הרצאה 10, 27/05-2021

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + \varepsilon \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \qquad \cancel{\sigma = x_1} \qquad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

unmatched

$\varepsilon = const.$

אי-אפשר לייצב! (ב-$x=0$)

דוגמא

matched disturbance מתבטל כליל ב-SM:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x} = x_3, \quad \dot{x}_3 = u + \tilde{\xi}(t) = v$$

$$\dddot{x}_1 = u = -(x_1 + 3x_2 + 3x_3) \quad \Leftarrow \text{ידוע } \xi \text{ אם}$$

$$\dddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 + 3\ddot{x}_1$$

$\ddot{x}_3$

$$|\xi| \le 1, \quad \text{ידוע לא } \xi \text{ אם}$$

$$\Leftarrow \quad u = -(k+1)\,\mathrm{sign}\underbrace{(x_1 + 2x_2 + x_3)}_{\Sigma}$$

לוקלית

$$\dot{\Sigma} = x_2 + 2x_3 + u + \xi, \qquad k = |x_2| + 2|x_3| + 1$$

גלובלית $\Leftarrow$

דוגמא

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x}^2\cos 3x = u$$

Slotine, p. 294

$$1 \le a \le 2$$

$x = x_c(t)$ [illegible]

$$\sigma = (x - x_c)^{\cdot} + \lambda(x - x_c) \qquad \text{מגדירים}$$

$$\dot{\sigma} = -a\dot{x}^2\cos 3x + u - \ddot{x}_c + \lambda\dot{x} - \lambda\dot{x}_c$$

$$a = 1{,}5 + \Delta a, \quad |\Delta a| \le 0{,}5$$

$$u := \underbrace{1.5\dot{x}^2\cos(3x) + \ddot{x}_c - \lambda(\dot{x} - \dot{x}_c)}_{u_{eq}} + u_1$$

[illegible]

$$\dot{\sigma} = -\Delta a\,\dot{x}^2\cos 3x + u_1$$

$$\dot{\sigma}\sigma < 0, \ |\dot{\sigma}| > k \quad \Leftarrow \sigma \ne 0 \quad \text{רוצים}$$

$$u_1 = -(0.5x^2|\cos 3x| + k)\,\text{sign}\,\sigma$$

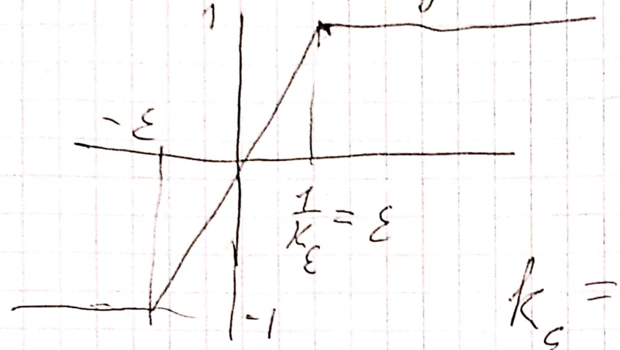
לסימולציה

$$x_c = \sin(\pi t/2)$$

$$a(t) = |\sin t| + 1$$

$$\lambda = 20,\quad k = 0.1,\quad \text{sign}\,\sigma = \text{sat}\frac{\sigma}{\varepsilon} = \text{sat}(k_\varepsilon \sigma)$$

$$\text{sat}\,s = \begin{cases} 1 & s > 1 \\ s & |s| \le 1 \\ -1 & s < -1 \end{cases}$$

