18/03-2021 .הרצאה 3

מקרה . לא ליניארי

27a

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} , \quad f(0,0) = 0, \; h(0) = 0$$

$$A = f'_x(0,0), \quad B = f'_u(0,0)$$

$$C = h'_x(0)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bk\hat{x} + o(\|x\| + \|u\|), \quad u = K\hat{x} \\ y = Cx + o(\|x\|) \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BK\hat{x} + L(C\hat{x} - y) \end{cases}$$]Observer

$$\begin{cases} \dot{x} = (A+BK)x + BK\varepsilon + o(\|x\| + \|K(x+\varepsilon)\|) \\ \dot{\varepsilon} = 0 \cdot X + (A+LC)\varepsilon + o(\|x\|) \end{cases}$$

יציבות בקירוב הראשון

בקרה לא ליניארית

Slotine, Li p. 207, ch. 6

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = f(x) + g_1(x)u_1 + \dots + g_m(x)u_m$$

לפי המסורת: מערכת אפינית

המקרה העיקרי שלנו: $m = 1$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $f, g_1, \dots, g_m \in C^\infty$

$f, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (בעצם ל-$T\mathbb{R}^n$ מרחב משיק, נראה בהמשך)

<u>היעד:</u> לקבל צורות נורמליות

נגזרות Lie

$a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad (a : \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n)$

$a = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_n(x) \end{pmatrix}$, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה

$$[L_a\varphi](x) = L_a\varphi(x) = \nabla\varphi(x)\cdot a(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\cdot a(x)$$

בעצם רושמים

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x)\right)}_{\nabla\varphi(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)} \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_n(x) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\cdot a_i(x)$$

<u>שורה</u>

זאת אומרת: $L_a\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

<u>דוגמא:</u> $\dot{x} = f(x)$, $V(x)$ - פונקצית ליאפונוב

אז $\dot{V}(x) = L_f V(x)$

בעצם $L_a\varphi(x)$ זה נגזרת של $\varphi(x)$ לאורך פתרון המשוואה $\dot{x} = a(x)$ העובר דרך x_0

29

נניח $t \approx 0$, $x(t) = x_0 + a(x_0)t + o(t)$

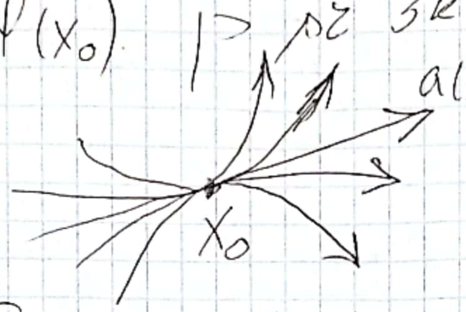
פתרון לבעיית קושי
$$\begin{cases} \dot{x} = a(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

אז

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(x(t)) = \nabla\varphi(x_0)\cdot\dot{x}(0) =$$
$$= \nabla\varphi(x_0)\cdot a(x_0) \stackrel{\Delta}{=} L_a\varphi(x_0)$$

גדיר אחר $\hat{x}(t) = x_0 + a(x_0)t + o(t)$ (לא פתרון של $\dot{x} = a(x)$)

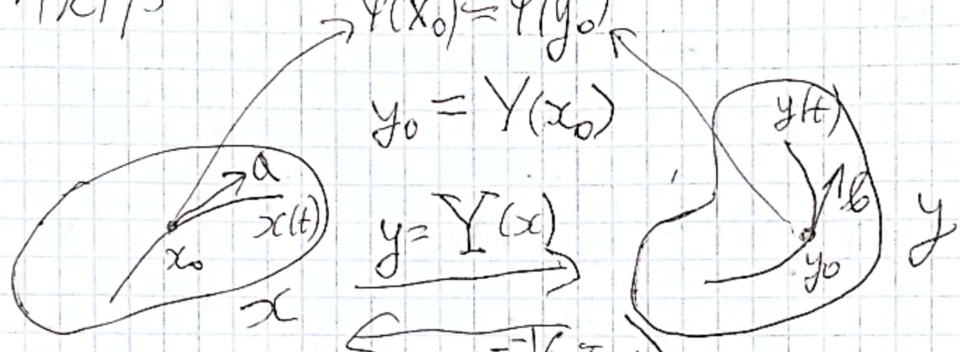
כי קו אחר אז גם כן
$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(x(t)) = L_a\varphi(x_0)$$



