פרקים בבקרה לא ליניארית

אביב 2021

אריה לבנט, ח' 123א', שרייבר

שעות קבלה: יום ג', 14^{00}-15^{00}

אתר הקורס: http://www.tau.ac.il/~levant/nonlin/

ספרות

Slotine, Li, Applied Nonlinear Control, 1991

Filippov A.F. Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side, 1988, 2010

Isidori A., Nonlinear Control Systems, 1995

Utkin Sliding Modes in Control and Optimization Problems, 1992

Shtessel, Edwards, Fridman, Levant Sliding Mode Control (SMC) and Observation, 2013

SMC for Students: survey-tutorial, 2019 (באתר)

04/03-2021 הרצאה 1

בעיות בקרה

$x \in M$
$u \in V$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,u) & \text{model, מודל מתמטי} \\ y = h(t,x) & \text{sensor, חיישן} \end{cases}$$

מנוע, מכונית, רובוט, מטוס, ...

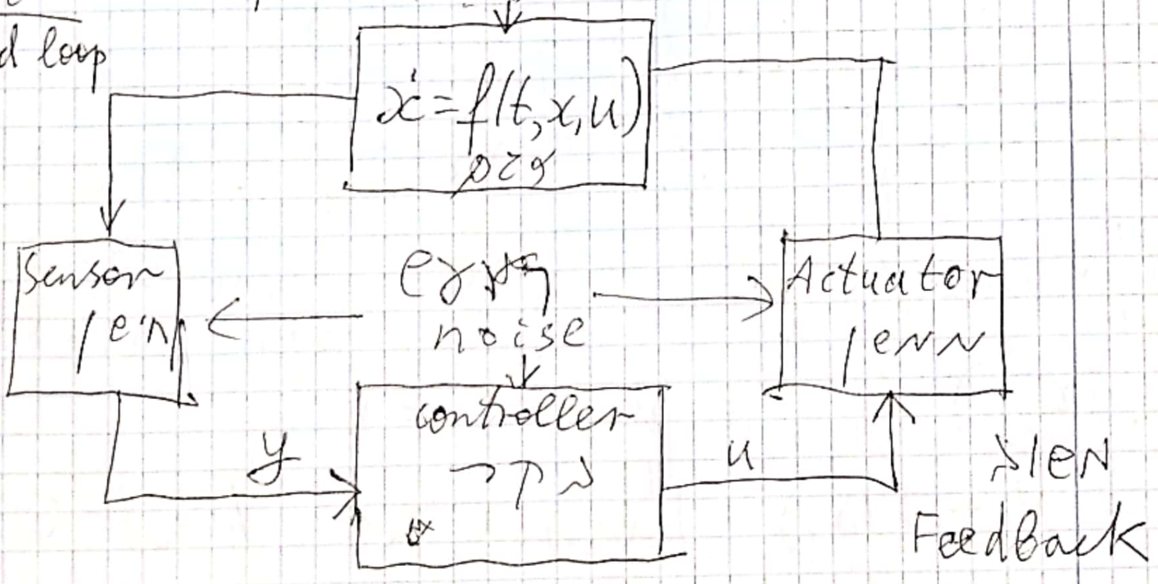
u - בקרה. אותו צריך להגדיר מראש
או בזמן אמת

ישנו יעד בקרה

בעיות קלסיות:

1. בע"ת — עקיבה; $y - y_c(t) \to 0$, $u(t) = ?$
2. בע"ת — "ייצוב"; $x \to 0$, $u(t) = ?$

מבנה מערכת בקרה במעגל סגור
closed loop



דוגמא לייצוב X

$y = x$, $\dot{x} = u$

$$u = \begin{cases} -\text{sign}\, x(0), & 0 \le t \le |x(0)| \\ 0, & t > |x(0)| \end{cases}$$

בקרה בחוג פתוח
Open loop control

במקרה הזה, נוסף מנגנות רעש והפרעות —

$$y = x + z,\quad |z| \le \varepsilon$$

$$\dot{x} = u + \delta \quad \Big|\ \delta \ll 1$$

נניח לא בגדול,

פתרון א:

$\dot{x} = u + \delta$, $u = -x - z$, $|z| \le \varepsilon$

$\delta, \varepsilon = 0$: $\dot{x} + x = 0 \Rightarrow x \to 0$

$\delta, \varepsilon \neq 0$: $\dot{x} + x = \delta \quad \Big|\ x \to \delta$

המטרה קטנה!

