אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים

יסודות האנליזה המודרנית 2   0366-4822-01, סמ' ב', מועד ב', תשס"ח
30.10.2008
המורה: דר' א. לבנט

משך הבחינה: 3 שעות
חומר מותר לשימוש: שני דפים A4 אישיים הממולאים בכתב יד משני הצדדים.
יש לענות על 4 שאלות בלבד ולציין את מספרי השאלות במחברת.
כל שאלה שווה ל-25 נקודות.

.1

א. (20 נק') לנסח את למה של צורן ולהוכיח שלכל מרחב ליניארי יש בסיס המל.

ב. (5 נק') להוכיח שאם S,T אופרטורים ליניאריים ממרחבים ליניאריים נורמיים למרחבים ליניאריים נורמיים, $X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z$, אז $(ST)^* = T^*S^*$.

2. להוכיח משפט (למה) בנך.נתון: X הוא מרחב ליניארי ממשי, p הוא פונקציונל ממשי עם התכונות $\forall x,y \in X$ $p(x+y) \le p(x) + p(y)$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $\forall \lambda \ge 0$.גם נתון ש-Y הוא תת-מרחב, f הוא פונקציונל ליניארי ממשי, $f : Y \to \mathbf{R}$, $f(y) \le p(y)$ $\forall y \in Y$. להוכיח שקיים פונקציונל הרחבה F של f לכל X, אשר מקיים $F|_Y = f$ וגם $F(x) \le p(x)$ $\forall x \in X$.

.3

א. (20 נק') X, Y הם מרחבים ליניאריים נורמיים. להוכיח שההעתקה $T \mapsto T^*$ היא איזומורפיזם איזומטרי מ$B(X,Y)$ לתוך $B(Y^*, X^*)$ (איזומורפיזם לתמונת העתקה).

ב. (5 נק') להוכיח שאם X הוא מרחב ליניארי נורמי ו-I הוא אופרטור יחידה, $I \in B(X)$, אז $I^* \in B(X^*)$ גם הוא אופרטור יחידה.

4. נתון ש-T אופרטור קומפקטי, אשר פועל במרחב בנך X. להוכיח שקבוצת מספרים $\lambda \in \mathbf{C}$, שעבורם יש פתרון לא טריביאלי למשוואה $x - \lambda Tx = 0$, היא קבוצת בת מנייה בלי נקודות צפיפות סופיות או קבוצה סופית.

.5

א. (17 נק') להוכיח שאם T הוא איזומורפיזם איזומטרי בין שני מרחבי הלברט (מרוכבים), אז T שומר גם על המכפלה הסקלרית.

ב. (8 נק') נתון שX מרחב בנך, $A \in B(X)$, $\|A\| < 1$. להוכיח שקיים $(I+A)^{-1}$ והוא סכום של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n$ המתכנס בהחלט ב- $B(X)$.

6. T - אופרטור ליניארי ממרחב ליניארי נורמי למרחב ליניארי נורמי. להוכיח ש-T חסום אם ורק אם הוא מעביר כל סדרה מתכנסת לאפס לקבוצה חסומה.

בהצלחה!