יש אינסוף
קווים כאלה

טענה:

$L_a\varphi$ אינו תלוי בהחלפת קואורדינטות



$\varphi(x_0) = \psi(y_0)$

$y_0 = Y(x_0)$

$y = Y(x)$

$x = Y^{-1}(Y(x))$

diffeomorphism
דיפאומורפיזם

הנקודות x ו $Y(x)$ מתאמות לאות | הנקודה
לכן זה נקרא החלפת הקואורדינטות

לכן | φ ~~$\varphi(x)$~~ אמורה לשמור על הערך
(בקואורדינטות חדשות) $\varphi \mapsto \psi$

$$\varphi(x) = \psi(y) \qquad \psi(y) = \varphi(Y^{-1}(y))$$

לכן
$$L_a\varphi(x_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi(x(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\psi(y(t)) = L_b\psi(y_0)$$

30 אז מהו b?

$$~~b(x_0)~~ = \mathring{y}(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Y(x(t)) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x_0)\cdot\frac{d}{dt}x(t) =$$

$$~~b(x_0) =~~ \quad b(y_0) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x_0)\, a(x_0)$$

$$\boxed{b(y) = \frac{\partial}{\partial x} Y\left(Y^{-1}(y)\right) a\left(Y^{-1}(y)\right)} \quad x_0 = Y^{-1}(y_0)$$

מסקנות:

1.
$$L_a \varphi(x_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(x(t))$$

לכל

$$x(t) = x_0 + a(x_0)t + o(t)$$

<u>הגדרה</u>

כל קווים כאלה ביחד נקראים וקטור משיק ב-x_0 ב-$T_{x_0}\mathbb{R}^n$

מוגדרים ב-O שקול (הגדרה)

אותו וקטור ← $\boxed{x(t)-\tilde{x}(t)=o(t),\ x(0)=\tilde{x}(0)=x_0,\ x,\tilde{x}\in C^1}$

2. החלפת הקואורדינטות

$y = Y(x)$

$x = X(y) = Y^{-1}(y)$

שומרת על נגזרות Lie

3. וקטור משיק תחת החלפת הקואורדינטות משתנה בצורה

$$b(y) = Y'\left(Y^{-1}(y)\right) a\left(Y^{-1}(y)\right)$$

~~אבל~~ מד"ר:

$$\dot{x} = f(x),\quad y = Y(x)$$

$$x = X(y) = Y^{-1}(y)$$

$$\frac{d}{dt} X(y) = f(X(y))$$

$$X'(y)\cdot\dot{y} = f(X(y)) \qquad X'(y) = \left[Y'(X(y))\right]^{-1} =$$

משפט על פונקציה הפוכה

$$\boxed{\mathring{y} = Y'\left(Y^{-1}(y)\right) f\left(X^{-1}(y)\right)}$$

אנחנו רואים שבעצם וקטורי $a(x)$

ומשוואה דיפרנציאלית $\dot{x} = a(x)$

משתנים באותה הצורה תחת

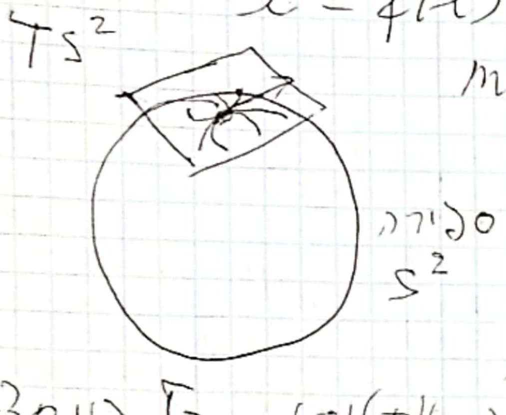
החלפת הקואורדינטות

לכן השדה ~~הווקטור~~ הווקטורי הוא גם הגזע רימ'ן

של מע"ד. כה פשוט אנו צריך

אותו דבר $\dot{x} = f(x) \in T_x R^n$

גם ביריעה manifold



כל עוד לא מחליפים

את הקואורדינטות

לוקליות ביריעה, וגלובליות

ב-R^n אפשר להתייחס לשדה וקטורי כל פונקציה וקטורית

דוגמא

$$x \in \mathbb{R}^2, \quad \dot{x} = f(x), \quad \sigma = \sigma(x) \in \mathbb{R}$$

$$\sigma = tg\, x + x \cos y, \quad f = \begin{pmatrix} x^2 y \\ \ln x \end{pmatrix}, \quad x > 0$$

$$L_f \sigma_{(x,y)} = \overbrace{\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos y, \; -x \sin y \right)}^{\nabla f} \begin{pmatrix} x^2 y \\ \ln x \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos y \right) x^2 y - x \sin y \cdot \ln x$$

תכונות

1. טלכנו!

אופרטורים של גזירה $L_f = L_g \Leftrightarrow f = g$

הוכחה!

$$L_f x_i = \nabla x_i f = (0 \underset{i}{1} 0) \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ f_n \end{pmatrix} = f_i$$

2. $\sigma, \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$L_f(\sigma \cdot \varphi) = \nabla(\sigma\varphi) \cdot f = (\nabla\sigma)\varphi \cdot f + \sigma(\nabla\varphi f) = (L_f \sigma) \cdot \varphi + \sigma \cdot L_f \varphi$$

$$L_{(f+g)} \varphi = L_f \varphi + L_g \varphi, \quad L_f(\varphi + \sigma) = L_f \varphi + L_f \sigma$$

3. לינאריות

$$L_{(\alpha f+\beta g)}\varphi=\alpha L_f\varphi+\beta L_g\varphi ,$$

α, β
פונקציות

$$L_f(\alpha\varphi+\beta\sigma)=\alpha L_f\varphi+\beta L_f\varphi$$

α, β
קבועים

31a

$$\boxed{\begin{matrix}\left(L_f(L_g\varphi)+L_g(L_f\varphi)\right)\\ \exists\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\end{matrix}}$$

[illegible]

4. $L_f L_g \neq L_g L_f$ ~~3~~ (32)

נחשב $L_f L_g \varphi(x)$ (-סקור)

$$L_f L_g \varphi = L_f(\nabla\varphi\cdot g) = L_f\left(\left(\varphi'_{x_1},\dots,\varphi'_{x_n}\right)\begin{pmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_n\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(L_f\varphi'_{x_1},\dots,L_f\varphi'_{x_n}\right)\begin{pmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_n\end{pmatrix} + \nabla\varphi\begin{pmatrix}L_f g_1\\ \vdots\\ L_f g_n\end{pmatrix} =$$

$$L_f\varphi = \nabla\varphi\cdot f = f^T(\nabla\varphi)^T$$

כמובן

$$= f^T\underbrace{\left[(\nabla\varphi'_{x_1})^T,\dots,(\nabla\varphi'_{x_n})^T\right]}_{[illegible]}\begin{pmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_n\end{pmatrix} + \overset{(1\times n)}{\nabla\varphi}\,\underbrace{\nabla g}_{\substack{\text{יעקוביאן}\\ n\times n}}\,\overset{(n\times 1)}{f}$$

$$= f^T\begin{pmatrix}\varphi''_{x_1x_1} & \dots & \varphi''_{x_nx_1}\\ \varphi''_{x_1x_2} & & \varphi''_{x_nx_2}\\ \vdots & & \vdots\\ \varphi''_{x_nx_n} & & \varphi''_{x_nx_n}\end{pmatrix} g + \underbrace{\nabla\varphi\underbrace{\begin{pmatrix}\nabla g_1 f\\ \vdots\\ \nabla g_n f\end{pmatrix}}_{L_f g \to \nabla g f}}_{\nabla\varphi\cdot(\nabla g f)}$$

