, \nabla w_2}_{\text{בלתי תלויים}} \perp \Delta \Rightarrow \nabla w_1 \cdot ad_f^{n-1} g \neq 0$

$\Leftarrow$ ניקח אותו אם לא

$z_1 = w_1$ $\Leftarrow$ ניקח w_2, $z_1 = w_2$

כי אם $[g, \dots, ad_f^{n-1} g] \in \mathbb{R}^{n+1}$ $\nabla w_1, \nabla w_2 \perp$ ב $\mathbb{R}^{n+1}$

$\Leftarrow \nabla w_1, \nabla w_2$ תלויים לינארית

[illegible] $\nabla t \perp [g, \dots, ad_f^{n-1} g]$ [illegible]

$\Leftarrow$ z_1, t מקיימים משפט Frobenius

כי $\nabla z_1, \nabla t$ בלתי תלויים*

$\cancel{L_g z_1 = L_g L_f z_1 = \dots = L_g}$

לכן

$$\boxed{L_g z_1 = L_{ad_f g} z_1 = \dots = \underbrace{L_{ad_f^{n-2} g} z_1}_{\nabla z_1 \cdot ad_f^{n-2} g} = 0}, \quad L_{ad_f^{n-1} g} z_1 \neq 0$$

[illegible]

$\Downarrow$ טענה 1

$L_g z_1 = L_g L_f z_1 = \dots = L_g L_f^{n-2} z_1 = 0$

בנוסף

$\beta = L_g L_f^{n-1} z_1 \neq 0$ (טענה 2) $\Leftarrow L_{ad_f^{n-1} g} z_1 = \nabla z_1 \cdot ad_f^{n-1} g \neq 0$

נגדיר $z_2 = L_f z_1, \dots, z_n = L_f^{n-1} z_1$

טענה!

$\nabla z_1, \nabla z_2, \dots, \nabla z_n, \nabla t$

בלתי תלויים

(⇐ כך נשלים לקואורדינטות)

דרך השלילה נניח מקרה לא טריוויאלי

$$\lambda_1 \nabla z_1 + \lambda_2 \nabla z_2 + \dots + \lambda_n \nabla z_n + \lambda_{n+1} \underbrace{\nabla t}_{=(0,\dots,0,1)} = 0$$

[illegible]

נכפיל ב ~~fxnen~~ g מימין

$$\underbrace{\lambda_1 L_g z_1 + \lambda_2 L_g L_f^2 z_1 + \dots +}_{0} \lambda_n \underbrace{L_g L_f^{n-1} z_1}_{\neq 0} + 0 = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0$$

$$\lambda_1 \nabla z_1 + \lambda_2 \nabla z_2 + \dots + \lambda_{n-1} \nabla z_{n-1} = 0$$

נכפיל ב $ad_f g$

$$\nabla z_s \cdot ad_f^k g = L_{ad_f^k g} L_f^{s-1} z_1 = (-1)^k L_g L_f^{k+s-1} \cancel{g} z_1 + \sum_{i=1}^{k} L_f^i L_g L_f^{k-i+s-1} z_1$$

לפי המשוואה שלנו

$L_g z_1 = L_g L_f z_1 = \dots = L_g L_f^{n-2} z_1 = 0$ ← מתקיים

לא משנה $L_g L_f^{n-1} z \neq 0$

לכן צעד אחר צעד $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$

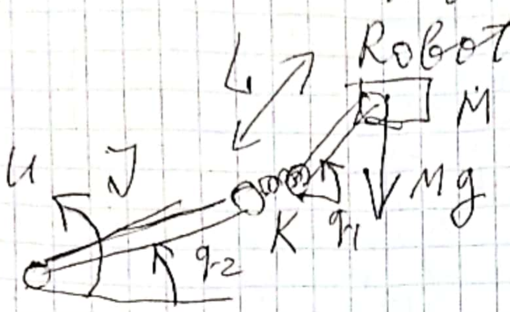
⇐ $\lambda_{n+1} = 0$ גם כן

מ.ש.ל.

Single-Link Flexible Joint Robot

דוגמא

(Isidori 85?)



