

יסודות האנליזה המודרנית 2 0366-4822-01, סמ' ב', מועד א', תשס"ח
06.08.2008
המורה: דר' א. לבנט

משך הבחינה: 3 שעות
חומר מותר לשימוש: שני דפים A4 אישיים הממלאים בכתב יד משני הצדדים.
יש לענות על 4 שאלות בלבד ולציין את מספרי השאלות במחברת.
כל שאלה שווה ל-25 נקודות.

1. להוכיח משפט בנך-שטיינהאוס. נתון ש- X מרחב בנך, Y מרחב ליניארי נורמי, $\{T_\alpha\}$ משפחת אופרטורים חסומים מ- X ל- Y . ידוע שלכל $x \in X$ הקבוצה $\{T_\alpha x\}$ חסומה. להוכיח שקיים חסם עליון משותף לכל הקבוצה $\{\|T_\alpha\|\}$.
2. א. (12 נק') להוכיח שלכל X ליניארי נורמי השיכון הטבעי שלו ב- X^{**} הוא איזומורפיזם איזומטרי.
ב. (13 נק') להוכיח שאם X בנך, $T, S \in B(X)$ קומפקטי, אז גם TS ו- ST קומפקטיים.
3. א. (19 נק') להוכיח שרציפות וחסומות של אופרטור ליניארי הם מוסגים שקולים.
ב. (6 נק') להוכיח שלכל פונקציה מ- $L^p(0,1)$, $1 \leq p \leq \infty$, לכל n טבעי ישנו פולינום ממעלה n הקרוב ביותר (לא בהכרח יחיד).
4. להוכיח שלכל אופרטור קומפקטי, אשר פועל במרחב הלברט וצמוד לעצמו, יש לפחות ווקטור עצמי אחד.
5. א. (10 נק') להוכיח שלכל סדרה מתכנסת בחולש במרחב ליניארי נורמי יש רק גבול אחד במובן חלש.
ב. (11 נק') להוכיח שאופרטור חסום מעביר סדרה מתכנסת בחולש לסדרה מתכנסת בחולש.
ג. (4 נק') להוכיח שכל אופרטור רציף ממרחב ליניארי נורמי למרחב בעל ממד סופי גם קומפקטי.
6. א. (18 נק') להוכיח שאופרטור אינטגרלי עם גרעין רציף הוא אופרטור קומפקטי:
 $(Af)(x) = \int_0^1 f(y)K(x,y)dy$; $A: L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1)$.
כאן $K(x,y)$ פונקציה רציפה ב- $[0,1] \times [0,1]$.
ב. (7 נק') להוכיח ששתי נורמות שקולות אם ורק אם כל קבוצה חסומה בנורמה אחת חסומה גם בנורמה שנייה.

בהצלחה!