11/03-2021 הרצאה 2

מסיומים הוכמו (מא) Lyapunov

$$\dot{x} = f(t,x) = Ax + o(\|x\|) \quad (x_0 = 0)$$

$\mathrm{Spec}\,A \subset \mathbb{C}_-$ $\Rightarrow$ יציבות אס' לוקלית

יציבות אסימפטוטית בקירוב הראשון

הוכחה:

לפי למה קיים $P>0$ סימטרי:

$$A^TP+PA=-Q,\quad Q>0$$

סימטרית

נגדיר $V(x)=x^TPx$

$\theta(x)=o(1)\|x\|$

$$\dot V=\dot x^TPx+x^TP\dot x=$$

$$=\left(x^TA^T+\theta^T(x)\right)Px+x^TP\left(Ax+\theta(x)\right)$$

$$=x^T\left(A^TP+PA\right)x+\underbrace{x^TP\theta(x)+\theta^T(x)Px}_{\theta(\|x\|^2)}$$

$x=0\Rightarrow \dot V=0$

$x\neq 0$, $e=\frac{x}{\|x\|}$, $\|e\|=1$

$$\dot V=\|x\|^2\left[e^T(-Q)e+o(1)\right]<0$$

בסביבה

$$e^T(-Q)e\leq-\varepsilon<0$$

מקבלת max בספירה

$\cancel{|o(1)|}<\frac{\varepsilon}{2}$

קטן מ-$\frac{\varepsilon}{2}$ בסביבה קטנה מספיק סביב 0.

מש"ל

בקרה לינארית

המושג המרכזי הוא Controllability

יכולת להגיע מכל נק' במרחב המצב לכל נק' אחרת תוך זמן נתון

$$\dot x=f(t,x,u)\qquad (t_0,x_0)\xrightarrow{u(t)}(t_1,x_1)$$

מקרה לינארי

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^m$$

<u>משפט</u> (Kalman)

Controllability $\Leftrightarrow$ rank $[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$

$W = [B \; (AB) \dots (A^{n-1}B)]$ Controllability matrix

<u>הוכחה</u>

$x(0) = x_0, \; t_0 = 0$ נניח

$x(t) = x_h + x_p, \quad x_p = e^{At} c(t)$

$x_h = e^{At} x(0), \; x_p = e^{At} c(t)$ וריאציית פרמטרים

$$\cancel{Ae^{At}c} + e^{At}\dot{c} = \cancel{Ae^{At}c} + Bu$$

$$\dot{c} = e^{-At} B u(t), \qquad c = \int_0^t e^{-As} B u(s)\, ds + \cancel{c_0}$$

$$x_p = e^{At} \int_0^t e^{-As} B u(s)\, ds = \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s)\, ds$$

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s)\, ds \quad \text{פתרון כללי}$$

$$x_1 = e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} B u(s)\, ds$$

$$x_1' = x_1 - e^{At_1} x_0 \Rightarrow x_1 = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} B u(s)\, ds$$

האם אפשר להגיע לכל נק' מ-0 עם בקרה מתאימה? [illegible]

1. rank $W < n$ $\Leftarrow$ אין קונטרולביליות

נניח ש $\exists c \in \mathbb{R}^n$; $c^T W = 0, \; c^T \neq 0$

בירור לנק' של המשוואה $= 0$

$$c^T x(t) = \int_0^t c^T e^{A(t-s)} B u(s)\, ds = \int_0^t \underbrace{c^T\left(I + \frac{A}{1!}(t-s) + \dots\right) B}_{0} u(s)\, ds = 0$$

Hamilton-Cayley משפט

$P(A)=0 \Rightarrow A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n I = 0$

$\Rightarrow \underbrace{C^T x(0)=0 \Rightarrow C^T x(t)\equiv 0}$, $\Rightarrow C^T A^n B = 0,\ C^T A^{n+1} B = 0, \dots$

$\operatorname{Rank} W = n \Rightarrow$ controllability .2

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} B u(s)\, ds$$

$u(s)$ נבחר

$$\underset{m\times n}{u(s)} = B^T \underset{n\times n}{e^{A^T(t-s)}} \underset{n\times 1}{\xi} \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$x_1 = \Bigg[\underbrace{\int_0^{t_1} \underbrace{e^{A(t_1-s)} B}_{n\times m} \underbrace{B^T e^{A^T(t_1-s)}}_{m\times n} ds}\Bigg]\xi$$