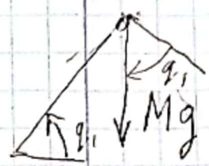
זוויות: q_1, q_2

מומנטים של [illegible]: J, I

k - מקדם גמישות של הקפיץ

מקרה אוטונומי: $\dot{x} = f + \hat{g} u$

(כיוון g)



$$x = (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)^T$$

$$\begin{cases} I\ddot{q}_1 + MgL\cos q_1 + k(q_1 - q_2) = 0 \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u \end{cases}$$

(Slotine $\cos \to \sin$)

$$f = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{MgL}{I}\cos x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ \frac{k}{J}(x_1 - x_3) \end{pmatrix}, \quad \hat{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix}$$

$$ad_f \hat{g} = \underbrace{\nabla \hat{g}}_{=0} \cdot f - \nabla f \hat{g} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ +\frac{MgL}{I}\sin x_1 - \frac{k}{I} & 0 & \frac{k}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J} & 0 & -\frac{k}{J} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix}$$

$$ad_f \hat{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad ad_f^2 \hat{g} = -\nabla f \, ad_f \hat{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{IJ} \\ 0 \\ -\frac{k}{J^2} \end{pmatrix},$$

$$ad_f^3 \hat{g} = -\nabla f \, ad_f^2 \hat{g} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{IJ} \\ 0 \\ \frac{k}{J^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

53

$$[\hat g, ad_f \hat g, ad_f^2 \hat g, ad_f^3 \hat g] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{IJ} \\ 0 & 0 & \frac{k}{IJ} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} & 0 & \frac{k}{J^2} \\ \frac{1}{J} & 0 & -\frac{k}{J^2} & 0 \end{pmatrix}$$

rank $=4$

Involutivity is trivial (const)

$z_1(x) = ?$ $\quad L_{\hat g} z_1 = 0 \quad L_{ad_f \hat g} z_1 = 0, \quad L_{ad_f^2 \hat g} z_1 = 0$

$$\underbrace{\frac{\partial z_1}{\partial x_4} \cdot \frac{1}{J} = 0 \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_3}\left(-\frac{1}{J}\right) = 0} \Rightarrow$$ אין תלות ב x_3, x_4

$$-\frac{\partial z_1}{\partial x_2}\frac{k}{IJ} + \frac{\partial z_1}{\partial x_4}\frac{k}{J^2} = 0 \Rightarrow$$ גם ב x_2

$\Leftarrow$ z_1 אין תלות ב x_1, x_3, x_4

$\Leftarrow$ $z_1 = z_1(x_1)$, נקח $z_1 = x_1$

$$\dot z_1 = \dot x_1 = x_2 = z_2$$

$$\dot z_2 = z_3 = \dot x_2 = -\frac{MgL}{I}\cos x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3)$$

$$\dot z_3 = z_4 = \frac{MgL}{I}\sin x_1 \cdot x_2 - \frac{k}{I}(x_2 - x_3)$$

$$\dot z_4 = \frac{MgL}{I}\cos x_1 \cdot \overset{x_2 \dot x_1}{x_2^2} + \frac{MgL}{I}\sin x_1\left(-\frac{MgL}{I}\cos x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3)\right)$$

$$-\frac{k}{I}\underbrace{\left(-\frac{MgL}{I}\cos x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3)\right)}_{\dot x_2} + \frac{k}{I}\underbrace{\left[\frac{k}{J}(x_1 - x_3) + \frac{1}{J}u\right]}_{\dot x_4}$$

$$\left[\hat{g}, ad_f \hat{g}, ad_f^2 \hat{g}, ad_f^3 \hat{g}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{IJ} \\ 0 & 0 & \frac{k}{IJ} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} & 0 & \frac{k}{J^2} \\ \frac{1}{J} & 0 & -\frac{k}{J^2} & 0 \end{pmatrix}$$

[illegible] Δ

$rank = 4$

Involutivity is trivial (const) וקטורים

$\nabla z_1 \neq 0$, $z_1(x) = ?$ $L_{\hat{g}} z_1 = 0$, $L_{ad_f \hat{g}} z_1 = 0$, $L_{ad_f^2 \hat{g}} z_1 = 0$

