8 בדצמ׳

(7.5) ~~...~~ ניתוח:

כי המערכת decoupled

נפרק כל בקרה ~~...~~

$$u = u_{eq} + u - u_{eq}$$

$$\dot z + \alpha z = \alpha u = \alpha u_{eq} + \alpha(u - u_{eq})$$

$$(z - u_{eq})^{\cdot} + \alpha(z - u_{eq}) = -\dot u_{eq} + \alpha(u - u_{eq})$$

נסמן $w = z - u_{eq}$ ונקבל ש

$$\dot w + \alpha w = -\dot u_{eq} + \alpha(u - u_{eq})$$

$$w(t) = e^{-\alpha t} w(0) + w_a(t) + w_b(t)$$

פתרון המשוואה ההומוגנית — פרטי — פרטי

$\|w_b\| \le \sqrt{\alpha^2 U_M^2 m} = \alpha U_M \sqrt{m}$

$$\dot w_a + \alpha w_a = -\dot u_{eq}(t), \quad w_a(0) = 0$$

$$|\dot u_{eq}| \le L$$

$$\Rightarrow |w_{ai}| \le \frac{L}{\alpha}, \quad \|w_a\| \le \sqrt{\underbrace{\left(\frac{L}{\alpha}\right)^2 + \dots + \left(\frac{L}{\alpha}\right)^2}_{m}} \le \sqrt{m}\,\frac{L}{\alpha}$$

מכל רכיב

$$\dot w_b + \alpha w_b = \alpha(u(t) - u_{eq}(t)), \quad w_b(0) = 0$$

$$w_b(t) = \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \underbrace{(u(s) - u_{eq}(s))}_{=} ds =$$

$$= \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} g^{-1}(s) \sigma^{(r)}(s)\, ds =$$

לפי חלקים

$$= \alpha e^{-\alpha t} \left[e^{\alpha s} g^{-1}(s) \sigma^{(r-1)}(s) \right]\Big|_0^t$$

$$- \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{\alpha s} g^{-1}(s)\right) \sigma^{(r-1)}(s)\, ds$$

$$= \alpha\left(g^{-1}(t)\sigma^{(r-1)}(t) - e^{-\alpha t} g^{-1}(0)\sigma^{(r-1)}(0)\right)$$

$$- \alpha^2 e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} g^{-1}(s) \sigma^{(r-1)}(s)\, ds$$

$$+ \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} g^{-1}(s) \dot g(s) g^{-1}(s) \sigma^{(r-1)}(s)\, ds$$

פד

הנוסחה נכונה גם למקרה וקטורי

$$gg^{-1} = I \Rightarrow \dot{g}g^{-1} + g(g^{-1})' = I$$

$$(g^{-1})^{\cdot} = -g^{-1}\dot{g}g^{-1}$$

$$t \to \infty$$

מקבלים

$$\|w_\beta\| \le \alpha C\varepsilon + \underbrace{e^{-\alpha t}C\varepsilon}_{\to 0} +$$

$$+ \underbrace{\alpha C\varepsilon e^{-\alpha t} e^{\alpha s}\Big|_0^t}_{\text{אינטגרל חיובי}} + \underbrace{\varepsilon C^2 D e^{-\alpha t} e^{\alpha s}\Big|_0^t}_{\text{אינטגרל חיובי}}$$

$$= 2C\alpha\varepsilon + e^{-\alpha t}C\varepsilon - \alpha C\varepsilon e^{-\alpha t} + C^2 D\varepsilon - C^2 D\varepsilon e^{-\alpha t}$$

נצרך

$\to 0$ יחד 0

$$\Rightarrow \|w\| \le e^{-\alpha t}\|w(0)\| + \sqrt{m}\frac{L}{\alpha} + C^2 D\varepsilon + 2C\alpha\varepsilon + e^{-\alpha t}C\varepsilon$$

$\|w\| \le \|w_{hom.}\| + \|w_\alpha\| + \|w_\beta\|$ $\qquad \|w(0)\| \le 2\sqrt{m}V_M$