נקרא Gramian G הוא

$G^T = G$ סימטרי

$\Leftrightarrow$ נניח $\xi^T G \xi$ מוגדרת חיובית

$$\xi^T G \xi = \int_0^{t_1} \underbrace{\xi^T e^{A(t_1-s)} B B^T e^{A^T(t_1-s)} \xi}_{\text{פונקציה חיובית}}\, ds = 0$$ נניח

$\Rightarrow \xi^T e^{A(t_1-s)} B \equiv 0 \quad \forall s \in [0,t_1]$

$\forall t_1 - s \in [0,t_1]$

$\xi^T e^{As} B \equiv 0 \quad \forall s \in [0,t_1]$

$s=0$ ב s לפי גזירה

$\cancel{\xi^T e^{As} B|_{s=0} = \xi^T B \neq 0 \quad \xi A}$

$\xi^T e^{As} B\big|_{s=0} = \xi B = 0$

$\frac{d}{dt} \xi^T e^{As} B\big|_{s=0} = \xi A B = 0$

...

מכאן $\xi^T W = 0 \Leftarrow$ משפט

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = +5x_2 + 2x_3 + u \\ \dot{x}_3 = -x_2 + x_3 \end{cases}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$1) + 3)$: $(x_1 + x_3)^{\cdot} = (x_1 + x_3) \Rightarrow$ אין controllability

כי $x_1 + x = 0$ שמר

$$W = [B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 23 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}, \quad \text{rank } W = 2 < 3$$

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 5x_2 + 2x_3 + u \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + x_3 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 23 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad \text{rank} = 3 \quad \text{Controllability}$$

Brunowsky system

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \cancel{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n} + u \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \iddots & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}, \quad \text{rank } W = n$$

של(?) זאת צורה סטנדרטית

[illegible]

$$\dot{x}_n = \alpha_0 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_n + u \qquad x_1^{(n)} - \alpha_{n-1} x_1^{(n-1)} - \dots - \alpha_0 x_1 = u$$

controllable

Controllability form — צורה קנונית

SISO single input - single output

MIMO multi-input multi-output ; להשוואה

$B = b \in \mathbb{R}^n, \quad m = 1$

Hamilton - Cayley משפט

~~$P(\lambda) = \det(I-\lambda A)(-1)^n$~~ ~~$= \det(A-$~~ $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)(-1)^n = \det(\lambda I - A)$

$P(A) = 0, \quad p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0$

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_0 I = 0$$

מחפשים בסיס חדש על סמך $[b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$ בלתי תלויים

מכפיל ב b מימין!

$$A^n b + \alpha_{n-1}A^{n-1}b + \dots + \alpha_1 Ab + \alpha_0 b = 0 \quad (*)$$

בוחרים בסיס $e_n = b$, $e_1, e_2 \dots e_n$

כך [illegible] $\dot{x}_n$

כותבים $(*)$ בצורה

$$A(\underbrace{A(A(\dots(\overbrace{Ab + \alpha_{n-1}b}^{e_{n-1}})\dots) + \alpha_2 b) + \alpha_1 b}_{e_1}) + \alpha_0 \underbrace{b}_{e_n} = 0 \quad (**)$$

e_2

$$p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n = (-1)^n \det(A - \lambda I) \quad (ODE)$$

נסתכל על המערכת

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b = e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$Ae_1 = -\alpha_0 e_n$	$Ae_1 + \alpha_0 b = 0$
$Ae_2 = e_1 - \alpha_1 e_n$	$Ae_2 + \alpha_1 b = e_1$
$Ae_3 = e_2 - \alpha_2 e_n$	$Ae_3 + \alpha_2 b = e_2$
$Ae_n = e_{n-1} - \alpha_{n-1} e_n$	$Ae_n + \alpha_{n-1} b = e_{n-1}$

מ(**) מקבלים

$$\begin{cases} e_1 = A^{n-1}b + \alpha_{n-1}A^{n-2}b + \dots + \alpha_1 b \\ e_2 = A^{n-2}b + \alpha_{n-1}A^{n-3}b + \dots + \alpha_2 b \\ \vdots \\ e_{n-1} = Ab + \alpha_{n-1}b \\ e_n = b \end{cases}$$

$$e_1 = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e_2 = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$e_n = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E = [e_1 e_2 \dots e_n] = [b\ Ab \dots A^{n-1}b] \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_{n-1} & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

בסיס חדש e

לא סינגולרית

לא סינגולרית

מ.ש.ל.