צריך למצוא!

$$\underbrace{\frac{\partial z_1}{\partial x_4} \cdot \frac{1}{J} = 0 \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_3}\left(-\frac{1}{J}\right) = 0}_{} \Rightarrow$$ אין תלות ב- x_3, x_4

$$-\frac{\partial z_1}{\partial x_2} \frac{k}{IJ} + \frac{\partial z_1}{\partial x_4} \frac{k}{J^2} = 0 \Rightarrow$$ גם ב- x_2

$\Leftarrow$ z_1 אין תלוי ב- x_1, x_3, x_4

אפשר גם $z_1 = 2x_1 + \sin x_1$

$\Leftarrow$ $z_1 = z_1(x_1)$, ניקח $z_1 = x_1$

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 = x_2 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = z_3 = \dot{x}_2 = -\frac{MgL}{I}\cos x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3)$$

$$\dot{z}_3 = z_4 = \frac{MgL}{I}\sin x_1 \cdot x_2 - \frac{k}{I}(x_2 - x_4)$$

$$\dot{z}_4 = \frac{MgL}{I}\cos x_1 \cdot \overbrace{x_2^2}^{x_2 \dot{x}_1} + \frac{MgL}{I}\sin x_1\left(-\frac{MgL}{I}\cos x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3)\right)$$

$$-\frac{k}{I}\underbrace{\left(-\frac{MgL}{I}\cos x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3)\right)}_{\dot{x}_2} + \frac{k}{I}\underbrace{\left[\frac{k}{J}(x_1 - x_3) + \boxed{\frac{1}{J}u}\right]}_{\dot{x}_4}$$

קיגלון e (54)

$$\dot z_4 = \alpha(x) + \beta(x) u = v$$

$$\alpha(x) = \dots, \quad \beta(x) = \frac{k}{IJ} \neq 0 \quad = const$$

נבחר מקדם אשר מייצב את $z_1, \dots, z_4$

$$(\lambda+1)^4 = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1$$

$$\underbrace{z_1^{IV}}_{\dot z_4} + 4\underbrace{\dddot z_1}_{z_4} + 6\overbrace{\ddot z_1}^{z_3} + 4\overbrace{\dot z_1}^{z_2} + z_1 = 0$$

$$\alpha + \beta u = v = -z_1 - 4z_2 - 6z_3 - 4z_4$$

$$u = -\frac{IJ}{K}\left(\alpha(x) + z_1 + 4z_2 + 6z_3 + 4z_4\right)$$

אפשר לייצב גם z בכל נקודה, מה זה?

$$z_0 = (z_{10}, 0, 0, 0), \Rightarrow x_1 = const, \ x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

במקרה $z = 0 \Rightarrow x = 0$

במקרה כללי $z = 0$ לא בהכרח מביא $x = 0$

לכל z אפשר להגיע אבל לא תמיד אפשר לעצור בו.

במקרה לא אוטונומי $z = 0$ לא מבטיח ~~להצעיר~~ תנועה בx! מצייר

$z(\bar x, t) = 0$

$\Rightarrow \bar x = \bar x(t)$

Relative Degree, Zero Dynamics

דינמיקת אפס, סדר יחסי

סימון: מקרה אוטונומי ולא אוטונומי

$$\dot{\bar x} = \bar f(\bar x, t) + \bar g(\bar x, t) u \qquad \bar x \in R^n, \ u \in R$$

$$\dot t = 1, \quad y = \bar h(\bar x, t), \quad h: R^{n+1} \to R$$

$$\dot x = f(x) + g(x) u, \quad f = \begin{pmatrix} \bar f \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \bar g \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y = h(x)$$

<u>הגדרה</u> rel. degree בנק' x_0 של y

שווה ל-r אם בסביבת x_0 מתקיים

$$L_g h \equiv L_g L_f h \equiv \dots \equiv L_g L_f^{r-2} h \equiv 0, \quad \underbrace{L_g L_f^{r-1} h \neq 0}$$

⇐ בכלל לא מתאפס בסביבה!