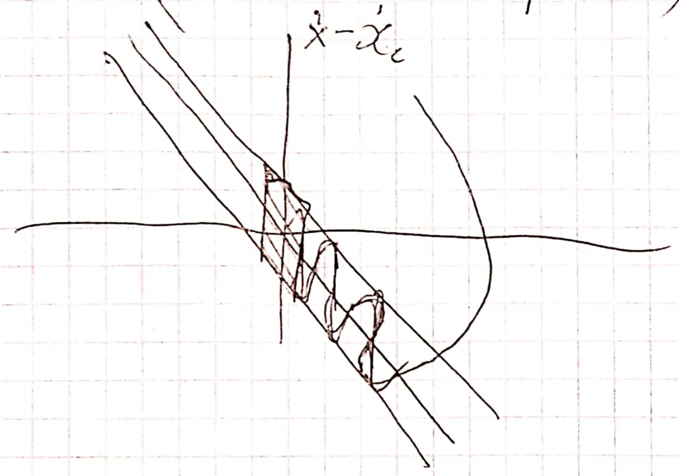


$$k_\varepsilon = 10$$

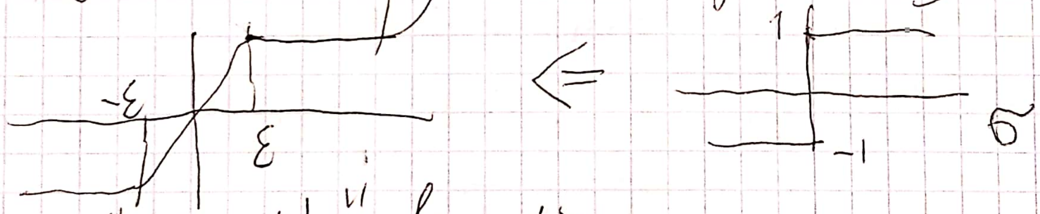
$\text{sign}\,\sigma \cong \dfrac{\sigma}{\varepsilon + |\sigma|}$ אפשרי ה2

