הרצאה 9

$$\sigma^{(r)} \in [-C,C] + [K_m, K_M]\, u(\sigma,\dots,\sigma^{(r-1)}) \qquad K_m > 0$$

[illegible]

$r = 2$ **Twisting controller**

84

$$u_{TW} = -\alpha_1 \operatorname{sign}\sigma - \alpha_2 \operatorname{sign}\dot\sigma, \qquad \alpha_1 > \alpha_2, \quad \alpha_1 - \alpha_2 > C/K_m$$

נסמן

$$\sigma_0 = \sigma, \quad \sigma_1 = \dot\sigma$$

אז ההכלה היא

$$\dot\sigma_0 = \sigma_1$$
$$\dot\sigma_1 \in [-C,C] + [K_m, K_M]\, K_F[u](\sigma_0, \sigma_1)$$

כאשר

$$K_F[-(\alpha_1 \operatorname{sign}\sigma_0 + \alpha_2 \operatorname{sign}\sigma_1)] = \begin{cases} -\alpha_1 \operatorname{sign}\sigma_0 - \alpha_2 \operatorname{sign}\sigma_1, & \sigma_0, \sigma_1 \neq 0 \\ [-\alpha_1, \alpha_1] - \alpha_2 \operatorname{sign}\sigma_1, & \sigma_0 = 0, \sigma_1 \neq 0 \\ -\alpha_1 \operatorname{sign}\sigma_0 + [-\alpha_2, \alpha_2], & \sigma_0 \neq 0, \sigma_1 = 0 \\ [-\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2], & \sigma_0 = \sigma_1 = 0 \end{cases}$$

$$M \odot N = \left\{ m \odot n \;\middle|\; \begin{matrix} m \in M \\ n \in N \end{matrix} \right\}$$ כפ, מינוס

בלבד

$$\alpha + [\beta, \gamma] = [\alpha + \beta, \alpha + \gamma] \qquad \gamma \geq \beta$$

נעשה החלפה/הצבה

$$t \mapsto \varkappa t$$
$$\sigma_0 \mapsto \varkappa^2 \sigma_0 \qquad \varkappa > 0 \text{ כלשהו}$$
$$\sigma_1 \mapsto \varkappa \sigma_1$$

$$\frac{d(\varkappa^2 \sigma_0)}{d(\varkappa t)} = \varkappa \frac{d\sigma_0}{dt} = \varkappa \sigma_1$$

$$\frac{d\varkappa\sigma_1}{d\varkappa t} \left(= \frac{d\sigma_1}{dt} \right) = [-C,C] + [K_m, K_M]\big(-\alpha_1 \operatorname{sign}(\varkappa^2\sigma_0) - \alpha_2 \operatorname{sign}(\varkappa\sigma_1)\big)$$
$$= [-C,C] + [K_m, K_M](-\alpha_1 \operatorname{sign}\sigma_0 - \alpha_2 \operatorname{sign}\sigma_1)$$

(85) Terminal SM control (לפי Levant) דוגמא

$$r=2,\quad u_{TSM} = -\alpha\,\mathrm{sign}\left(\dot\sigma + \beta\lfloor\sigma\rceil^{\frac12}\right)$$

סימון: $\boxed{\lfloor\sigma\rceil^{\rho} = \lceil\sigma\rfloor^{\rho} = |\sigma|^{\rho}\,\mathrm{sign}\,\sigma \qquad \deg\lfloor\sigma\rceil^{\rho} = \rho\deg\sigma}$ אי אפשר לשמש

$$u_{TSM}(\varkappa^2\sigma, \varkappa\dot\sigma) = -\alpha\,\mathrm{sign}\left(\varkappa\dot\sigma + \beta\lfloor\varkappa^2\sigma\rceil^{\frac12}\right) =$$
$$= -\alpha\,\mathrm{sign}\left(\varkappa\left(\dot\sigma + \beta\lfloor\sigma\rceil^{\frac12}\right)\right) = u_{TSM}(\sigma,\dot\sigma)$$

אותו דבר היה נכון גם לגבי Twisting

$$u_{Tw}(\varkappa^2\sigma, \varkappa\dot\sigma) = -\alpha_1\,\mathrm{sign}(\varkappa^2\sigma) - \alpha_2\,\mathrm{sign}(\varkappa\dot\sigma) =$$
$$= u_{Tw}(\sigma,\dot\sigma)$$

~~לכל r כלשהו בקרה~~ $\cancel{u(\sigma,\dot\sigma,\dots,\sigma^{(r-1)})}$ ~~פרק~~