Hessian H, $H^T = H$

$$L_f L_g\varphi = f^T H(\varphi)\, g + L_{\nabla g f}\varphi$$

$$\shortparallel$$

$$L_g L_f\varphi = \underbrace{g^T H(\varphi)\, f}_{\text{סקלר סימטרי}} + L_{\nabla f g}\varphi$$

דגלען

$$L_f L_g \varphi - L_g L_f \varphi = L_{\nabla g f - \nabla f g}\varphi$$

הגדרה, סוגריים של Lie

$$[f,g] = \nabla g f - \nabla f g = ad_f g$$

זה שדה וקטורי חדש adjoint operator (מצורף)

טענה [f,g] לא תלוי בקואורדינטות

הוכחה: $L_f\varphi, L_g\varphi, L_fL_g\varphi, L_gL_f\varphi$

$$L_fL_g\varphi - L_gL_f\varphi$$

לא תלויים בקואורדינטות

$\Leftarrow$ העתקה $\varphi \rightarrow (L_fL_g - L_gL_f)\varphi$

לא תלויה בקואורדינטות והי גזירה לאורך $[f,g]$

לפי טענה 1 זה מגדיר $[f,g]$ כשדה וקטורי באופן יחיד.

דוגמא

$$f = \begin{pmatrix}x^2+y^2\\ xy^4+1\end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix}x^3-3xy+1\\ y^3\end{pmatrix}$$

$$[f,g] = \underbrace{\begin{pmatrix}3x^2-3y, & -3x\\ 0, & 3y^2\end{pmatrix}}_{\nabla g}\underset{f}{\begin{pmatrix}x^2+y^2\\ xy^4+1\end{pmatrix}} - \underbrace{\begin{pmatrix}2x, & 2y\\ y^4, & 4xy^3\end{pmatrix}}_{\nabla f}\underbrace{\begin{pmatrix}x^3-3xy+1\\ y^3\end{pmatrix}}_{g}$$

34 תכונות של $[f,g]$

1. $[f,g] = -[g,f]$

2. $[f_1+f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g]$

3. $[\alpha f, g] = \alpha[f,g] - (L_g\alpha) f \ , \ \alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

הוכחה:

$$[\alpha f, g] = \nabla g \cdot \alpha f - \nabla(\alpha f) g = \alpha(\nabla g f - \nabla f g) - (\nabla \alpha f) g$$

$$(\nabla\alpha f) g = \begin{pmatrix} \nabla\alpha f_1 \\ \vdots \\ \nabla\alpha f_n \end{pmatrix}_{\text{שורה}} \underset{\text{עמודה}}{g} = \begin{pmatrix} \underbrace{(\nabla\alpha g)}_{L_g\alpha} f_1 \\ \vdots \\ (\nabla\alpha g) f_n \end{pmatrix} = (L_g\alpha) f$$

4. זהות Jacobi

$$ad_h[f,g] = [ad_h f, g] + [f, ad_h g]$$

נוסח אחר:

$$[h,[f,g]] + [f,[g,h]] + [g,[h,f]] = 0$$

5. $L_{[f,g]}\varphi = L_{ad_f g}\varphi = L_f L_g \varphi - L_g L_f \varphi$

כמה הוכחה.