$$\Rightarrow |\sigma| \le \varepsilon = \frac{1}{k_\varepsilon} = 0.1$$

$$u_1 = -(0.5x^2|\cos 3x| + 0.1)\,\text{sat}(10\sigma)$$



החלפת sign σ בפונקציה רציפה



"sigmoid" function

לקרוא רגולריזציה Slotine

chattering גבוהות רעש נשאר; $\frac{1}{\varepsilon} >> 1$

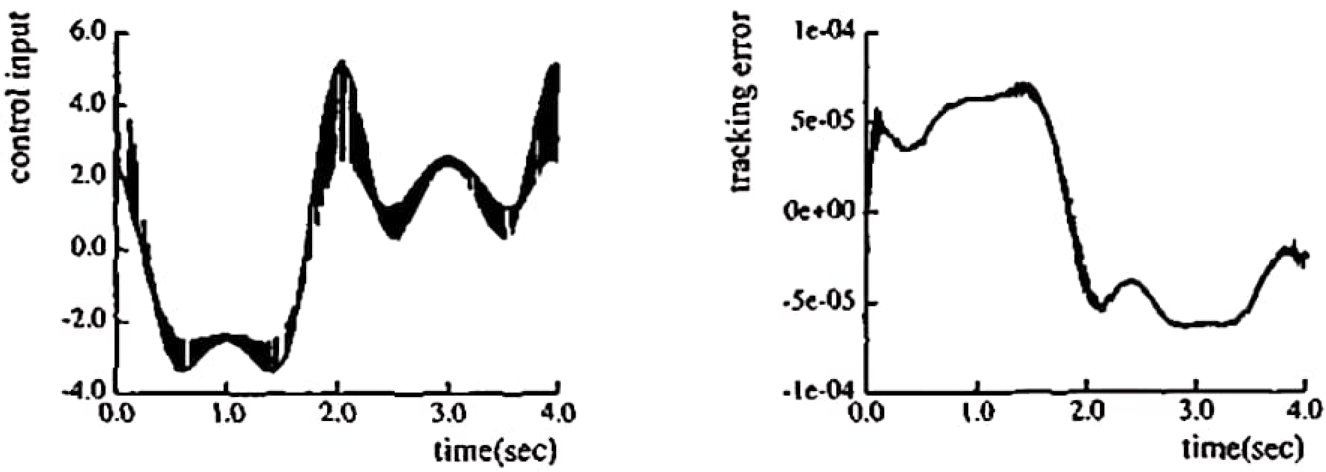


Figure 7.7 : Switched control input and resulting tracking performance

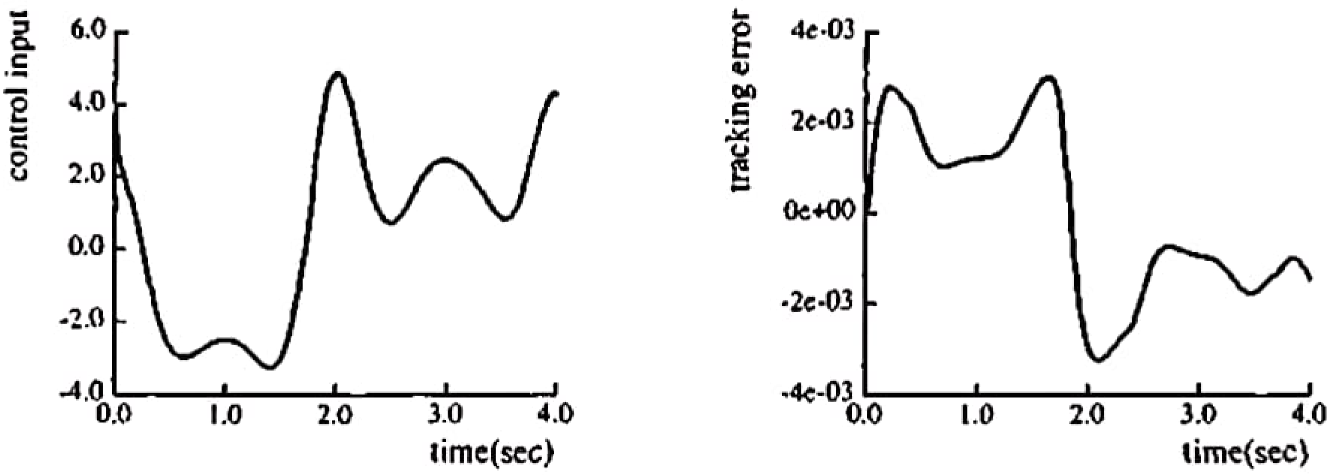


Figure 7.8 : Smooth control input and resulting tracking performance

High-Order Sliding Mode

Suppose $\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u$, $\sigma = \sigma(t,x)$

המטרה: $\sigma \equiv 0$, $\sigma, u \in \mathbb{R}$

כאשר rel. degree $= 1$

$\dot{\sigma} = h(t,x) + g(t,x)u$, $g \in [K_m, K_M]$, $|h| \le C$

$0 < K_m \le K_M$

הפתרון הוא $u = -\alpha \operatorname{sign} \sigma$

$K_m \alpha > C$

אם rel. degree $r > 1$

$\sigma^{(r)} = h(t,x) + g(t,x)u$, h, g
מוגבלים צריך (גזירות של)

אנו מכירים כבר $u = -\alpha \operatorname{sign} \Sigma(t,x)$

$\Sigma = \sigma^{(r-1)} + \lambda_1 \sigma^{(r-2)} + \dots + \lambda_{r-1}\sigma$

אך זה סופי — אסימפטוטי.

האם אפשר לפתור את זה תוך זמן סופי לכל r?

האם אפשר להוסיף אינטגרלים?

$\sigma^{(r)} = h(t,x) + g(t,x)u$

$u^{(k)} = v$, $v(t)$ – לא רציפה,
קנו"ה צריך הוספת אינטגרציה מעשה

התשובה היא k חיובי!

<u>הגדרות</u>

$\dot{x} = f(x)$, f מדידה לפי Lebesgue
חסומה לוקלית

כאשר $x = (\bar{x}, t)$

1. $\sigma(x)$ חלקה, $\sigma \in C^{r-1}$

הגדרה $\dot{x} = f(x),\quad x=(\bar{x},t)$ מצמום

$x\in\mathbb{R}^n$ אוטונומי

f - מדידה, לפי Lebesgue, חסומה, לוקלית

נניח $\sigma:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ או $\sigma:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^k$

$\sigma\in C^{r-1}$ (בצורה מרכיבית)

נגדיר $\dot\sigma = L_f\sigma,\ \ddot\sigma = L_f^2\sigma, \dots, \sigma^{(r-1)} = L_f^{r-1}\sigma$