זאת תכונה חשובה מאוד

היא נקראת הומוגניות (אחידות)

Homogeneity

בשפת העוצמות האלה,

נגיד ש- $\sigma_0 = \sigma$ מסדר 2

ו- $\sigma_1 = \dot\sigma$ מסדר 1

גם נגיד מסדר 1 לזמן

כלומר: $\deg\sigma_0 = 2,\ \deg\sigma_1 = 1$

$\deg t = 1$

שים לב: $\deg\sigma_1 = \deg\dot\sigma = 2-1 = \deg\sigma - \deg t$

מקרה כללי $r \in \mathbb{N}$

Weighted Homogeneity Theory

תורת ההומוגניות

נבחר משקלים לכל קואורדינטות ב-$\mathbb{R}^n$

$$\deg x_i = m_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

נגדיר חבורת הטרנספורמציות הליניאריות

$$\forall \varkappa > 0 \quad d_\varkappa x = (\varkappa^{m_1} x_1, \dots, \varkappa^{m_n} x_n)$$

$$d_{\varkappa_1 \varkappa_2} = d_{\varkappa_1} \cdot d_{\varkappa_2}$$

Dilation (Rosier, Kawsky (1986), Bocciotti

הרחבה

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

נקראת הומוגנית משקל weight

דרגה q degree

אם

$$\forall \varkappa > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(d_\varkappa x) = \varkappa^q f(x)$$

דוגמא

$$m_1 = m_2 = 1$$

$$\deg(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 2, \quad \deg\left(x_1^3 + \frac{x_2^5}{x_1^2}\right) = 3$$

$$(\varkappa x_1)^3 + \frac{(\varkappa x_2)^5}{(\varkappa x_1)^2} = \varkappa^3\left(x_1^3 + \frac{x_2^5}{x_1^2}\right)$$

$$m_1 = 3, \ m_2 = 1$$

$$\deg(x_1 + x_2^3) = 3 \qquad \varkappa^3 x_1 + (\varkappa x_2)^3 = \varkappa^3 (x_1 + x_2^3)$$

הכללה, דיפרנציאלי — מערכת הומוגנית?

קודם הצגה

$$(t, x) \mapsto (\varkappa^{-q} t, d_\varkappa x)$$

87 נניח ההכלה היא $\dot x \in F(x) \subset T_x\mathbb{R}^n$

אז

$$\frac{d(d_\varkappa x)}{d\,\varkappa^{-q}t} = \varkappa^q d_\varkappa \dot x \in \varkappa^q d_\varkappa F(x)$$

הגדרה ההכלה נקראת הומוגנית

מדרגה q (~~$\deg$~~) Homogeneity degree

$$\boxed{\forall \varkappa>0\ \forall x\in\mathbb{R}\quad \varkappa^q d_\varkappa F(x) = F(d_\varkappa x)}$$ אם

זאת אומרת שההעתקה

$y = d_\varkappa x$

$\hat t = \varkappa^{-q} t$

מעבירה את $\dot x \in F(x)$

להכלה $\dfrac{d}{d\hat t} y \in F(y)$

אז אמרנו: $x_*(t)$ הוא פתרון של $\dot x_* \in F(x_*)$

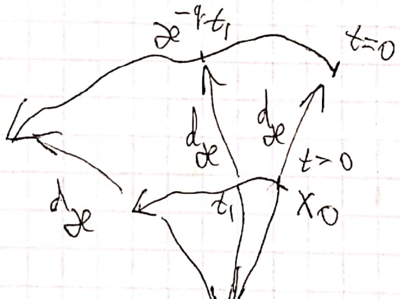
עם תנאי התחלה $x_*(0) = x_0$

$\Leftrightarrow$

$x_{**}(t) = d_\varkappa x_*(\varkappa^{-q}t)$ הוא פתרון של אותה הכלה,

עם תנאי התחלה $x_{**}(0) = d_\varkappa x_0$

$\forall \varkappa>0$ | (כל)



אפשר לומר,

אז כי

$\deg t = -q \in \mathbb{R}$

$r=2$ Twisting controller

כזכור

$$\ddot\sigma \in [-C,C] + [K_m,K_M](-\alpha_1 \mathrm{sign}\,\sigma - \alpha_2 \mathrm{sign}\,\dot\sigma)$$

$\sigma_0 = \sigma,\ \sigma_1 = \dot\sigma$

$\dot\sigma_0 = \sigma_1$

יותר מסודר!