הוכחת זהות Jacobi ㉟

$$L_{[h,[f,g]]} = L_h L_{[f,g]} - L_{[f,g]} L_h$$

$$= \cancel{L} L_h L_f L_g - L_h L_g L_f - (L_f L_g - L_g L_f) L_h =$$

$$= L_h L_f L_g - L_h L_g L_f - L_f L_g L_h + L_g L_f L_h$$

נראה ש- $L_{[h,[f,g]]} + L_{[f,[g,h]]} + L_{[g,[h,f]]} = 0$

$$\begin{tikzcd} h \arrow[r] & g \arrow[dl] \\ f \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

$$\underline{L_h L_f L_g} - \utilde{L_h L_g L_f} - \underline{\underline{L_f L_g L_h}} + \utilde{\utilde{L_g L_f L_h}}$$

$$+ \underline{\underline{L_g L_h L_f}} - \utilde{\utilde{L_g L_f L_h}} - \underline{L_h L_f L_g} + \underset{\cdots}{L_f L_h L_g}$$

$$+ \underline{\underline{L_f L_g L_h}} - \underset{\cdots}{L_f L_h L_g} - \underline{\underline{L_g L_h L_f}} + \utilde{L_h L_g L_f} = 0$$

מ.ש.ל.

הסבר גאומטרי לסוגריים Lie

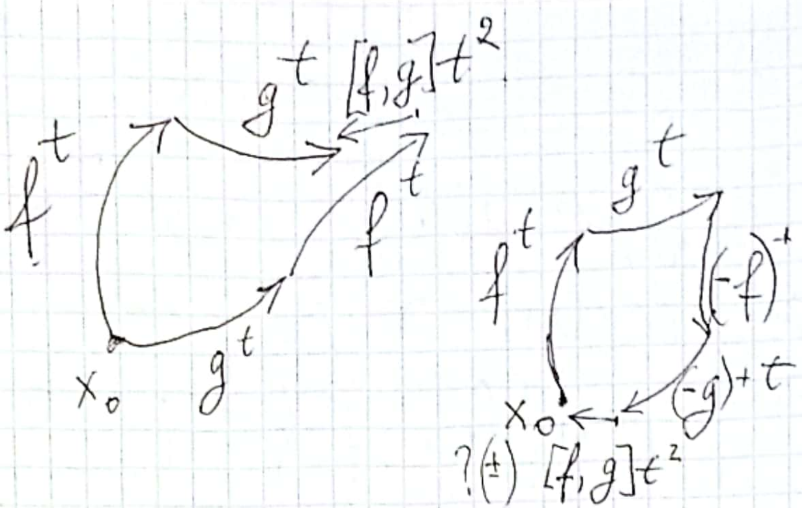
$\dot{x} = f(x)$, $f^t x_0 = F(t, x_0)$:זרימות לגבי

$\dot{x} = g(x)$, $g^t x_0 = G(t, x_0)$

פתרונות לבעיות Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} = g(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$g^t f^t x_0 - f^t g^t x_0 = [f,g] t^2 + o(t^2)$ למה 1



בסה

$$\left((g)^{+t}(f)^{+t} g^{-t} f^{-t} x_0 = [f,g]t^2 + o(t^2) \right)$$

$$(-f)^t = f^{-t}$$

$$\dot{x} = f(x), \quad \ddot{x} = f'_x(x)\dot{x} = f'_x(x) f(x)$$

מטריצה, עמודה,

Taylor:

$$F(t,x_0) = x_0 + f(x_0)t + \frac{1}{2} f'_x(x_0) f(x_0) t^2 + o(t^2)$$

$$g(F(t,x_0)) = g(x_0) + g'_x(x_0) f(x_0) t + o(t)$$

$$'' \; g(x_0+\Delta x) = g(x_0) + g'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad F(t,x_0) = x_0 + \Delta x$$

$$g^t f^t x_0 = G(t, F(t,x_0)) = F(t,x_0) + g(F(t,x_0))t + \frac{1}{2} g'_x(F(t,x_0)) g(F(t,x_0)) t^2 + o(t^2)$$