$(\dot\sigma = \nabla\sigma\cdot f, \dots)$

1. נניח $\sigma,\dot\sigma,\dots,\sigma^{(r-1)}$ כולם קיימים ורציפים

2. הקבוצה $L_r = \{x \mid \sigma=\dot\sigma=\dots=\sigma^{(r-1)}=0\}$

לא ריקה ובכל נק' של L_r עומד

לפחות פתרון אחד של Filippov

שהוא כולו לוקאלי נמצא ב-L_r

$\Leftarrow$ אז הפתרון כזה נקרא מצב קיים

r-th order SM

במצב החלקה, מספר r

3. אם הקבוצה של מהירויות Filippov

$K_F[f](x),\quad x\in L_r$

כוללת לפחות 2 וקטורים שונים

אז אומרים "strictly r-th order"

מצב החלק מספר r שלמש

ככה מוגדרים מקרים של invariant manifold

מקרה $\sigma:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^k$ אז SM order הוא וקטור

$r=(r_1,\dots,r_k)\in\mathbb{N}^k$

קיום r-SM   משפט 100

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u, \quad \sigma, u \in \mathbb{R}$$
$$a, b, \sigma \in C^{\infty}$$

$$\sigma^{(r)} = h(t,x) + g(t,x)u, \quad \text{rel. degree } r$$

$$h \in [-C, C], \quad g \in [K_m, K_M], \quad 0 < K_m < K_M$$

אם $g<0$ אז מניחים סימן שלה

אז $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ — ~~[illegible]~~ [illegible] פונקציות חלקות

$$u = \alpha \operatorname{sign} \sigma, \quad K_m \alpha > C, \quad \alpha > 0$$

$\Leftarrow$ ישנו r-SM (אל ג'יג')

הוכחה:

$$\sigma^{(r)} \in h(t,x) + g(t,x)\alpha K_F[\operatorname{sign}(\cdot)](\sigma)$$

$\ni 0$

$\cancel{\sigma^{(r)}} \Rightarrow \sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0 \Rightarrow \sigma^{(r)} \in h + g\alpha[-1,1]$

$\left(\sigma^{(r)} = 0 \Leftrightarrow\right) u = -h/g$ פתרון לפי Filippov

מ.ש.ל.

הערה

1. צריך לייצב את הפתרון ב r-SM
2. הפתרון יהיה פונקציה של $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$
3. צריך לפתור אותם במעגל סגור על מנת [illegible] $\sigma(t, x(t))$

כל אפשרי כי $|\sigma^{(r)}| \le K_M \alpha + C$

חשוב שקיים K_M!

2-SMC (2-SM control)

Twisting controller (Levant 1985)

$$\ddot\sigma = h(t,x) + g(t,x)u$$

$$\ddot\sigma \in [-C, C] + [K_m, K_M]u$$

$$u = -\alpha_1 \operatorname{sign}\sigma - \alpha_2 \operatorname{sign}\dot\sigma, \quad \alpha_1 > \alpha_2$$

[illegible] מערכת $C = 0 \cdot \delta$

במקרה כללי:

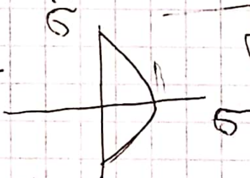
1. $K_m(\alpha_1 - \alpha_2) > C$

2. $\dfrac{K_M(\alpha_1 - \alpha_2) - C}{K_m(\alpha_1 + \alpha_2) + C} \cancel{>} 1$

מוכח: $\sigma, \dot\sigma \to 0$ בזמן סופי

הוכחה [illegible] ([illegible])

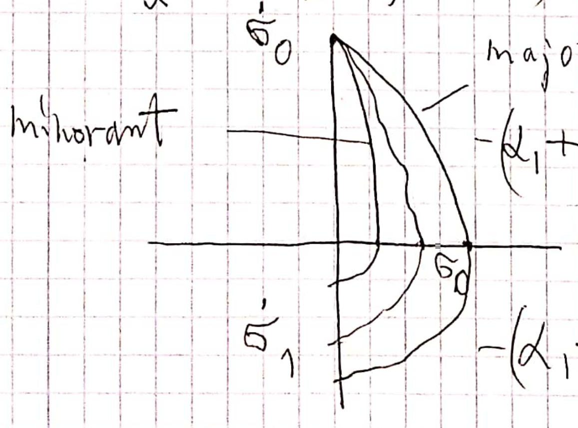
$$\ddot\sigma = -\alpha \operatorname{sign}\sigma$$