בכללות לכל מערכת SISO צורה controllable

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_3 \\ \dots \\ \dot{\tilde{x}}_n = -\alpha_0\tilde{x}_1 - \alpha_1\tilde{x}_2 - \dots - \alpha_{n-1}\tilde{x}_n + u \end{cases} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -\alpha_0 & & \dots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} = E^{-1}AE$$

טענה: לכל ערך עצמי מתאים רק וקטור עצמי אחד

$$\tilde{A}\tilde{v} = \lambda\tilde{v}, \quad \tilde{v} = \begin{pmatrix} c \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A}\tilde{v} = \begin{pmatrix} c \\ \lambda c \\ \vdots \\ \lambda^{n-1}c \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{v} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

מ.ש.ל.

$$\begin{cases}\dot x_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot x_n = u\end{cases} \Leftrightarrow x_1^{(n)} = u$$

הקנונית

נקראת

Brunowski form

Brunovsky form, Companion form, Frobenius form

ברור שאפשר לבחור כל פולינום אופייני

למערכת controllable SISO

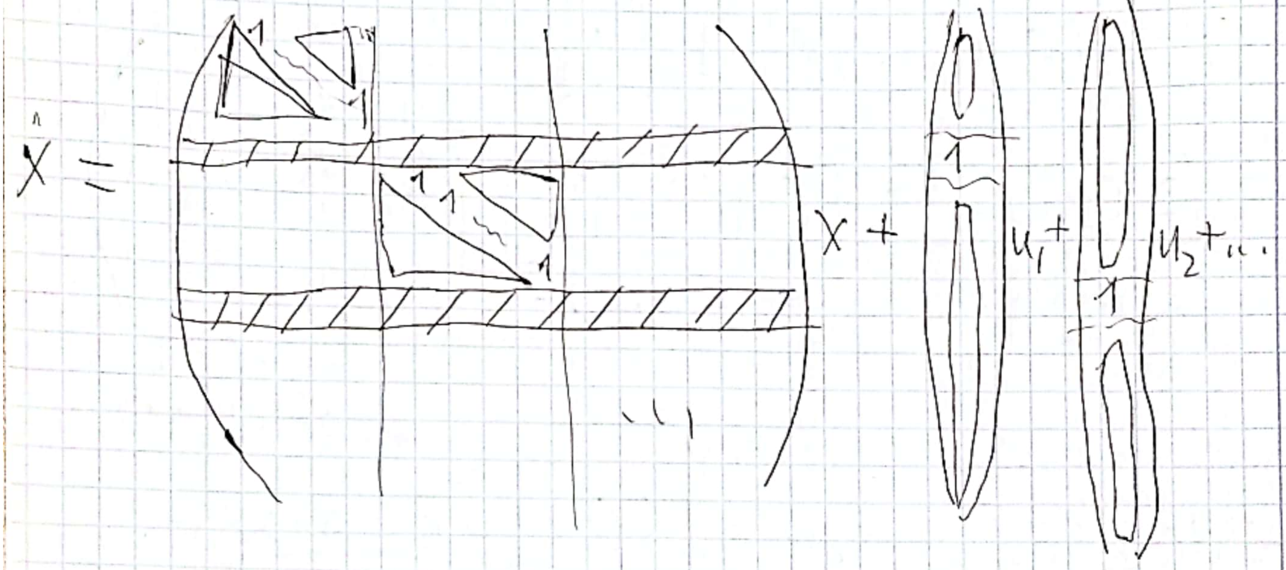
$$u = -\varkappa \tilde{x} + (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})\tilde{x}, \quad \varkappa = (\varkappa_0, \dots, \varkappa_{n-1})$$

$$\tilde{p}(\lambda) = \lambda^n + \varkappa_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \varkappa_0$$

כלומר

$$\boxed{u = -(\varkappa - \alpha)\tilde{x} = \underbrace{-(\varkappa - \alpha)E^{-1}}_{K}x}$$

MIMO case



עדיין אפשר לבחור פולינום אופייני

$$p(\lambda) = \underbrace{p_1(\lambda) \dots p_k(\lambda)}_{\text{לבחירה}}$$

הפירוק לא יחיד!

