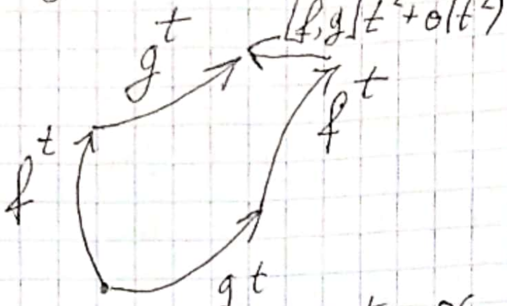
תזכורת:

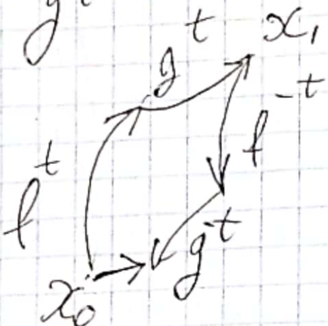
$[f,g] = \nabla g \cdot f - \nabla f g$ סוגרי ~~ל~~ לי/ הגדרה:

$L_{[f,g]} = L_f L_g - L_g L_f$



$$\boxed{g^t f^t x_0 - f^t g^t x_0 = [f,g]_{x_0} t^2 + o(t^2)}$$

$t_2 = k t_1 \Rightarrow g^{t_2} f^{t_1} x_0 - f^{t_1} g^{t_2} x_0 = (kg)^{t_1} f^{t_1} x_0 - f^{t_1} (kg)^{t_1} x_0 = [f,g]|_{x_0} t_1 t_2 + o(t_1 t_2)$



פרסו!

$x_0 = f^{-t} g^{-t} x_1$ הוכ׳ית לנו

$g^{-t} f^{-t} x_1 - f^{-t} g^{-t} x_1 = [-f,-g] t^2 x_1$

מ-הגדרה =

$f^{-t} x = (-f)^t x$ הפיכת זמן

$$\boxed{g^{-t} f^{-t} g^t f^t x_0 - x_0 = [f,g]|_{x_0} t^2 + o(t^2)}$$

עקומות f,g תלויות, בנגזרת $o(t^2)$ 3

⇐ אינ׳יצ׳ו, ב x בכל קומפקט.)

<u>הגדרה!</u>

$\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), \dots f_m(x)\}$ התפלגות

נקראת רגולרית אם $\text{rank}[f_1 \dots f_m] = m$ const

<u>הגדרה</u> involutive

$f,g \in \Delta \Rightarrow [f,g] \in \Delta$

הוכחנו: מספיק לבדוק בסיס הבסיס

$\forall i,j \quad [f_i, f_j] \in \Delta \Rightarrow$ involutivity

צריך לבדוק $\frac{n(n-1)}{2}$ זוגות

$\Delta = \mathrm{span}\{f_1, f_2\}, = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}\sin x_2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\cos x_2\\0\end{pmatrix}\right\}$ דוגמא 39 40

$\left(x_2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ $\cos x_2 \neq 0$ ולכן regular

$$[f_1, f_2] = \begin{pmatrix} & & \\ 0, & -\sin x_2, & 0 \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin x_2\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & \cos x_2 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\cos x_2\\0\end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix}\cos^2 x_2\\0\\0\end{pmatrix}$$

דוגמא בס'
38 דף

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\sin x_2 & 0 & \cos^2 x_2\\0 & \cos x_2 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix} = 3$$

not involutive $\Leftarrow$ $\cos x_2 \neq 0$ ולכן

~~[illegible]~~ משפט

$f(x) \in \Delta(x) = \mathrm{span}\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$

$\mathrm{rank}[f_1 \dots f_m] = m$, $f, f_i \in C^k$ (non singular)

$\exists!\, \alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots \alpha_m(x))$: $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) f_i$ $\Leftarrow$