במקרה וקטורי

$$\|w\| \le e^{-\alpha t}(2\sqrt{m}V_M + C\varepsilon) + \sqrt{m}\frac{L}{\alpha} + C^2 D\varepsilon + 2C\alpha\varepsilon$$

מושלם

נדרש:

$$\alpha\varepsilon \ll 1 \quad \frac{L}{\alpha} \ll 1 \quad \varepsilon \ll 1$$

⇐ ~~צריך להיות~~ למשל אפשר לקחת

$$\alpha = k\sqrt{\varepsilon^{-1}} = k\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \gg 1, \quad \alpha\varepsilon = k\varepsilon^{\frac{1}{2}} \ll 1$$

צריך לקבוע L, ε בשילוב כך

לקבוע ε: זאת בעיה

77 אפשר לחשב ממוצע $\underset{t}{\text{בערך}}$ אמת

$$Z_\varepsilon = \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} u(s)\,ds$$

אינטגרציה
בחלקים

$$Z_\tau(t) = \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}\left[u(s)-u_{eq}(s)+u_{eq}(s)\right]ds = $$

$$\int \underbrace{(u_{eq}(t)-u_{eq}(s))}_{\dot u_{eq}(\xi)(t-s)} ds$$

Lagrange

$$\int_{t-\tau}^{t} u_{eq}(s) = \tau u_{eq}(s) + L\,O(\tau)\cdot\tau$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} g^{-1}(s)\,\sigma^{(r)}(s)\,ds + L\,O(\tau) + u_{eq}(t)$$

$$\|Z_\tau(t)-u_{eq}(t)\| \le \frac{1}{\tau}\left\|\int_{t-\tau}^{t} g^{-1}(s)\,\sigma^{(r)}ds\right\| + L\tau$$

בהנחה $\|g^{-1}\|\le C$

$$\le \left\|\frac{1}{\tau}g^{-1}(s)\,\sigma^{(r-1)}(s)\Big|_{t-\tau}^{t} + \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}\left(g^{-1}(s)\right)'\sigma^{(r-1)}(s)\,ds\right\| + L\tau$$

$$\left(g^{-1}(s)\right)' = g^{-1}(s)\,g'(s)\,g^{-1}(s)$$

$$\boxed{\le C\frac{\varepsilon}{\tau} + C^2 D\frac{\varepsilon}{\tau} + L\tau}$$

דיוק של מסדר

נבחר $\frac{\varepsilon}{\tau},\ \varepsilon \to 0$

$\tau = k\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ מתאים

SISO HOSM control

Single-input single-output High-order SM control

$x \in \mathbb{R}^n$ $\quad x^{(n)} = a(t,x) + b(t,x)u,\quad \sigma: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$u \in \mathbb{R}$ רצוים:

$a, b, \sigma \in C^\infty$ $\quad \sigma(t,x) = 0$

rel. degree $r \in \mathbb{N}$

מספיק
$a, b, \sigma \in C^r$

$\sigma^{(r)} = h(t,x) + g(t,x)u,\quad g(t,x) \neq 0$

לא שאפס

אם לא אי אפשר למדוד e

$\sigma, \dot\sigma, \ldots, \sigma^{(r-1)}$ — קוראים לזה

הנחות:

$\sigma^{(r)} = h(t,x) + g(t,x)u$, $\sigma, u \in R$

$|h| \le C$, $0 < K_m \le g \le K_M$

מספיק לנו h, g מדידות לפי Lebesgue

אז כל פתרון מקיים את ההכלה, פיליפוב

$\sigma^{(r)} \in [-C,C] + [K_m, K_M]u$, $u = u(\sigma, \dot\sigma, \dots, \sigma^{(r-1)})$

הקואורדינטות לא בהכרח קשורות ל t, x

$\sigma, \dot\sigma, \ddot\sigma, \dots, \sigma^{(r-1)}$ הם

פרק אחרת:

$y_0 = \sigma, y_1 = \dot\sigma, \dots, y_{r-1} = \sigma^{(r-1)}$

$\dot y_0 = y_1, \dots, \dot y_{r-2} = y_{r-1}$ סקף y

$\dot y_{r-1} \in [-C,C] + [K_m, K_M]K_F[u](\sigma, \dots, \sigma^{(r-1)})$

הפתרון $\sigma \equiv 0$ הוא ב r-SM

1, מתקיים $\sigma, \dot\sigma, \dots, \sigma^{(r-1)}$ רציפות

$$(\nabla\sigma, \nabla\dot\sigma, \dots, \nabla\sigma^{(r-1)})^T = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \nabla\sigma \\ \\ \nabla\sigma^{(r-1)} \end{array}$$

2, רגולרי - $L_r = \{\sigma = \dot\sigma = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0\}$

3, קיום תנועה ב L_r

$\Leftrightarrow$ יש פתרון $\sigma \equiv 0$ $\Leftrightarrow$ $0 \in [-C,C] + [K_m, K_M]K_F[u](0)$

לפיכך הפתרון $(\sigma, \dot\sigma, \dots, \sigma^{(r-1)}) = \vec\sigma = 0$

הוא פתרון מרשי לכל $g(t), h(t)$

דוגמא: $u = -\frac{C+\varepsilon}{K_m}\operatorname{sign}\sigma$, $\varepsilon > 0$ כלשהו

$$\Rightarrow [-\varepsilon, \varepsilon] \subset [-C,C] + [K_m, K_M]\,K_F[u](0)$$

$$K_F[u](0) = \frac{1}{K_m}[-(C+\varepsilon), C+\varepsilon]$$

דוגמא!: $c>0$, $g(t), h(t)$ רציפים ⇐ u לא רציף:

נניח u רציף ⇐

$$0=\sigma^{(r)} \in h(t)+g(t)u(0)$$

יהי $g=K_m$, $h=\begin{cases} c & c\neq -K_m g(0) \\ -c & \text{אחרת} \end{cases}$

⇐ $\sigma\equiv 0$ לא יכול להיות.

$$u=\alpha\, \mathrm{sign}\, \sigma$$

יש r-SM ... לא יציב.

אבל מנגנון הכרחי לא יציב

משפט (Anosov, 1958)

$$\ddot\sigma+\beta\dot\sigma+\alpha\, \mathrm{sign}\, \sigma=0 \quad AS \iff \alpha>0,\ \beta>0$$

$$\sigma^{(r)}+\beta_1\sigma^{(r-1)}+\dots+\beta_{r-2}\dot\sigma+\alpha\, \mathrm{sign}\, \sigma=0, \quad r>2$$

לא יציב לכל $\alpha\neq 0$

$\in[-C,C]$, $K_m, K_M=1$

בקר רציף $u=V_r(\vec\sigma)$ שמבטיח $\vec\sigma\to 0$ בזמן סופי.

1. $r=1$ $\quad \dot\sigma\in[-C,C]+[K_m,K_M]u$

relay control $\quad u=-\alpha\, \mathrm{sign}\, \sigma, \quad \alpha>\frac{C}{K_m}$