$\sigma > 0$, $\dot\sigma\ddot\sigma = -\alpha\dot\sigma$

$$\frac{1}{2}\dot\sigma^2 + \alpha\sigma = const = \tilde C$$

$$\sigma = \frac{1}{\alpha}\left(\tilde C - \frac{1}{2}\dot\sigma^2\right), \quad \dot\sigma = \pm\sqrt{2(\tilde C - \alpha\sigma)}$$



$-(\alpha_1 + \alpha_2) = u$

$-(\alpha_1 - \alpha_2) = u$

$\sigma_0 \in \left[\cancel{\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}}\right]$

$$\sigma_0 \left[\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)K_M + C}, \frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)K_m - C}\right]$$

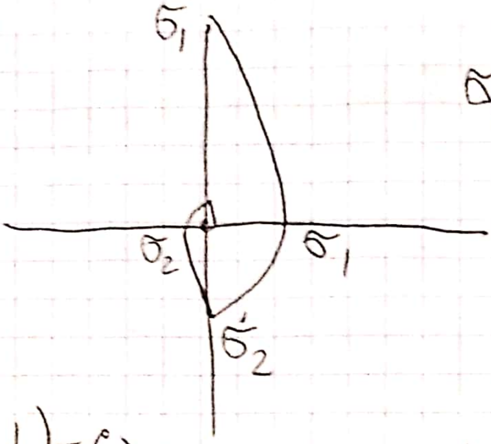
$$\frac{\dot\sigma_1^2}{\dot\sigma_0^2} \in \left[\frac{(\alpha_1-\alpha_2)K_m - C}{(\alpha_1+\alpha_2)K_M + C}, \frac{(\alpha_1+\alpha_2)K_M + C}{(\alpha_1+\alpha_2)K_m - C}\right]$$

$$\ddot\sigma \in [-C, C] - (\alpha_1 \pm \alpha_2)[K_m, K_M] \operatorname{sign}\sigma$$

עוד הפעם

$$\sqrt{\frac{K_m(\alpha_1-\alpha_2)-C}{K_M(\alpha_1-\alpha_2)+C}} \le \left|\frac{\dot\sigma_1}{\dot\sigma_2}\right| \le \sqrt{\frac{K_M(\alpha_1-\alpha_2)+C}{K_m(\alpha_1+\alpha_2)-C}} < 1$$

$\sigma_k, \dot\sigma_k \to 0$



$|\ddot\sigma| \ge K_m(\alpha_1-\alpha_2)-C>0$

זמן התכנסות!

$$T \le \frac{1}{K_m(\alpha_1-\alpha_2)-C}\left(|\dot\sigma_1|+|\dot\sigma_2|+\dots\right) < \infty$$

סדרה הנדסית

מ.ש.ל.

המימוש: מציאות $t_0, t_1, t_2, \dots \to \infty$

$\delta\sigma_j = \sigma(t_{j+1}) - \sigma(t_j)$ (רעש מדידות!)

$u = -\alpha_1 \operatorname{sign}\sigma(t_j) - \alpha_2 \operatorname{sign}\delta\sigma_{j-1}, \; t \in [t_j, t_{j+1}]$

$\hat\sigma(t_j) = \sigma(t_j) + \eta(t_j)$ רעש

אפשר לבדוק התכנסות לגודל

$|\sigma| \le \mu_0 \tau^2, \quad |\dot\sigma| \le \mu_1 \tau$

$|\eta| \le \varepsilon \le \gamma\tau^2, \quad \delta t_j = t_j - t_{j-1} = \tau > 0$

גוזר (Levant 1990, 1993, 1998) גזירת $f(t)$

$f(t) = f_0(t) + \eta(t)$, $|\ddot{f}_0| \le L$

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}} |z_0 - f(t)|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(z_0 - f(t)) + z_1 \\ \dot{z}_1 = -\lambda_0 L \operatorname{sign}(z_0 - f(t)) \end{cases}$$