$$\ddot\sigma = \ddot\sigma_0 = \dot\sigma_1 \in [-C,C] + [K_m,K_M]\,K_T(\sigma_1,\sigma_2),\quad K_T(\sigma_1,\sigma_2) = \begin{cases} -\alpha_1 \mathrm{sign}\,\sigma_1 - \alpha_2 \mathrm{sign}\,\sigma_2 & \sigma_1\sigma_2 \neq 0 \\ \ldots \end{cases}$$

(88)

משוואה דיפרנציאלית $\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \in T_x\mathbb{R}^n$

נקראת הומוגנית משקלה q

Kawski ~1986

$$\deg \dot{x}_i = \deg f_i + q \overset{\text{אם}}{=} \deg x_i - \deg t$$

כל מקרה פרטי של הגדרה הכללית
של הגדרה להכללה דיפרנציאלית — Levant 2005

אי-שוויון דיפרנציאלי הומוגני שקול
להכללה דיפרנציאלית הומוגנית

<u>דוגמא</u>

שוב $\deg t = -1,\ \deg x_1 = 2,\ \deg x_2 = 3$

$$\deg \dot{x}_1 = 2+1 = 3,\quad \deg \dot{x}_2 = 3+1 = 4$$

$$\dot{x}_1^4 + \dot{x}_2^3 \le x_1^3 x_2^2 - x_2^4$$

$3 \cdot 4 = 12 \qquad 4 \cdot 3 = 12 \qquad 2 \times 3 + 3 \times 2 = 12 \qquad 3 \cdot 4 = 12$

שקול

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \in \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; z_1^4 + z_2^3 \le x_1^3 x_2^2 - x_2^4 \right\}$$

לא [illegible]

<u>מקרה כללי</u>

$$f_1(\dot{x}) \le f_2(x),\quad f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Updownarrow$$

$$\dot{x} \in \{ z \in \mathbb{R}^n \mid f_1(z) \le f_2(x) \} = F(x)$$

בצורה סתומה,

$$f_1(\dot{x}, x) \le f_2(\dot{x}, x)$$
$$\tilde{f}_1(\dot{x}, x) \le \tilde{f}_2(\dot{x}, x)$$

$$\dot{x} \in F(x) = \left\{ z \;\middle|\; \begin{matrix} f_1(z,x) \le f_2(z,x) \\ \tilde{f}_1(z,x) \le \tilde{f}_2(z,x) \end{matrix} \right\}$$

בדרך כלל
לא הכללה
Filippov

דוגמא מערכת LTI הומוגנית

$$\dot x = Ax \qquad \deg x_i = 1,\ i = 1,\dots,n$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad q = 0,\ \deg t = -q = 0$$

דוגמא

$$\deg x_1 = 2,\ \deg x_2 = 3,\ \deg t = 0$$

$$\begin{cases} \dot x_1 = [x_2]^{\frac{2}{3}} - x_1 \\ \dot x_2 = \begin{cases} x_1^3/x_2, & x_2 \neq 0 \\ 0, & x_2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

בכלל
לא ליניארי
גם מוגדרת Filippov
לא רציפה כלל

$\deg t = -q \cdot e$ נראה כאות למרות
מציע תכונות חשובות של הגדלה/משוואה

~~איך מוצאים הומוגניות~~

דוגמא

$x \in \mathbb{R}$ $\qquad \dot x = x^3$

האם הומוגני? $\deg x - \deg t = 3\deg x$

$$\frac{d\,\varkappa^{\deg x} x}{d\,\varkappa^{\deg t} t} = \left(\varkappa^{\deg x} x\right)^3$$

$\varkappa > 0$ גורם 3
לכל צמ3ים

~~לכן~~

$$\boxed{2\deg x = -\deg t}$$

$(\deg x > 0!)$ לכן: $\deg x = \frac{1}{2}$, $\deg t = -1$

או $\deg t = -2$, $\deg x = 1$ – נבחר

אך HD של השדה הווקטורי x^3 של המשוואה $\dot x = x^3$
הוא -2

באותו זמן $\deg x^3 = 3$, כ-x^3 - פונקציה

פה אנו רואים את ההבדל בין
HD של שד. וקטורי של פונקציה

(90)

<u>דוגמא</u>

$x \in \mathbb{R}$, $\dot{x} = -\operatorname{sign} x$,

$\deg x - \deg t = 0$

$\operatorname{sign}(\varkappa^{\deg x} x) = \operatorname{sign} x$

המשוואה הזו מתאימה להכלה Filippov

$$\dot{x} \in \begin{cases} \{-\operatorname{sign} x\}, & x \neq 0 \\ [-1,1], & x = 0 \end{cases}$$

$\deg x = 1$

$\deg t = 1$

$F(\varkappa x) \equiv \varkappa^{1-1} F(x)$

$F(\varkappa x) \equiv F(x)$, אין כאן ב $x=0$,

גם היא הומוגנית

גם

$$\dot{x} \in \begin{cases} \{-\operatorname{sign} x\}, & x \neq 0 \\ [-2,3], & x = 0 \end{cases}$$

הומוגנית

וגם הכלה Filippov קיימת פתרונות!