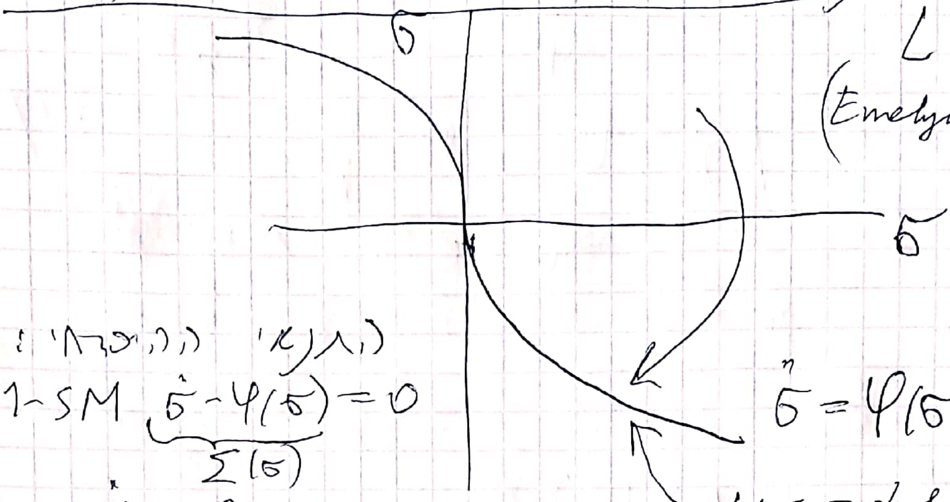
2. $r=2$ Twisting controller (Levant 1985)

$$u=-\alpha_1\, \mathrm{sign}\, \sigma-\alpha_2\, \mathrm{sign}\, \dot\sigma, \quad \alpha_1>\alpha_2>0$$

תנאים!:

$$\begin{cases} K_m(\alpha_1+\alpha_2)-C>K_M(\alpha_1-\alpha_2)+C \\ K_m(\alpha_1-\alpha_2)-C>0, \quad \alpha_1>\alpha_2>0 \end{cases}$$

ג) התכנסות עלפי המשוואה הנומינלית



Levant 1986
(Emelyanov, Korovin, Levantovski 1986)
Levant 1993

התנאי ההכרחי:

1-SM $\underbrace{\dot\sigma-\varphi(\sigma)}_{\Sigma(\sigma)}=0$

$\dot\sigma=\varphi(\sigma)$ FTS ODE

$u=-\alpha\,\mathrm{sign}[\dot\sigma-\varphi(\sigma)]$

$\Sigma\dot\Sigma\le 0$ מצערה slide

$\Sigma=0$ בסביבת

$$\dot\Sigma\Big|_{\Sigma=0}=\ddot\sigma-\varphi'(\sigma)\dot\sigma=\ddot\sigma-\varphi'(\sigma)\varphi(\sigma)$$

$$\ddot\sigma\in[-C,C]+\alpha[K_m,K_M]\,\mathrm{sign}(\dot\sigma-\varphi(\sigma))$$

התנאי:

$$\alpha K_m-C>|\varphi'(\sigma)\cdot\varphi(\sigma)|$$

מקרה נפוץ: $\varphi(\sigma)=-\beta|\sigma|^{\rho}\mathrm{sign}\,\sigma$

$u=-\alpha\,\mathrm{sign}(\dot\sigma+\beta|\sigma|^{\rho}\mathrm{sign}\,\sigma)$, $0<\rho<1$

$$\alpha K_m-C>\beta\rho\,\cancel{|\sigma|^{\rho-1}}\,|\sigma|^{\rho}=\beta\rho|\sigma|^{2\rho-1}\Rightarrow\rho\ge\tfrac{1}{2}$$

המקרה הכי נוח: $\rho=\frac{1}{2}$

$$\boxed{\alpha K_m-C>\tfrac{1}{2}\beta}$$

3) פה הפתרון בכך שהמשוואה

$$\dot\sigma+\beta|\sigma|^{\rho}\mathrm{sign}\,\sigma=0$$

יציבה (אסימפטוטית) ובזמן סופי

מוגדר
לכל $0<\rho<1$ (מפריעים מאוזנים...)