כאשר בקרה בחוג סגור

תורת הבקרה הקלסית: לינארית

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in \mathbb{R}^n \\ y = Cx, & x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^k \end{cases}$$

מערכת נקראת ריבועית אם $k = m$

המערכות האלה מופיעות מלינאריזציה

$$\dot{x} = f(x, u), \quad f(\underbrace{x_0, u_0}_{const}) = 0$$

$$y = h(x)$$

$$(x - x_0)^{\cdot} = f(x,u) = f'_x(x_0,u_0)(x - x_0) + f'_u(x_0,u_0)(u - u_0) + \theta(x - x_0, u - u_0)$$

θ קטנה = "קטן בהשוואה ל"

$f'_x(x_0,u_0) = A$,

$f'_u(x_0,u_0) = B$, $\vartheta = u - u_0$

$$y = h(x_0) = h'(x_0)(x - x_0),\quad h'(x_0) = C$$

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\xi + B\vartheta \\ \psi = C\xi \end{cases}$$

התקווה היא שבקרה מהסוג $\vartheta = K\xi$ תייצב את ξ

אז המערכת שנקבל

$$\dot\xi = A\xi + Bk\xi$$

היא לינאריזציה של

$$\dot x = f(x, u_0 + k(x - x_0))$$

וזאת תהיה יציבה אסימפ׳ ((.ל׳ (לוקלי)

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

דוגמא

$$\begin{cases} \dot x_1 = tg\, x_2 + u^3 \\ \dot x_2 = \sin x_1 - u^2 \end{cases} \qquad x_{1,0} = \frac{\pi}{2},\quad x_{20} = \frac{\pi}{4},\quad u_0 = -1$$

נעביר ״לזוז״ x ב-x_0, הכל נמצא

לינאריזציה

$$\begin{cases} \dot\xi_1 = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\xi_2 + 3(-1)^2 v \\ \dot\xi_2 = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\xi_1 - 2\cdot(-1)v \end{cases} \qquad v = u + 1,\quad \xi_1 \approx x_1 - \frac{\pi}{2},\quad \xi_2 \approx x_2 - \frac{\pi}{4}$$

המתאמות

$$\begin{cases} \dot\xi_1 = 2\xi_2 + 3v \\ \dot\xi_2 = 2v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2\xi_1 - 3\xi_2)^{\cdot} = 4\xi_2 \\ 4\dot\xi_2 = 8v \end{cases}$$

$$z_1 = 2\xi_1 - 3\xi_2,\quad z_2 = 4\xi_2$$

החלפת קואורדינטות

$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2 \\ \dot z_2 = 8v \end{cases} \qquad \ddot z_1 = 8v,\quad 8v = -2\dot z_1 - z_1 = -2z_2 - z_1$$

נבחר

$$z_1 \to 0,\ z_2 = \dot z_1 \to 0 \Leftarrow \ddot z_1 + 2\dot z_1 + z_1 = 0$$

אז

$$v = -\frac{1}{8}(2z_2 + z_1) = -\frac{1}{8}(8\xi_2 + 2\xi_1 - 3\xi_2)$$

$$u + 1 = v = -\frac{1}{8}(5\xi_2 + 2\xi_1) = -\frac{1}{8}\left(2\left(x_1 - \frac{\pi}{2}\right) + 5\left(x_2 - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

קיבלנו $u=-1-\frac{1}{4}(x_1-\frac{\pi}{2})-\frac{5}{8}(x_2-\frac{\pi}{4})$ e

לוקלית מייצב x_1,x_2 ב- $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$

דוגמא מערכת סקלרית

לייצב במ $x=0$ אלג' $\dot{x}=x+100x^2+u$

לינאריזציה $\dot{\xi}=\xi+v$, $v=u$

בוחר בקרה; $v=-2\xi \Rightarrow u=-2\xi$

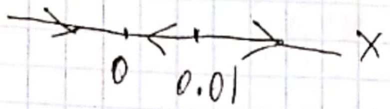
$\dot{\xi}=-\xi$ $\quad =-2x$?

המערכת המקורית הופכת ל

$$\dot{x}=-x+100x^2=-x(1-100x)$$

$$x(0)>0.01 \Rightarrow x\to\infty$$

תוך זמן סופי!



לכן לינאריזציה מסוכנת

הערה controller = algorithm

מכשיר שמייצר את הבקרה = control

u-control, צריך שם בקרה (control) אפשרי

צריך שם controller מלבד אפשרי

כמו צריך שם מבקר המתאים...