$\alpha(x) \in C^k$

הגדרה

$\mathrm{rank}\,\Delta = m$, $\Delta = \mathrm{span}\{f_1 \dots f_m\}$ נניח

$m \leq n$, $x \in \mathbb{R}^n$

completely integrable אם קיים $\Delta(x)$

$z_1(x), \dots, z_{n-m}(x)$ פונקציות

$\mathrm{rank}\{\nabla z_1, \dots, \nabla z_{n-m}\} = n-m$

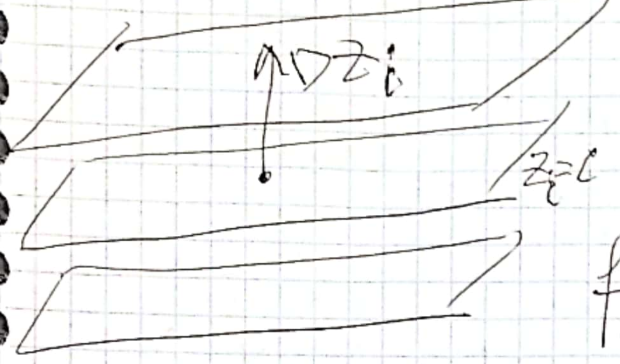
$\boxed{f \in \Delta \iff \forall i \;\; L_f z_i = 0}$

~~(C^1 מספיק)~~

$f_1,\dots,f_m \in C^\infty$ **Frobenius משפט**   ~~40~~ 41

$\operatorname{rank}[f_1 \dots f_m] = m < n$, $x \in \mathbb{R}^n$

involutive $\Leftrightarrow$ completely integrable $\Delta = \operatorname{span}\{f_1 \dots f_m\}$



completely integrable Δ

$f \in \Delta \Leftrightarrow f \perp \operatorname{span}\{\nabla z_1 \dots \nabla z_{n-m}\}$

$$\begin{cases} L_{f_1} z = f_{11}(x) z'_{x_1} + \dots + f_{1n}(x) z'_{x_n} = 0 \\ \dots \\ L_{f_m} z = f_{m1}(x) z'_{x_1} + \dots + f_{mn}(x) z'_{x_n} = 0 \end{cases}$$

נוסת אתר!

PDE משוואות m ב-$\mathbb{R}^n$

$z_1(x),\dots,z_{n-m}(x)$ פתרונות ~~אי תלויים~~ $n-m$ יש

$\Leftrightarrow$ אם ורק אם involutive Δ

$\left([f_i,f_j] \in \Delta \right.$, $f_1,\dots,f_m \in C^1$-ש $\left. \text{מספיק}\right)$

הוכחה בכיוון אחד:

$\exists\, z_1,\dots,z_{n-m}$, $\Delta(x) = \{ v \in T_x\mathbb{R}^n \mid L_v z_i = 0,\ i=1,\dots,n-m \}$

$f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$ $\Delta(x)$ involutive צ"ל

הוכחה:

$L_f z_k = 0$, $L_g z_k = 0$

$\Rightarrow L_f L_g z_k = L_f 0 = 0 \Rightarrow L_{[f,g]} z_k = L_f L_g z_k - L_g L_f z_k = 0$

מש"ל

תרגיל (49)

$$\begin{cases} 4x_3\dfrac{\partial z}{\partial x_1}-\dfrac{\partial z}{\partial x_2}=L_{f_1}z=0 \\ -x_1\dfrac{\partial z}{\partial x_1}+(x_3^2-3x_2)\dfrac{\partial z}{\partial x_2}+2x_3\dfrac{\partial z}{\partial x_3}=L_{f_2}z=0 \end{cases}$$

<u>שאלה:</u> האם קיים פתרון $Z(x_1,x_2,x_3)$?

$f_1=\begin{pmatrix}4x_3\\-1\\0\end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix}-x_1\\x_3^2-3x_2\\2x_3\end{pmatrix}$, rank $=2$ אם $x_3\neq 0$

או $x_3=0,\ x_1\neq 0$

$$[f_1,f_2]=\underbrace{\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-3&2x_3\\0&0&2\end{pmatrix}}_{\nabla f_2}\underbrace{\begin{pmatrix}4x_3\\-1\\0\end{pmatrix}}_{f_1}-\begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x_1\\x_3^2-3x_2\\2x_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4x_3-8x_3\\3-0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12x_3\\3\\0\end{pmatrix}\sim f_1$$

involutivity $\Leftarrow$

פתרון קיים

<u>נוסח אחר</u>

למערכת m משוואות וקטוריות

$\dot{x}=f_1(x),\ \dots,\ \dot{x}=f_m(x)$, $\mathrm{rank}[f_1\dots f_m]=m$

ישנם $n-m$ אינטגרלים ראשונים משותפים

$z_1,\dots,z_{n-m}$ $\quad (L_{f_i}z_j\equiv 0,\ j=1,\dots,n-m,\ i=1,\dots,m)$

$\mathrm{rank}\{\nabla z_1\dots\nabla z_{n-m}\}=n-m$

$\mathrm{span}\{f_1\dots f_m\}$ involutive $\Leftrightarrow$

הוכחת משפט Frobenius
(בגישה —)