ייצוב לפי קירוב לינארי

$$\dot{x} = f(t, x, u),\ u \in \mathbb{R}^m,\ x \in \mathbb{R}^n,\ f(0,0) = 0$$

$$\dot{x} = \underbrace{f'_x(0,0)}_{A} x + \underbrace{f'_u(0,0)}_{B} u + o(\|x\| + \|u\|)$$

נניח A, B controllable $\Leftarrow \exists K \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$A \not\ni E \quad \operatorname{Spec}(A + BK) \subset \mathbb{C}_-$

$\Rightarrow u = Kx$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= E\tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} &= E^{-1}AE\tilde{x} + E^{-1}Bu,\ u = \tilde{K}\tilde{x} = \tilde{K}E^{-1}x \end{aligned}}$$

$$\boxed{K = \tilde{K}E^{-1}}$$

$$\dot{x} = (A + BK)x + \underbrace{o(\|x\| + \|Kx\|)}_{o(\|x\|)},$$

$$\boxed{\dot{x} = (A + B\tilde{K}E^{-1})x}$$

יציבות אסימפטוטית לוקלית
לפי הקירוב הלינארי

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \ln(x_1 - x_3 + 1) + e^u - 1 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 5x_2 + \sin(3x_3) + x_1^2 - \operatorname{tg} u \\ \dot{x}_3 = 6 \operatorname{arctg} \frac{x_1 + x_3}{6} + \cos x_2 - 1 \end{cases}$$

ליניאריזציה סביב $(x, u) = (0, 0)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_3 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - u \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W = [b\ Ab\ A^2b] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & -34 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad \operatorname{rank} W = 3$$

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda, & 0, & -1 \\ -2, & 5-\lambda, & 3 \\ 1, & 0, & 1-\lambda \end{pmatrix} = 10 - 12\lambda + 7\lambda^2 - \lambda^3 = -(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 12\lambda - 10)$$

$$e_3 = b\,,\quad e_1 = A^2 b - 7Ab + 12b\,,\quad e_2 = Ab - 7b$$

$$E = [e_1\ e_2\ e_3] = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} -0.045 & -0.045 & -0.273 \\ -0.227 & -0.227 & -0.364 \\ -0.136 & -1.136 & -0.818 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = E^{-1}AE = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -12 & 7 \end{bmatrix},\quad E^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = 10\tilde{x}_1 - 12\tilde{x}_2 + 7\tilde{x}_3 + u \end{cases}$$

נבחר ערכים עצמיים $-1, -2, -5$

$$(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+5) = \lambda^3 + 8\lambda^2 + 17\lambda + 10$$

$$u = -\left[(10, -12, 7) + (10, 17, 8)\right] \underbrace{E^{-1}x}_{\tilde{x}} =$$

$$= (-20, -5, -15)E^{-1}x = \underbrace{(4.091, 19.091, 19.545)}_{K} x$$

$$\mathrm{Spec}(A+BK) = \{-1, -2, -5\}$$

נוסחת Ackermann

SISO case: $\dot{x} = Ax + bu$

נניח הפולינום האופייני הרצוי הוא

$$\tilde{p}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0\,,$$

מהו K (שורה) שמקיים

$$\tilde{p}(\lambda) = \det(\lambda I - (A+BK)) \Leftarrow u = Kx$$

$$\boxed{K = -\underbrace{(0, 0, \dots, 1)}_{n} W^{-1}\tilde{p}(A)}$$

(22)

(1) כתוב:

$P(\tilde{A}) = 0$, $P(A) = 0$

$P(A) = A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_0 I = 0$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -\alpha_0 & \dots & & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$

$\tilde{P}(\tilde{A}) = \tilde{A}^n + \varkappa_{n-1} \tilde{A}^{n-1} + \dots + \varkappa_0 I =$ $\qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \tilde{P}(\tilde{A}) - p(A) = (\varkappa_{n-1} - \alpha_{n-1}) \tilde{A}^{n-1} + \dots + (\varkappa_0 - \alpha_0) I$