<u>משפט</u> לכל $\lambda_0 > 1$ קיים $\lambda_1 > 0$

(לכל λ_1 גדול מספיק) כך שאם $\eta = 0$

$$z_0(t) \to f_0(t), \quad z_1(t) \to f_1(t)$$

תוך זמן סופי

אני מציע $\lambda_0 = 1.1$, $\lambda_1 = 1.5$

הוכחה מקורית (1998) $\eta = 0$

$$\begin{cases} \dot{z}_0 - \dot{f}_0 = -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}} |z_0 - f_0|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(z_0 - f_0) + z_1 - \dot{f}_0 \\ \dot{z}_1 - \ddot{f}_0 = -\lambda_0 L \operatorname{sign}(z_0 - f_0) - \ddot{f}_0 \end{cases}$$

נסמן

$$\sigma_0 = (z_0 - f_0(t))/L$$
$$\sigma_1 = (z_1 - \dot{f}_0(t))/L$$

מקבלים

$$\dot{\sigma}_0 = -\lambda_1 |\sigma_0|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}\sigma_0 + \sigma_1$$
$$\dot{\sigma}_1 \in -\lambda_0 \operatorname{sign}\sigma_0 + [-1, 1]$$

(כי $\left|\frac{\ddot{f}_0}{L}\right| \le 1$),

<u>טענה:</u> ש כל 2-SM ב-σ_0: $\sigma_0, \dot{\sigma}_0 \to 0$

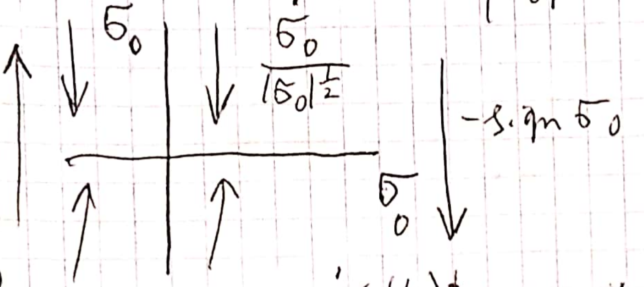
גם כן $\Rightarrow \sigma_1 \to 0$

$$\ddot{\sigma}_0 = -\frac{\lambda_1}{2|\sigma_0|^{\frac{1}{2}}}\dot{\sigma}_0 + \dot{\sigma}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(|\sigma_0|^{\frac{1}{2}}\operatorname{sign}\sigma_0\right) = \frac{d}{dt}\left((\sigma_0 \operatorname{sign}\sigma_0)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sign}\sigma_0\right)$$ חישוב

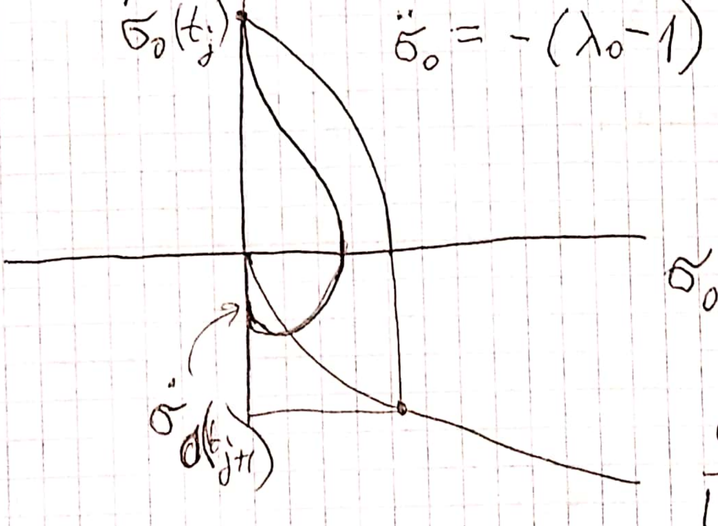
$$= \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{(\sigma_0 \operatorname{sign}\sigma_0)^{\frac{1}{2}}}}_{|\sigma_0|^{\frac{1}{2}}}\dot{\sigma}_0 \operatorname{sign}\sigma_0 \cdot \operatorname{sign}\sigma_0 \quad , (\operatorname{sign}\sigma_0)^{\cdot} = 0$$

$$\ddot{\sigma}_0 \in -\frac{\lambda_1}{2}\frac{\dot{\sigma}_0}{|\sigma_0|^{\frac{1}{2}}} - [\lambda_0 - 1, \lambda_0 + 1]\operatorname{sign}\sigma_0$$