$\Delta = \mathrm{Span}\{f_1 \dots f_m\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $m < n$

(regularity) $\mathrm{rank}\,\Delta = m$

$\boxed{\text{involutivity}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{complete integrability}}$

$f, g \in \Delta \Rightarrow [f,g] \in \Delta$

$\exists\, z_1, \dots, z_{n-m}$, $\mathrm{rank}\,[\nabla z_1 \dots \nabla z_{n-m}, f_1 \dots f_m] = n$

$f \in \Delta \Longleftrightarrow L_f z_i = 0$, $i = 1, \dots, n-m$

1. "$\Rightarrow$" ראינו. הוכח לעיל.

2. "$\Leftarrow$" involutivity $\Rightarrow$ לבנות $z_1, \dots, z_{n-m}$

ניקח נקודה x_* כלשהי ונבחר $e_1, \dots, e_{n-m}$

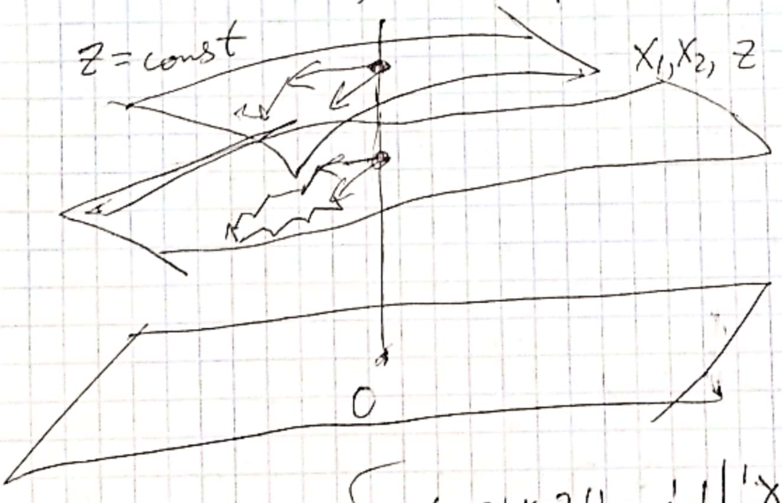
ראשית

$e_1, \dots, e_{n-m} \perp \Delta(x_0)$

נגדיר קואורדינטות לוקליות

$$(x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, \dots, z_{n-m}) \longmapsto f_m^{x_m} \cdots f_1^{x_1} e_{n-m}^{z_{n-m}} \cdots e_2^{z_2} e_1^{z_1} x_*$$