בעברית יוצאת אותה מילה "בקרה"

הערה דיברנו על לינאריזציה של מערכת

אוטונומית סביב נק' איזון / $\dot{x}=f(x,u)$, $f(x_0,u_0)=0$

אפשר גם לדבר על לינאריזציה של $\dot{x}=f(t,x,u)$

לאורך המסלול $\dot{x}=f(t,x,u(t))$, $x(t_0)=x_0$

התוצאה תהיה מערכת מהצורה $y=h(t,x)$

$$\dot{\xi}=A(t)\xi+B(t)v,\quad \psi=C(t)\xi$$

תזכורת 6

$o, \cancel{\omega}, O$ $\qquad f, g : X \to \mathbb{R}$

הגדרה

X - מרחב מטרי (או טופולוגי)

$x \to x_*$ (גם במובן | $x \to \infty$, $x \in \mathbb{R}$)

$f = O(g) \iff \exists C > 0, V$ - סביבת x_*

של V מתקיים $|f(x)| \le C|g(x)|$ ל $x \ne x_*$

(f לכל היותר מאותו סדר גודל כמו g)

$f = o(g) \iff \forall C > 0 \ \exists V$;

$|f(x)| \le C|g(x)|$, $x \ne x_*$

(f מסדר גודל ~~...~~

קטן מ-g)

דוגמאות

$x \to 0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 = o(x)$, $x^2 = O(x)$

$x \ne o(x^2)$, $x = O(x^2)$

$x = o(10^{-12})$, $\cos x = O(10^{-12})$

$= O(1)$

$\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$, $\ln x = o(\sqrt{x})$, $x \to \infty$

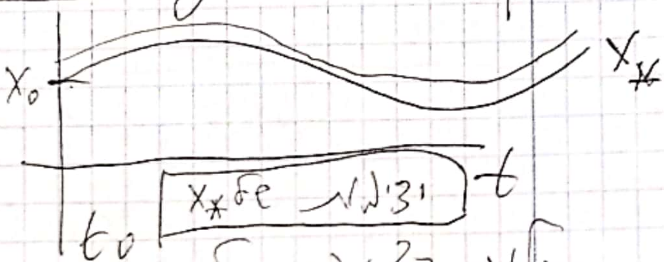
$\ln x = o\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \to 0^+$

מושג - תזכורת לסוגי היציבות

Lyapunov stability notions $\quad f \in C$

$t \in [t_0, \infty)$, $x_*(t)$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x_*(t_0) = x_0, \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:

1. $\|x(t_0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \exists x(t) \ \forall t \ge t_0$
2. $\forall t > t_0 \ \|x(t) - x_*(t)\| < \varepsilon$

קיום ב-$[t_0, \infty)$

רציפות של הפתרון

ב-$x(t_0)$

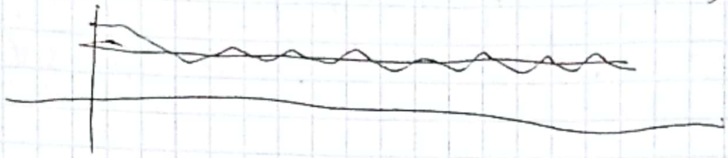
יציבות של נק' איזון, מצב מתמיד
שווי משקל!

$\dot{x}=f(t,x)$

$x(t_0)=x_0$

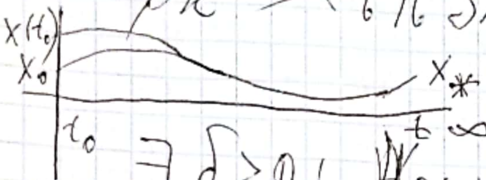
פתרון $x(t)\equiv x_0$ $\forall t\geq t_0$, $f(t,x_0)\equiv 0$

אז נק' איזון x_0 נקראת יציבה לפי ליאפונוב אם $x(t)=x_0$ יציב



יציבות אסימפטוטית (גם של נק' איזון)

$x_*(t)$ נקרא יציב אסימפטוטית אם



1. x_* יציב
2. $\exists\delta>0$; לכל $\|x(t_0)-x_0\|<\delta$

$\Rightarrow \lim_{t\to\infty}\|x(t)-x_*(t)\|=0$

$x^{(n)}=\varphi(t,x,\dot{x},\dots,x^{(n-1)})$

$\varphi\in C$

$\dot{x}_*(t_0)=\xi_0,\dots,x_*^{(n-1)}(t_0)=\xi_{n-1}$

פתרון $x_*(t)$ למשוואה סקלרית נקרא יציב/יציב אס' אם זה נכון לגבי הפתרון

$x_*(t)$

$\dot{x}_*(t)$

$\vdots$

$x_*^{(n-1)}(t)$

של המערכת

$$\begin{cases}\dot{x}_0=x_1\\ \dot{x}_1=x_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}=\varphi(t,x_0,x_1,\dots,x_{n-1})\end{cases}$$