$\tilde{e}_1^T = (1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\tilde{e}_n^T = (0, \dots, 0, 1)$ ← לכן $\tilde{e}_i$ בסיס

$\tilde{A}: \; \tilde{e}_1^T \mapsto \tilde{e}_2^T \mapsto \dots \mapsto \tilde{e}_n^T \mapsto (-\alpha_0, \dots, -\alpha_{n-1})$

$\tilde{e}_1^T \tilde{A} = \tilde{e}_2^T, \dots, \tilde{e}_{n-1}^T A = \tilde{e}_n^T$, $\tilde{e}_n^T = (-\alpha_0, \dots, -\alpha_{n-1})$

$\tilde{e}_1^T A^i = (\overset{1}{0}, \overset{2}{0}, \dots, \overset{i+1}{1}, 0, \dots, \overset{n}{0})$, $i = 0, 1, \dots, n-1$

$\tilde{e}_1^T \tilde{p}(\tilde{A}) = (\varkappa_{n-1} - \alpha_{n-1}) \tilde{e}_n^T + \dots + (\varkappa_0 - \alpha_0) \tilde{e}_1^T =$

$= (\varkappa_0 - \alpha_0, \varkappa_1 - \alpha_1, \dots, \varkappa_{n-1} - \alpha_{n-1}) = -\tilde{K} = -KE$ (*)

נקבל: $\tilde{A} = E^{-1} A E$, $\tilde{p}(\tilde{A}) = E^{-1} \tilde{p}(A) E$

מכאן:

$\tilde{e}_1^T E^{-1} \tilde{p}(A) E = -KE$

$K = -\tilde{e}_1^T E^{-1} \tilde{p}(A)$ (**)

נחשב E^{-1} לפי W:

$\tilde{W} = [\tilde{b} \; \tilde{A}\tilde{b} \dots \tilde{A}^{n-1}\tilde{b}] = (\underset{\overset{\|}{E^{-1}b}}{E^{-1}b}, E^{-1} A \cancel{E} \cancel{E^{-1}} b, \dots, E^{-1} A^{n-1} \cancel{E} \cancel{E^{-1}} b)$

$\tilde{W} = E^{-1} W$, $E^{-1} = \tilde{W} W^{-1}$

$K = -\tilde{e}_1^T \tilde{W} W^{-1} \tilde{p}(A)$ ⇐ (**)

$\tilde{W} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{A} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \dots \tilde{A}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ נראה בקלות ש

$\boxed{\tilde{e}_1^T \tilde{W} = \tilde{e}_1^T}$ ⇐

$\tilde{e}_1^T \tilde{W} = [\tilde{e}_1^T e_n, \tilde{e}_2^T e_n, \dots, \tilde{e}_n^T e_n] = (0, 0, \dots, 0, 1)$

$$\boxed{K = -\underbrace{(0, 0, \dots, 0, 1)}_{n} W^{-1} \tilde{p}(A)}$$

~~Obser~~

השמת קטבים

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 0.904 & -0.091 & -1.545 \\ 0.091 & 0.091 & 1.545 \\ -0.045 & -0.045 & -0.273 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{p}(A) = A^3 + 8A^2 + 17A + 10I = \begin{pmatrix} 25 & 0 & -35 \\ -145 & 420 & 315 \\ 35 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

$$K = -(0,0,1)\, W^{-1} \tilde{p}(A) = (4.091,\ 19.091,\ 19.545)$$

$$u = Kx$$

Observability

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad u, A, B, C \text{ ידועים}$$

$$x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^l$$

$$C \in \mathbb{R}^{l \times n} \qquad l\,\boxed{}^{\,n}$$

מע' צפ"ה; תוך זמן קצוב להעריך x ממדי y

כה, בלתי אפשרי במסגרת לינארית

אין אפשרות לצפות מ.צ. אם אפשרי

$$x_*(0) = x_1 \neq x_{**}(0) = x_2\ , \quad u(t) \text{ כלשהו}$$

$$y_1(t) = Cx_*(t) \equiv y_2(t) = Cx_{**}(t)$$

לכן אותה מערכת

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_1 - x_2 \neq 0 \\ Cx(t) \equiv 0 \end{cases}$$

מקיים | במערכת

אם הוקטור $x_1 - x_2$ הוא בלתי נצפה,

הגדרה $\xi \in \mathbb{R}^n$ נקרא בלתי נצפה,
unobservable

אם הפתרון של

$$\dot{x} = Ax$$
$$x(0) = \xi$$

מקיים $Cx(t) \equiv 0$

הגדרה המערכת

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

נקראת observable

אם אין מצבים בלתי נצפים (חוץ מ-0).