ב-$\mathbb{R}^3$: x_1, x_2, z



רעיון: יוצאים מכל נקודה בכיוונים $f_1 \dots f_m$

לא משנה מה הוא הסדר של התנועה: נשארים באותו משטח. מקבעים את המשטח כקבוצת רמה,

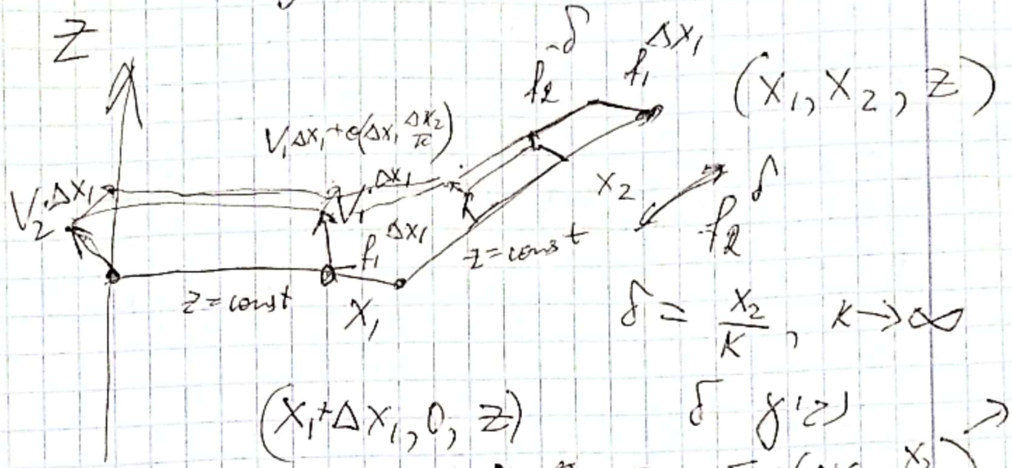
z

$\forall f \in \Delta \quad L_f z_i = 0$ נשאר להוכיח

$\forall j: \quad L_{f_j} z_i = 0$ שקול

כי 0 גם מתקיים לפי ההגדרה

$$0 + f_j t = (\overbrace{0,\dots,0}^{m}, \underset{j}{t}, \dots, 0, \overbrace{0,\dots,0}^{n-m})$$



$V_2 \in \Delta$

$\delta = \frac{x_2}{k}, \quad k \to \infty$

$\delta \quad g'(z)$

$$L_{f_1} z_{(x_1,x_2)} = L_v z(0) = 0$$

$$+ v^{\Delta x_1} = \sum_k \theta\left(\Delta x_1, \frac{x_2}{k}\right) + \sum_k [f_1, f_2] \cdot \Delta x_1 \cdot \frac{x_2}{k} \to 0$$

$$f_2^{-\frac{x_2}{k}} [f_2 f_1]^{\Delta x_1 \frac{x_2}{k}} (\cdot) - [\;] f_2^{\frac{x_2}{k}} = \underbrace{[f_2 [f_2 f_1]]^{x_1 \frac{x_2^2}{k^2} + \theta\left(x_1 \frac{x_2^2}{k^2}\right)}}_{\text{זניח}} \in \Delta$$

$=$

אנחנו לא חוזרים לאותה נקודה בגובה z
אבל ההגדרה היא באותו המשטח $z = const$

Input-State Linearization (45)

(State-feedback Linearization, מז',
Feedback Linearization)

Alberto Isidori, 1983

$\dot{x} = f(x) + g(x)u$ ניסוח בעיה מקורי:

$u \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ f, g \in C^\infty$ SISO

ניסוח כללי: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t) + g(\bar{x}, t)u \\ \dot{t} = 1 \end{cases}$$

$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

אוטונום

$\dot{x} = f(x) + g(x)u$ שום מקדמים

$f = \begin{pmatrix} \bar{f} \\ 1 \end{pmatrix},\ g = \begin{pmatrix} \bar{g} \\ 0 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ t \end{pmatrix},\ x_{n+1} = t$

מתי המערכת קוו-לינאריזבילית? (controllable)

הרעיון: אם אפשר להעביר אותה,

לצורה הקנונית של controllability

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_n = \cancel{\alpha(x,t) + \beta(x,t)}\ \alpha(x) + \beta(x)u = \tilde{u} = v \end{cases}$$

Brunowsky form

$\beta \neq 0$ (לא מתאפס)

בקרה חדשה

מקרה אוטונומי: $z = \Phi(x)$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

מקרה כללי: $z = \Phi(\bar{x}, t)$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n+1}$

t משתנה!

אם בנוסף $\mathrm{span}\{f, g\}$ involutive, $n \geq 2$,

יש לה controllability ⇒ אז

לכל מערכת היא ליניארי.

כל התכונות היא ש $[f,g]$, $[f,[f,g]]$ ... יעברו.