עם אותם תנאי התחלה

יציבות אסימפטוטית גלובלית

$\lim_{t\to\infty}\|x(t)-x_*(t)\|=0$

לכל תנאי התחלה $x(t_0)$

פונקצית ליאפונוב (1898 ~)

$\dot{x} = f(t,x)$, $f(t,x_0) \equiv 0$ $\forall t \ge t_0$, $f \in C$

נתון

פונקציה $V(x)$ (Lyapunov) אם קיימת מוגדרת לוקלית

1. $v \in R^n \to R$, $v \in C^1$ ב

2. $v(x_0)=0$, $x \ne x_0 \Leftarrow v(x) > 0$ מוגדרת חיובית

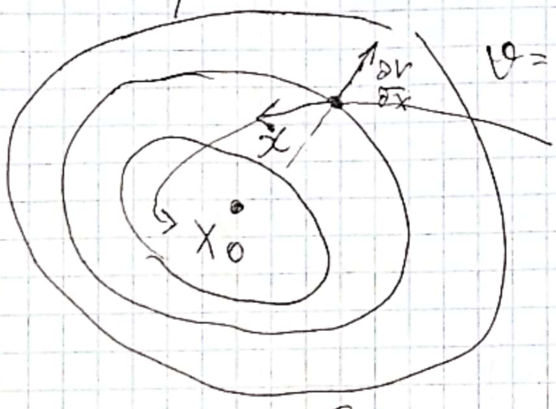
3. $\dot{v}(t,x) \overset{def}{=} \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(t,x) \le 0$

⇐ יציבות לפי Lyapunov של $x(t) \equiv x_0$

3'. $\exists w: R^n \to R$, $w \in C$, $w(x_0)=0$, $x \ne x_0 \Rightarrow w(x) > 0$ מוגדרת חיובית

$$\dot{v}(t,x) \le -w(x)$$

⇐ יציבות אס' של נק' שיווי, $x(t) \equiv x_0$



הסבר

$$\dot{V}(t,x) = \frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x}(x) \cdot \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(t,x)$$

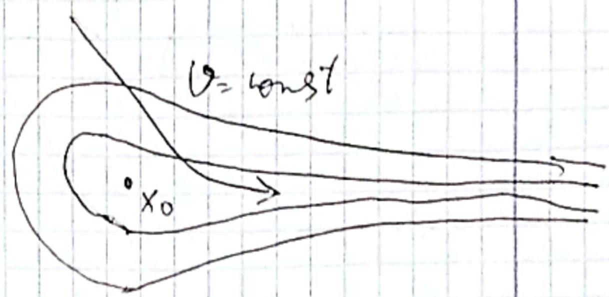
יציבות אסימפטוטית גלובלית

4. "radially unbounded" V — מוסיפים

$$\lim_{R \to \infty} \min_{\|x - x_0\| = R} V(x) = \infty$$

$\Leftrightarrow$ $\forall M > 0$ $\{x \mid V(x) \le M\}$ קומפקט

radially unbounded



אמות

דוגמא

$$\dot{x}_1 = \cancel{x_2 - x_1(x_1^2+x_2^2)}$$
$$\cancel{\dot{x}_2 = -x_1 - x}$$

משפט

$$\dot{x} = f(t,x) = A(x-x_0) + R(t,x)$$
$$\|R(t,x)\| = o(\|x-x_0\|)$$
$$\left(\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ \|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \|R(t,x)\| \le \varepsilon\|x-x_0\|\right)$$

1. $\mathbb{C}_- = \{\lambda\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda<0\}$, $\operatorname{Spec} A \in \mathbb{C}_-$

⇐ יציבות אסי' של x_0

2. $\mathbb{C}_+ = \{\lambda\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda>0\}$, $\operatorname{Spec} A \cap \mathbb{C}_+ \neq \emptyset$

⇐ אין יציבות

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(3x_1 - 8x_2) + x_2^2\cos t \\ \dot{x}_2 = \sin(2x_1 - 5x_2) - \cos t^2\cdot|x|^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

יציבות אסי' של $x_1 = x_2 = 0$

לינאריזציה!

$$\cancel{\dot{x}_1 =} \begin{cases} \dot{\xi}_1 = 3\xi_1 - 8\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = 2\xi_1 - 5\xi_2 \end{cases} \qquad P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