גם

$$\dot{x} \in \begin{cases} \{-\operatorname{sign} x\}, & x \neq 0 \\ [-1,-0.5], & x = 0 \end{cases}$$

הומוגנית

אבל לא הכלה Filippov

ואין פתרון ל- $x(0) = 0$

$$\dot{x} \in \begin{cases} \{-\operatorname{sign} x\}, & x \neq 0 \\ \{0\}, & x = 0 \end{cases}$$

יש אותם פתרונות כמו ל $\dot{x} = -\operatorname{sign} x$ (Filippov)

היא לא הכלה Filippov

<u>הומוגנית</u>

$$\dot{x} \in \begin{cases} \{\operatorname{sign} x\} & x \neq 0 \\ \{0\} & x = 0 \end{cases}$$

יש פתרונות לכל $x(0)$

אבל היא לא שקולה ל- $\dot{x} = \operatorname{sign} x$

כי יש לה פתרון יחיד ל $x(0)=0$ במובן Filippov

הארגמליקה ההומוגנית

$$A, B : R^n \to R \ , \ \alpha, \beta \in R$$ (91)

1. $\deg(A+B) = \deg A = \deg B$
2. $\deg \alpha \cancel{A} = \deg A \ , \quad \alpha \neq 0$
3. $\deg 0$ — כל מספר ממשי! , $\deg \alpha = 0$, $\alpha \neq 0$
4. $\deg AB = \deg A + \deg B$

   $\deg A/B = \deg A - \deg B$
5. $\deg A^\alpha = \deg [A]^\alpha = \deg A \cdot \alpha$

   גדול

   $\deg A^0 = \deg [A]^0 = 0$

   $[A]^0 \overset{\text{def}}{=} 1 \cdot \operatorname{sign} A = \operatorname{sign} A$
6. $\deg \frac{\partial A}{\partial x_i} = \deg A - \deg x_i$

הוכחת 4!

$$\frac{A(d_\varkappa x)}{B(d_\varkappa x)} = \frac{\varkappa^{\deg A} A(x)}{\varkappa^{\deg B} B(x)}$$

הוכחת 6!

$\deg x_i = m_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, m$

$$\frac{\partial A}{\partial x_i}(d_\varkappa x) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{1}{\varkappa^{m_i} \Delta x_i}\left(A(\ldots, \varkappa^{m_i} x_i + \varkappa^{m_i} \Delta x_i, \ldots) - A(d_\varkappa x)\right)$$

$$= \frac{\varkappa^{\deg A}}{\varkappa^{m_i}} \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\left(A(\ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots) - A(x)\right)}{\Delta x_i}$$

$$= \varkappa^{\deg A - m_i} \frac{\partial A}{\partial x_i}(x)$$

(92)

7. $\deg \dot{A} = \deg A - \deg t = \deg A + q$

דוגמה מקרה ראשון | קלסי!

$\dot{x} = f(x)$, | $\dot{x}_i = f_i(x)$, $\deg x_i - \deg t = \deg f_i$

$m_i + q = \deg f_i$

$$\deg \dot{A} = \deg \sum_i \frac{\partial A}{\partial x_i} f_i = \qquad \text{אז}$$

$$= \deg \frac{\partial A}{\partial x_i} + \deg f_i = \deg A - m_i + m_i + q, \quad i = 1, \dots, n$$

מקרה כללי: $\dot{x} \in F(x) \subset T_x \mathbb{R}^n$, $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

$$\dot{A}(x) = \left\{ \frac{\partial A}{\partial x} \dot{x} \right\}_{\dot{x} \in F} = \frac{\partial A}{\partial x}(x) \cdot F(x) \subset \mathbb{R}^k$$

$$\dot{A}: \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^k} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} dA_1(x,z) \\ \vdots \\ dA_k(x,z) \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in F(x) \right\}$$

$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \end{pmatrix}$, $A_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\deg A_j = \deg A$

הגדרה הגדרה הומוגניות של הכלה

(לא פיזיקלית)