משפט לינאריזציה קלט-מצב לוקלית

input - state

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{rank}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\} = n & .1 \\ \operatorname{span}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\} \text{ involutive} & .2 \end{array}\right\} \iff \text{I-O}$$

linearization

תזכורת:

$$ad_f^k g = \underbrace{[f,[f,\dots,[f,g]\dots]]}_{k}$$

ad_f - adjoint operator

$x \in \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n$

למה 1 לכל $\sigma \in C^\infty$ $\quad \sigma = \sigma(x)$

בזהות $\forall x$ בזהות

$$L_g \sigma = L_g L_f \sigma = \dots = L_g L_f^k \sigma = 0$$

$$\iff$$

$$L_g \sigma = L_{ad_f g} \sigma = \dots = L_{ad_f^k g} \sigma = 0$$

היא מבוססת. בלמה 2

למה 2

$$L_{ad_f^k g} \sigma = (-1)^k L_g L_f^k \sigma + \sum_{i=1}^{k} c_{ik} L_f^i L_g L_f^{k-i} \sigma$$

$$c_{ik} = \pm 1$$

הוכחת למה 2: לפי האינדוקציה

$k=0$ $\quad L_g \sigma = (-1)^0 L_g \sigma$ $\qquad (-1)^0 \overset{def}{=} 1$

כל במשמע ...

$k=1$ $\quad L_{[f,g]} \sigma = L_f L_g \sigma - \underline{L_g L_f \sigma}$

$k+1$ $\quad L_{ad_f^{k+1} g} \sigma \overset{"}{=} L_f L_{ad_f^k g} \sigma - L_{ad_f^k g} L_f \sigma$ $\qquad$ מהו,

הוכחת למה 1

$$L_g\sigma \equiv 0,\dots, L_g L_f^{l}\sigma = 0 \Rightarrow L_g\sigma=0,\dots, L_{ad_f^{l} g}\sigma=0$$

הוכחה: לפי אינדוקציה $l=0$ הוא מיידי

$$l \to l+1 \qquad L_g\sigma=0,\dots, L_{ad_f^{l} g}\sigma=0$$

$$\underbrace{L_{ad_f^{l+1} g}\sigma}_{0} = (-1)^{l+1}\underbrace{L_g L_f^{l}\sigma}_{0} + \underbrace{\sum c_{ik} L_f^{i}\underbrace{L_g L_f^{l+1-i}\sigma}_{0}}_{0}$$

$\Leftarrow$ אותו דבר לפי אינדוקציה מושל.

הוכחת המשפט (⇐): החלפת משתנים

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ t \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \\ t \end{pmatrix}$$

I. נניח שיש לינאריזציה

$$\dot z_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x}(x)\left(f(x)+g(x)u\right) = z_2$$

$$\dot z_2 = \frac{\partial z_2}{\partial x}(x)\left(f(x)+g(x)u\right) = z_3$$

$$\dots$$

$$\dot z_n = \frac{\partial z_n}{\partial x}(f+gu) = \alpha(x)+\underbrace{\beta(x)}_{\neq 0}u = v$$

$$L_f z_1 + u L_g z_1 = z_2 \qquad L_g z_1 = 0,\ z_2 = L_f z_1$$

$$L_f z_2 + u L_g z_2 = z_3 \qquad L_g L_f z_1 = 0,\ z_3 = L_f^2 z_1$$

$$\dots$$

$$L_f z_n + u L_g z_n = \alpha+\beta u \qquad L_g L_f^{n-2} z_1 = 0,\ z_n = L_f^{n} z_1$$

$$\alpha = L_f^{n} z_1,\ \beta = L_g L_f^{n-1} z_1 \neq 0$$

הוכחה (48)

$$z_2 = L_f z_1,\ z_3 = L_f^2 z_1, \dots, z_n = L_f^{n-1} z_1$$

$$L_g z_1 = L_g L_f z_1 = \dots = L_g L_f^{n-2} z_1 = 0$$

$$L_g L_f^{n-1} z_1 = \beta \neq 0 \ ,\ L_f^n z_1 = \alpha$$

צ"ל 1. $\mathrm{rank}[g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g] = n$

נניח שהם תלויים לינארית (דרך השלילה)

$$\lambda_0 g + \lambda_1 ad_f g + \dots + \lambda_{n-1} ad_f^{n-1} g = 0$$

(בשלילה!)