81 Terminal SM control (1994) .3

Mann, 1994

$\varphi(t) = -\beta|\sigma|^{\rho}\,\mathrm{sign}\,\sigma$

במקור $\rho = \frac{p}{q}$ ש, $p,q \in \mathbb{N}$ אי זוגיים, $\varphi = -\beta\sigma^{\rho}$

לוקחים ע"י $\Sigma = \ddot\sigma + \beta|\sigma|^{\rho}\,\mathrm{sign}\,\sigma \to 0$, $u = -\alpha\,\mathrm{sign}\,\Sigma$

מציבים $V = \Sigma^2$

מקבלים שצריך שלכל $\sigma, \dot\sigma$

$$\Sigma\dot\Sigma = \left(\ddot\sigma + \beta\rho|\sigma|^{\rho-1}\dot\sigma\right)\dot\sigma$$

מוגדר שלילי

$$-\alpha K_m - C + \beta\rho|\sigma|^{\rho-1}\dot\sigma < 0 \quad \Sigma > 0$$
$$> 0 \quad \Sigma < 0$$

$\alpha > \frac{C}{K_m}$, $\alpha = \alpha(\sigma,\dot\sigma) > \frac{C}{K_m} + \frac{1}{K_m}\beta\rho\underbrace{|\sigma|^{\rho-1}\dot\sigma}$

!! $\sigma = \dot\sigma = 0$ לא חסום בסביבת $\frac{\dot\sigma}{|\sigma|^{1-\rho}}$

כשגוזרים צריך ש $\left(|\sigma|^{\rho}\,\mathrm{sign}\,\sigma\right)^{\cdot} = \rho|\sigma|^{\rho-1}\,\mathrm{sign}\,\sigma\cdot\dot\sigma\cdot\mathrm{sign}\,\sigma$

$= \rho|\sigma|^{\rho-1}\dot\sigma$

Nonsingular terminal SMC (Man, Yu, 2005)

$\rho = \frac{p}{q}$, $0 < p < q$ אי זוגיים

$$u = -\alpha(\sigma,\dot\sigma)\left(\dot\sigma^{\frac{q}{p}} + \beta\sigma\right)$$

בפשטות אפשר לקחת $\alpha = const$

$$\cancel{\Sigma = \dot\sigma^{q} + \beta\sigma^{p}}$$

$$\cancel{\dot\Sigma = q\dot\sigma^{q-1}\ddot\sigma + \beta p\sigma^{p-1}\dot\sigma}$$

הוכחה:

$$\boxed{\begin{aligned} &|\dot\sigma|^{\frac{1}{\rho}}\,\mathrm{sign}\,\dot\sigma + \beta\sigma > 0 \\ \Leftrightarrow\ &\dot\sigma + \beta|\sigma|^{\rho}\,\mathrm{sign}\,\sigma > 0 \end{aligned}}$$

$$u = -\alpha\,\mathrm{sign}\underbrace{\left(|\dot\sigma|^{\frac{1}{\rho}}\,\mathrm{sign}\,\dot\sigma + \beta\sigma\right)}_{\Sigma} \qquad \frac{1}{2} \le \rho < 1$$

$$\dot\Sigma = \frac{1}{\rho}|\dot\sigma|^{\frac{1}{\rho}-1}\ddot\sigma + \beta\dot\sigma \qquad \ddot\sigma \sim K_m\alpha - C > \rho|\dot\sigma|^{2-\frac{1}{\rho}}$$

חסום בסביבת 0!

$$\cancel{\left(\frac{1}{\rho}|\dot\sigma|^{\frac{1}{\rho}-2}\ddot\sigma + \beta\right)\dot\sigma}$$

מקרה $r=1$ לא רוצים chattering!

$$\dot{\sigma} = h(t,x) + g(t,x)u \qquad |\dot h| \le \dot h_M$$

$$u = u_1 + u_2 \qquad |u| \le U_M \Rightarrow \qquad |\dot g| \le \dot g_M$$

$$\dot u_1 = \begin{cases} -u, & |u| > U_M \\ -\alpha\,\mathrm{sign}\,\sigma, & |u| \le U_M \end{cases} \qquad \Rightarrow \dot u_{eq} = -\frac{\dot h g - \dot g h}{g^2} \text{ חסום}$$