דוגמא

$\dot{x}_1 = \cancel{g}\sin(3x_1 - 7x_2 + x_2^2)$
$\dot{x}_2 = \sin(2x_1 - 5x_2 + x_1x_2\sin t^2)$

$\sin(2x_1 - 5x_2 + x_1x_2\sin t^2)$
$= 2x_1 - 5x_2 + x_1x_2\sin t^2 + o(2x_1 - 5x_2 + x_1x_2\sin t^2)$
$= 2x_1 - 5x_2 + \underbrace{O\left(\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}\right)O(1)}_{o(|x_1|+|x_2|)} + o(10|x_1| + 10|x_2|)$

x_1x_2

$|x_1x_2\sin t^2| \le \left(\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}\right)|\sin t^2| \le 1$

לכן לפי משפט [illegible]

$\dot{x}_1 = 3x_1 - 7x_2$
$\dot{x}_2 = 2x_1 - 5x_2$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 1$

יש שורשים ב- $\mathbb{C}_+$

אין יציבות

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \pm x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 \pm x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

[illegible]?

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_1 \end{cases} \qquad p(\lambda) = \lambda^2 + 1 \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

משפט הלי' לא עוזר

$V(x) = x_1^2 + x_2^2 \qquad \dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 =$
$= 2x_1(x_2 \pm x_1(x_1^2 + x_2^2)) + 2x_2(-x_1 \pm x_2(x_1^2 + x_2^2))$
$= \pm(x_1^2 + x_2^2)^2 \le 0$

מתכנס ל-0 או צמוד קבוע לתנאי כל כיוון! "$-$"
בורחת ל-∞ תלוי צמוד קבוע! "$+$"

לסכום יציבות מערכת 1

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x} = Ax$, $\operatorname{Spec} A \subset \mathbb{C}_-$

אם נבנה פונק' צ"מ ליאפונוב

$V(x) = x^T P x$, $P^T = P$, $P > 0$

$P = ?$ x עמודה, חיובית, מוגדרת

V - תבנית ריבועית

$V = x^T P x$

$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T A^T P x + x^T P A x$

$= x^T (A^T P + PA) x$

משוואת Lyapunov:

$A^T P + PA = -Q$, Q מוגדרת חיובית

טענה

1. Q סימטרית, $\operatorname{Spec} A \subset \mathbb{C}_-$

$\Rightarrow \exists!\, P > 0$ סימטרית

2. $\forall Q$, $\operatorname{Spec} A \subset \mathbb{C}_-$

$\Rightarrow \exists!\, P$ (לא סימטרי) ~~(לא יחיד)~~

$\boxed{(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At}A}$

הוכחה:

$(e^{A^T t} Q e^{At})' = A^T e^{A^T t} Q e^{At} + e^{A^T t} Q e^{At} A$

$t \to \infty \Rightarrow e^{At} \to 0$, נפעיל $\int_0^\infty \ldots dt$ משני הצדדים

$$0 - Q = A^T \left\{ \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt \right\} + \left(\int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt \right) A$$

מתכנס כי $\operatorname{Spec} A \subset \mathbb{C}_-$

מוגדרת $P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt \Leftarrow Q > 0$

חיובית $Q > 0$, $x^T P x = \int_0^\infty x^T e^{A^T t} Q e^{At} x \, dx \geq 0$

$x^T P x = 0 \Rightarrow e^{At}x \equiv 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{At}x = Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

$P \xmapsto{\pi} A^T P + PA = -Q$ חח״ע

כיוון שלכל $Q > 0$ (סימטרית) (לכל Q חיובית מוגדרת) $\exists P$ סימטרי

$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}$ מימד של סימטריות

$\ker \pi|_{symmetric} = 0$ חח״ע

$\mathbb{R}^{n^2} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^{n^2}$ לכל סימטרי יש $\forall Q$

preimage, סימטרי על

$\ker \pi = 0$ אם כך

מ.ש.ל.

משפט (1956) Kurzweil

$\dot{x} = f(x)$, $f \in C$, $x \in \mathbb{R}^n$

$f(x_0) = 0$

יציבות אסימפטוטית גלובלית / מקומית $\Longleftrightarrow$ $\exists$ פונקציית Lyapunov $V \in C^\infty$

(אם $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(x) \cdot f(x) = -W(x)$)

מסקנה הפוך משפט Lyapunov

$\dot{x} = f(x) = Ax + o(\|x\|)$ $(x_0 = 0)$

$\mathrm{Spec}\, A \subset \mathbb{C}_-$ $\Leftarrow$ יציבות אסי׳ מקומית