הערה, דומה מוגדר rel. degree בתחום

אם $r = const$ בתחום $x \in \Omega$

אז אומרים ש- r הוא system rel. degree

<u>בוא נבין את ההגדרה:</u>

$$\dot h = \nabla h (f + g u) = L_f h + \underbrace{L_g h\, u}_{=0} = L_f h$$

$$\ddot h = \nabla \dot h (f+gu) = \nabla L_f h (f+gu) = L_f^2 h + \cancel{L_g L_f h\, u} \to 0$$

$$h^{(r-1)} = L_f^{r-1} h + L_g L_f^{r-2} h\, u = L_f^{r-1} h$$

$$h^{(r)} = L_f^r h + \underbrace{L_g L_f^{r-1} h}_{\neq 0} u$$

לכן r הוא הסדר המינימלי של הנגזרת $h^{(k)}$

שבה מופיע הבקר עם המקדם שהוא

לא אפס בזהות ולא מתאפס

אם $L_g L_f^{r-1} h(x) \not\equiv 0$ אבל מתאפס לפעמים

⇐ אין סדר יחסי בכלל!

כי אי אפשר להמשיך את התהליך

דוגמא: $r=4$ לפלט $y = q_1$

(רובוט)

דוגמא

Newton חוק

$$\ddot{x} = F(x)\,u \Rightarrow r = 2$$

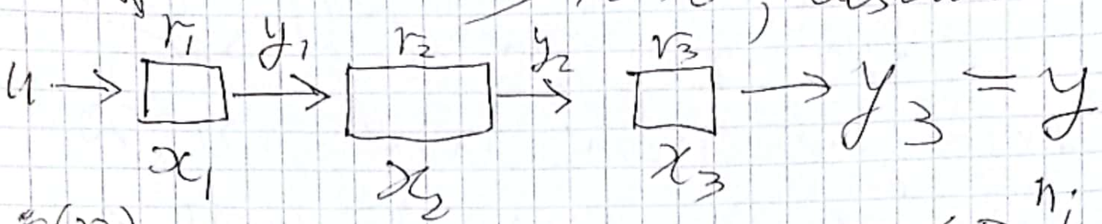
$F \neq 0$

דוגמא

$$y = x, \quad \ddot{x} = F, \quad \ddot{F} + \alpha_1 \dot{F} + \alpha_2 F = u, \quad r = 4$$

rel. degree

פרפר, cascade



$$y^{(r_3)} = y_3^{(r_3)} = f_3(x_3) + g_3(x_3)\,y_2$$

$x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$

יכול לכלול זמן

$$y_2^{(r_2)} = f_2(x_2) + g_2(x_2)\,y_1$$

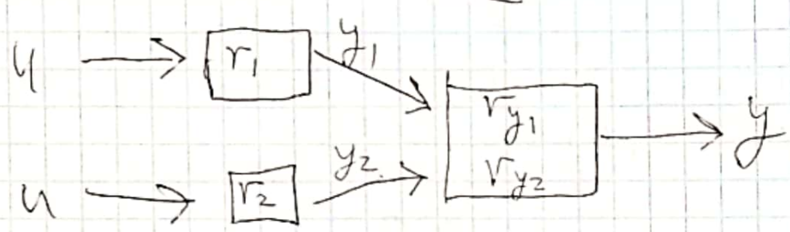
$$y_1^{(r_1)} = f_1(x_1) + g_1(x_1)\,u$$

$g_1, g_2, g_3 \neq 0$

לא מתאפסים

$$\Rightarrow y^{(r_1+r_2+r_3)} = \dots + g_1(x_1)\,g_2(x_2)\,g_3(x_3)\,u$$

$$\boxed{r = r_1 + r_2 + r_3}$$



$$r = \min(r_1 + r_{y_1},\; r_2 + r_{y_2})$$ נראה

יכול לקרות גם פה ביטול ...

בדרך כלל חישוב rel. degree יותר קל

לחפש הדרך הקצרה ביותר בגרף

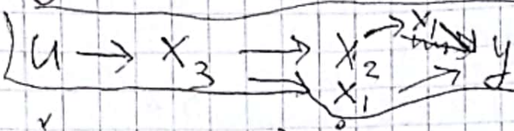
מהפלט לקלט, אחר כך בודקים

שהמקדם לא אפסי ולא מתאפס

דוגמא ממשוואות הדרגה (1) מ״ע
ראינו שהסדר היחסי של g_1 הוא 4.