$\sigma_0 > 0,\ \dot{\sigma}_0 < 0,\ \frac{\dot{\sigma}_0}{|\sigma_0|^{\frac{1}{2}}} \geq 2\frac{(\lambda_0+1)}{\lambda_1}$

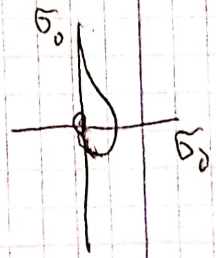
$\Rightarrow \dot{\sigma}_0 \geq 0$



$\ddot{\sigma}_0 = -(\lambda_0 - 1)$ Majorant

$$\frac{\dot{\sigma}_0}{|\sigma_0|^{\frac{1}{2}}} = 2\frac{\lambda_0+1}{\lambda_1}$$

ל λ_1 גדול מספיק מתגלגלים



$$\left|\frac{\dot{\sigma}_0(t_{j+1})}{\sigma_0(t_j)}\right| < 1 \Rightarrow \dot{\sigma}_0 \to 0, \quad \sigma_0 \to 0$$

קצת יותר מסובך להראות
שהתכנסות היא בזמן סופי. יש צורך [illegible]

Output feedback:

$$\ddot{\sigma} \in [-C, C] + [K_m, K_M]\, u , \qquad \lceil s \rfloor^{\alpha} \stackrel{def}{=} |s|^{\alpha} \operatorname{sign} s$$

$$u = -\alpha_1 \operatorname{sign} z_0 - \alpha_2 \operatorname{sign} z_1$$

$$\dot{z}_0 = -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}} \lceil z_0 - \sigma \rfloor^{\frac{1}{2}} + z_1$$

$$\dot{z}_1 = -\lambda_0 L \operatorname{sign}(z_0 - \sigma) = -\lambda_0 L \lceil z_0 - \sigma \rfloor^{0}$$

$$\lambda_0 = 1.1, \quad \lambda_1 = 1.5, \quad L \geq K_M(\alpha_1 + \alpha_2) + C$$

(בלשון)

<u>משפט</u> $|\eta| \leq \varepsilon,\ \delta t_j \leq \tau \Rightarrow$ קיימים $\mu_0, \mu_1 > 0$

$$|\sigma| \leq \mu_0 \rho^2, \quad |\dot{\sigma}| \leq \mu_1 \rho,$$

$$\rho = \max\left(\tau, \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$$

μ_0, μ_1: תלויים ב- $L, K_m, K_M, C, \alpha_1, \alpha_2$

זוכר בערך

$$|z_0 - f_0| \leq \mu_0 L \rho^2 \qquad \rho = \max\left(\tau, \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$|z_1 - \dot{f}_0| \leq \mu_1 L \rho$$

μ_0, μ_1 תלויים ב- λ_0, λ_1, $\underbrace{\mu_0 \geq 1, \mu_1 > 2}$

(Levant, Yu תמיד 2017)

משפט 2 באותם תנאים:

כל קטע חלקות באורך τ_k לפחות | סדרה $\sigma_k(t)$ חלקה למקוטעין, $\kappa\to\infty$, $\tau_k\to 0$

$\ell\in\mathbb{N}$, $|\sigma_k(t)|\le c\,\tau_k^{r}$, $r>0$, $\ell=[r]$

אבל הפעם ידוע – $\forall t$ $|\sigma_k^{(p)}(t)|\ge\delta$ בקטע

$$\Rightarrow \boxed{\ell\le p}$$

הוכחה: נניח ש- $\ell>p\in\mathbb{N}$

אז נקבל בתהליך ההוכחה משפט 1

t_k ; $|\sigma^{(p)}(t_k)|\le æ_k\tau_k^{\ell-p}\to 0$

סתירה

מש.ל.

מסקנה: אי-אפשר להבטיח $|\sigma|=O(\tau^{\ell})$

אבל להבטיח $|\sigma^{(i)}|=O(\tau^{\ell-i})$

$i=1,2,\dots,\ell-1$

וגם אם $|\sigma^{(\ell)}|$ נגרם מ-0

אז אי אפשר לקבל דיוק טוב מ $|\sigma|=O(\tau^{\ell})$