נאמר $G: \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^k}$, $G(d_\varkappa x) = \varkappa^{\deg G} G(x)$

$$\dot{A}(d_\varkappa x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial A_1}{\partial x_n} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial A_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial A_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}\Bigg|_{d_\varkappa x} \cdot F(d_\varkappa x) =$$

$$= \begin{pmatrix} \varkappa^{\deg A - m_1} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} & \cdots & \varkappa^{\deg A - m_n} \frac{\partial A_1}{\partial x_n} \\ & & \\ \varkappa^{\deg A - m_1} \frac{\partial A_k}{\partial x_1} & \cdots & \varkappa^{\deg A - m_n} \frac{\partial A_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varkappa^{m_1 + q} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varkappa^{m_n + q} \end{pmatrix} F(x) =$$

$$= \frac{\partial A}{\partial x}(x) \begin{pmatrix} \varkappa^{\deg A - m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varkappa^{\deg A - m_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varkappa^{m_1 + q} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varkappa^{m_n + q} \end{pmatrix} F(x) = \varkappa^{\deg A + q} \dot{A}(x)$$

שוויון.

נורמה הומוגנית

פונקציה $\varphi(x)$, $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, נקראת נורמה הומוגנית אם

1. $\varphi \in C$, 2. $\varphi(x) \geq 0$, $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Positive definite

3. $\deg \varphi = 1$, מסמנים $\|\cdot\|_h$

דוגמא

$$\deg x_1 = \dots = \deg x_n = 1$$

$$\|x\|_{h2} = \left(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ נורמה הומוגנית

$$\|x\|_{h\infty} = \max |x_i|$$

הומוגניות שקולה: $\deg x_i = m \neq 1$

$$\Leftarrow \deg\left(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = m$$

כן כבר לא נורמה הומוגנית!

$$\|x\|_{h\gamma} = \left(|x_1|^{\frac{\gamma}{m_1}} + \dots + |x_n|^{\frac{\gamma}{m_n}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$ נורמה הומוגנית

$$\|x\|_{h\infty} = \max_i |x_i|^{\frac{1}{m_i}}$$

הן לא נורמות אחידות!

טענה: כל נורמות הומוגניות שקולות

φ_1, φ_2 - נורמות $\Leftarrow$ $\exists\, \gamma_m, \gamma_M > 0$

$$\forall x \quad \gamma_m \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \gamma_M \varphi_1(x)$$

הוכחה: $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ נגדיר $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ רציפה, בספירה

$S_1 = \{\|x\| = 1\}$ (קומפקט) $\Rightarrow \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big|_{S_1} \subset [\gamma_m, \gamma_M]$ ל- γ_m, γ_M מסוים

$\deg \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = 0$

מ.ש.ל,

94

טענה: נניח $\|\cdot\|_h$ נורמה הומוגנית

$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ הומוגנית ורציפה
בכל נקודה חוץ מ-0.

אזי קיימת $\gamma>0$ כך ש

$$\forall x\in\mathbb{R}^n \qquad |\varphi(x)| \le \gamma \|x\|_h^{\deg\varphi}$$

__הוכחה:__

$$\deg \frac{\varphi(x)}{\|x\|_h^{\deg\varphi}} = \deg\varphi - \deg\varphi = 0$$

לכן $\varphi/\|\cdot\|_h$ מקבלת אותם ערכים
בכל $d_x S_1$ וחסומה ב-S_1 מרציפות

$$\left.\frac{\varphi(x)}{\|x\|_h^{\deg\varphi}}\right|_{\mathbb{R}^n} = \left.\frac{\varphi(x)}{\|x\|_h^{\deg\varphi}}\right|_{x\in S_1} \in [-\gamma,\gamma]$$

מ.ש.ל.

בשביל מה אנו צריכים כל זה?

עוד מעט נוכיח — homogeneous Filippov DI $\dot{x}\in F(x)$, $\deg t=-q$

א. יציבות אס' לוקלית $\Leftrightarrow$ יציבות אס' גלובלית

ב. $\deg t>0 \Rightarrow$ התכנסות תוך זמן סופי
FT stability (יציבות)

ג. $\deg t=0 \Rightarrow$ יציבות אקספוננציאלית
exponential stability

ד. $\deg t<0 \Rightarrow$ התכנסות תוך זמן T זהה לכל כיוון $\|x\|\le 1$
Fixed Time convergence
התכנסות איטית מאקספוננציאלית

ניתן גם להעריך את הדיוק בנוכחות רעשים וספיות