דוגמא

$$y = x_1^3, \quad \dot{x}_1 = x_2^3 - x_3, \quad \dot{x}_2 = x_2 + x_3^2, \quad \dot{x}_3 = u$$

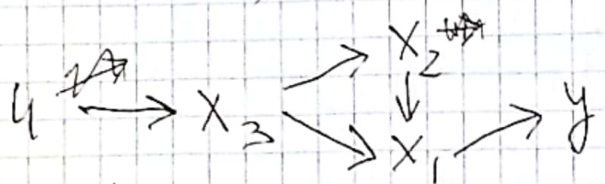

הגרף:

מקבלים

$$\dot{y} = 3x_1^2 \dot{x}_1 = 3x_1^2 (x_2^3 - x_3)$$

$$\ddot{y} = \text{"} \quad \boxed{-3x_1^2}\, u, \quad L_g L_f y = -3x_1^2$$

עוד הפעם, $u \rightarrow$ " צריכה (מופיע בנגזרת)



⟸ המעבר הקצר,

אין סדר יחסי בנק' $x=0$!!

נבחר $y = x_1$ במקום x_1^3
הגרף לא משתנה!
נקבל

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2^3 - x_3$$

$$\ddot{y} = \underbrace{3x_2\dot{x}_2}_{\text{אין פה } u} - u, \quad L_g L_f y = -1, \quad \boxed{r=2}\,!$$

דוגמא

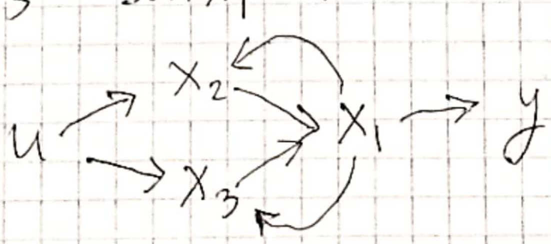
$$y = x_1$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + u \\ \dot{x}_3 = \sin x_1 + u \end{cases}$$

$$\dot{y} = x_2 - x_3$$

$$\ddot{y} = x_1^2 + u - \sin x_1 - u = x_1^2 - \sin x_1$$

u כבר לא מופיע!



הגרף הוא
המועמד: $r=2$
אין rel. degree

משפט 6 (Isidori ~1983)

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x)\end{cases}$$

מקרה אוטונומי

או $x = \begin{pmatrix}\bar{x} \\ t\end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix}\bar{f} \\ 1\end{pmatrix}$

$g = \begin{pmatrix}\bar{g} \\ 0\end{pmatrix}, \dot{t} = 1, t = x_{n+1}$

$x \in \mathbb{R}^n$ או $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

אם $r =$ rel. degree ב(נק') x_0 אזי

1. $r \le n$

2. בסביבת נק' x_0 קיימים קואורדינטות לוקליות

$$\begin{matrix}\mu_1, & \mu_2, & \dots, & \mu_r, & \xi_1, \dots, \xi_{n-r} \\ \| & \| & & \| & \\ y & \dot{y} & \dots & y^{(r-1)} & \end{matrix}$$

שבהן המערכת מקבלת את הצורה

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}_1 &= \mu_2 \\
&\dots \\
\dot{\mu}_{r-1} &= \mu_r \\
\dot{\mu}_r &= \alpha(\mu, \xi, t) + \beta(\mu, \xi, t) u
\end{aligned}$$

$(\mu_1^{(r)} = \alpha + \beta u)$ $\beta \neq 0$, במקרה לא אוטונומי

(לא מתאפס בסביבה)

$$\dot{\xi} = \Psi(\mu, \xi, t) \longrightarrow \text{אין בקרה!!}$$

$$\dot{t} = 1$$

הוכחה:

ברור ש $\mu_1 = y = h$

$\mu_2 = L_f h, \dots, \mu_r = L_f^{r} h$