$$= \underline{x_0 + f(x_0)t} + \underline{\frac{1}{2} f'_x(x_0) f(x_0) t^2} + o(t^2)$$

$$+ \underline{g(x_0)t} + g'_x(x_0) f(x_0) t^2 + o(t^2)$$

$$\underline{+ \frac{1}{2} g'_x(x_0) g(x_0) t^2 + o(t^2)}$$

חלק סימטרי מצטמצם. מכאן:

$$g^t f^t x_0 - f^t g^t x_0 = \left(g'_x(x_0) f(x_0) - f'_x(x_0) g(x_0) \right) t^2 + o(t^2)$$

$$= \left[\nabla g f - \nabla f g \right] \Big|_{x=x_0} \cdot t^2 + o(t^2)$$

מ.ש.ל.

משפט Frobenius

(37)

שדות וקטוריים $f_1, f_2, ..., f_m$ מגדירים בכל נק' x תת-מרחב במרחב המשיק

$$\Delta(x) = \text{span}\{f_1, ..., f_m\} \subset T_x \mathbb{R}^n$$

(או יריעה)

מעטפת לינארית

$\Delta(x)$ נקראת התפלגות distribution

<u>הערה</u> התפלגות נקראת רגולרית לוקלית או בתחום) אם

$$\text{rank}\,[f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)] = \text{const}$$

אחרת סינגולרית (singular)

<u>דוגמא</u>

$$\text{rank}\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1+\sin x_1\end{pmatrix}\right] = 2$$

לכל (x_1, x_2, x_3) שבה $\sin x_1 \neq 0$

סינגולרי $\Leftarrow x_1 = k\pi$

<u>הערה</u> התפלגות Δ נקראת אינוולוטיבית (involutive) אם

$$\forall f,g:\quad f,g \in \Delta \Rightarrow [f,g] \in \Delta$$

<u>טענה</u> נניח $\Delta = \text{span}\{g_1, .., g_m\}$, $\text{rank}\,\Delta = m$

<u>אז</u> כל שדה $f \in \Delta$ (חלק) מקבלת צורה

$$f(x) = \alpha_1(x) g_1(x) + ... + \alpha_m(x) g_m(x)$$ ~~$(\alpha(x) = f(x) G^{-1}$~~

משפט פונקציה סמוטה

טענה

$\forall i,j \; [f_i, f_j] \in \Delta = \mathrm{Span}\{f_1 \cdots f_m\}$

$\Delta \Longleftrightarrow$ אינוולוטיבית

involutive

[illegible]

~~$\alpha(x) f, \beta(x) g$~~ $\beta, \alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \; f, g : \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n$

$$\boxed{[\alpha f, \beta g]} = \alpha[f, \beta g] - L_{\beta g}\alpha \cdot f =$$

$$= \alpha\left(-\beta [g, f] + L_f \beta g\right) - \beta L_g \alpha f =$$

$$= \alpha\beta[f, g] + (\alpha L_f \beta) g - (\beta L_g \alpha) f$$

$f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_m f_m, \; g = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_m f_m$ לכן אם

$[f, g] \in \mathrm{Span}\{[f_i, f_j], f_1, \dots, f_m\}$ אז

$i, j = 1, \dots, m$

מש"ל.

דוגמא

$$\Delta = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1+\sin x_1\end{pmatrix}\right\}, \quad \sin x_1 \neq 0$$

$$\Bigg[\underset{f_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{f_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\1+\sin x_1\end{pmatrix}}\Bigg] = \underset{\nabla f_2}{\begin{pmatrix} \\ \\ \cos x_1, 0, 0\end{pmatrix}} \underset{f_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} - \underset{\nabla f_1}{\boxed{0}} \underset{f_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\1+\sin x\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}0\\0\\\cos x_1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\sin x_1 & \cos x_1 \end{bmatrix} = 2$$

$\sin x_1 \neq 0$ כאשר

involutive $\Longleftarrow$