Observability matrix

$$\dot{x} = Ax$$

$$Q = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad \ell n$$

n

$$\left.\begin{aligned} y &= Cx \\ \dot{y} &= CAx \\ \ddot{y} &= CA^2 x \\ y^{(n-1)} &= CA^{n-1} x \end{aligned}\right| \Rightarrow x$$

משפט המערכת observable (נצפית)

$$\Longleftrightarrow \quad \text{Rank } Q = n$$

הוכחה

1. נניח $\text{rank } Q < n$

$$\exists \xi \in \mathbb{R}^n : \ Q\xi = 0 \qquad \dot{x} = Ax \Rightarrow x(t) = e^{At} x(0)$$

$\xi \neq 0$

נניח $x(0) = \xi$

$$y(t) = Ce^{At}\xi$$

$$y(t) = C\xi + \frac{1}{1!} CA\xi t + \dots + \frac{1}{k!} CA^k \xi t^k + \dots$$

ממשפט Hamilton-Cayley

$$A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_0 I = 0$$

$$\Leftarrow \quad y(t) \equiv 0$$

2. נניח $\text{rank}\ \mathcal{O} = n$

נוכיח שהמערכת היא נצפית

Observable

הוכחה בשלילה: נניח, שלא נצפית, אז $\exists \xi \neq 0$

$$\Rightarrow C e^{At} \xi \equiv 0$$

גוזרים ב $t=0$:

$$C e^{At} \xi \Big|_{t=0} = C\xi = 0$$

$$\frac{d}{dt} C e^{At} \xi \Big|_{t=0} = CA\xi = 0$$

$\vdots$

מסקנה,

כסיום למה:

(A^T, C^T) controllable $\Leftrightarrow$ (A, C) observable

לכן (A, C) observable $\Rightarrow$ $\exists L$

$\text{Spec}(A^T + C^T L^T)$ — כרצוננו

$\overset{\shortparallel}{\text{Spec}}(A + LC)$

פרק אחלוף מקבלים צורה סטנדרטית

transposing

Single output

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{C}} = (0, \ldots, 0, 1)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}}_1 \\ \tilde{\tilde{x}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{x}}_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}}_n \\ \tilde{\tilde{x}}_{n-1} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{x}}_1 \end{pmatrix}$$

החלפה

renumeration

מספור מחדש

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\alpha_{n-1} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -\alpha_0 & & & \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (1, 0, \ldots, 0)$$

Canonical observability form

SISO Observer (Luenberger, 1964-71)
MIMO

צופה

(~~(A, B) controllable~~)

(A, C) observable

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu(t) \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu(t) + \underbrace{L(\hat{y} - y)}_{\text{injection term}}, \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

$\operatorname{Spec}(A + LC) \subset \mathbb{C}_-$

$L \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$

26

$\to$ observer injection term.

אקספוננציאלי $\hat{x} - x \to 0$

משפט

הוכחה:

$\varepsilon = \hat{x} - x$

$\dot{\varepsilon} = A\varepsilon + L(C\hat{x} - Cx) = (A + LC)\varepsilon$

[illegible] יש לו (משלו) כן, רק במקרה SISO

Closed Loop, SISO (גם MIMO) [illegible]

stabilization

$u = k\hat{x}$

(A, B) controllable

(A, C) observable

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bk\hat{x} \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bk\hat{x} + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

$$\varepsilon = \hat{x} - x$$

27

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BK)x + BK\varepsilon \\ \dot{\varepsilon} = (A + LC)\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ \varepsilon \end{pmatrix}^{\cdot} = \left(\begin{array}{c|c} A+BK & BK \\ \hline 0 & A+LC \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Spec}\left[\begin{array}{c|c} A+BK & BK \\ \hline 0 & A+LC \end{array}\right] = \mathrm{Spec}[A+BK] \uplus \mathrm{Spec}[A+LC]$$

FIN