נכפיל ב- ∇z_1 משמאל

$$\underbrace{\lambda_0 L_g z_1 + \lambda_1 L_{ad_f g} z_1 + \dots + \lambda_{n-2} L_{ad_f^{n-2} g} z_1}_{\overset{\text{מטענה 1}}{=0}} + \lambda_{n-1} \underbrace{L_{ad_f^{n-1} g} z_1}_{=(-1)^{n-1} L_g L_f^{n-1} z_1 \neq 0} = 0$$

$$\lambda_{n-1} = 0 \Leftarrow$$

$$\lambda_0 g + \lambda_1 ad_f g + \dots + \lambda_{n-2} ad_f^{n-2} g = 0$$

נכפיל ב- $\nabla z_2 = \nabla L_f z_1$

$$0 = \underbrace{\lambda_0 L_g L_f z_1 + \lambda_1 L_{ad_f g} L_f z_1 + \dots + \lambda_{n-3} L_{ad_f^{n-3} g} L_f z_1}_{} + \lambda_{n-2} \underbrace{L_{ad_f^{n-2} g} L_f z_1}_{\neq 0} = 0$$

$$L_{ad_f^k g} L_f^s z_1 = (-1)^k \underbrace{L_g L_f^{k+s} z_1}_{\substack{=0 \\ k+s \le n-2}\ ,\ \substack{\neq 0 \\ k+s = n-1}} + \sum_{i=1}^{k} L_f^i \underbrace{L_g L_f^{k-i+s} z_1}_{=0,\ k+s \le n-1}$$

נכפיל ב- ∇z_3, ... וכו' סתירה

$\Delta = \text{span}[g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g]$ כיוון 2:

involutive

נשתמש במשפט Frobenius

$$L_g z_1, L_g L_f z_1, \dots, L_g L_f^{n-2} z_1 = 0 \ , \ L_g L_f^{n-1} z_1 \neq 0$$

בנייה $\Downarrow$

$$\Rightarrow L_g z_1 = L_{ad_f g} z_1 = \dots = L_{ad_f^{n-2} g} z_1 = 0 \qquad L_{ad_f^{n-1} g} z_1 \neq 0$$

(למה 1) לא מתאפס (למה 2) $(\Rightarrow \nabla z_1 \neq 0)$

<u>מקרה אוטונומי:</u>

$\nabla z_1 \perp \Delta$, $\nabla z_1 \neq 0$ $\Rightarrow$ n וקטורים בלתי תלויים $\Rightarrow$ משפט Frobenius Δ - involutive

<u>מקרה לא אוטונומי:</u> עוד קואורדינטה,

$$L_g t = (0, \dots, 0, 1)\begin{pmatrix} \bar{g} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \ , \ L_f t = (\dots 1)\begin{pmatrix} \bar{f} \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$L_g t = L_g L_f t = \dots = L_g L_f^{n-1} t = 0 \qquad \text{לכן}$$

$$0 \neq \nabla t \perp [g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g] \Rightarrow \nabla t, \nabla z_1 \in \Delta^{\perp}$$

$$L_{ad_f^{n-1} g} t = 0 \ , \ L_{ad_f^{n-1} g} z_1 \neq 0 \Rightarrow \nabla t, \nabla z_1 \ \text{בלתי תלויים}$$

$$\Leftarrow$$

$[\nabla t, \nabla z_1, g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g]$ בלתי תלויים

משפט Frobenius: Δ involutive

<u>כיוון אחד הוכח</u>

דוגמא

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = Ax, \quad g(x) = b \quad , \quad A, b = const$$

תנאי לליניאריזציה מצב-משוב

1. $\operatorname{rank}[g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g] = n$

2. $\operatorname{span}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$ involutive

פתרון:

$$g = b, \quad ad_f g = [f, g] = \nabla g f - \nabla f g = 0 \cdot Ax - Ab = -Ab$$

$$ad_f^2 g = [f[f,g]] = [Ax, -Ab] = 0 + A \cdot Ab = A^2 b$$

$$ad_f^{n-1} g = [Ax, (-1)^{n-2} A^{n-2} b] = (-1)^{n-1} A^{n-1} b$$

$$\operatorname{rank}[g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g] = \operatorname{rank}[b, Ab, \dots, A^{n-1} b]$$

$\operatorname{span}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\} = \{b, Ab, \dots, A^{n-2} b\}$ involutive $\Rightarrow$ כי וקטורים קבועים!

תנאי קיים של Kalman