$$U_M > |u_{eq}| \le \frac{C}{K_m}$$

$$u_2 = -\beta \sigma^{\rho}\,\mathrm{sign}\,\sigma$$

~~בהתחלה~~ מזמן מסויים מקיים $|u| \le U_M$ תמיד

כי כאשר $|u| > U_M$ מקטינים

$$\dot u = \dot u_1 + \dot u_2 = -u - \beta\rho|\sigma|^{\rho}\dot\sigma =$$

$$= -u - \beta\rho|\sigma|^{\rho} g(u - u_{eq}), \quad \mathrm{sign}\, u = \mathrm{sign}(u - u_{eq})$$

$$\Rightarrow \cancel{\ddot\sigma \in [-\dot h_M, \dot g_M]} \quad \boxed{\hat C = \sup_{|u|\le U_M} |h'_t + h'_x(a+bu) + (g'_t + g'_x(a+bu))u|} \quad U_M > |u_{eq}|$$

$\alpha > C/K_m$, $\hat C/K_m$ [illegible]

$$\ddot\sigma \in \hat C[-1,1] + [K_m, K_M](\alpha\,\mathrm{sign}\,\sigma + \beta\rho|\sigma|^{\rho}|\dot\sigma|)$$

$\boxed{\text{Levant } 1993}$

1. $0 < \rho \le \frac{1}{2} \Rightarrow$ ($\forall \beta > 0\ \exists \alpha > 0$: $\sigma, \dot\sigma \to 0$) בזמן סופי גדול מספיק
   FT
   קיים α מינימלי

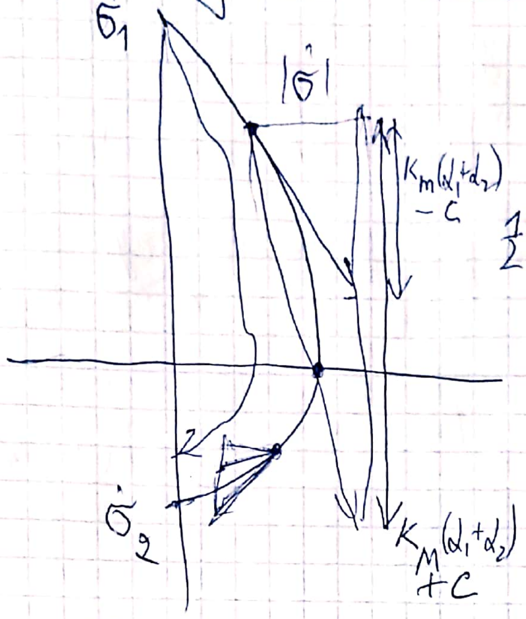
2. $\rho = 1 \Rightarrow u_2 = u$, $\alpha > 0$ גדול מספיק
   $\Rightarrow$ $\sigma, \dot\sigma \to 0$ exponentially

3. $\rho \in (\frac{1}{2}, 1) \Rightarrow$ מתכנס אסימפטוטית

Moreno ~2010

Twisting controller

[illegible]



$$\ddot\sigma = -\alpha$$

$$\dot\sigma\ddot\sigma = -\alpha\dot\sigma$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\dot\sigma^2 = -\alpha\dot\sigma$$

$$\dot\sigma^2 + 2\alpha\sigma = \text{const}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\ddot\sigma \in [-C, C] + [K_m, K_M]u \\ u = -\alpha_1 \operatorname{sign}\sigma - \alpha_2 \operatorname{sign}\dot\sigma \\ \alpha_1 > \alpha_2 > 0\end{gathered}}$$

$$\frac{\dot\sigma_1^2}{2[K_m(\alpha_1+\alpha_2)-C]} = \frac{\dot\sigma_2^2}{2[K_M(\alpha_1-\alpha_2)+C]}$$

[illegible]
הנדסית

$$\left|\frac{\dot\sigma_2}{\dot\sigma_1}\right| = \sqrt{\frac{K_M(\alpha_1-\alpha_2)+C}{K_m(\alpha_1+\alpha_2)-C}} = q < 1$$

תוך זמן סופי

$$T \le \sum T_i \le \sum \frac{|\dot\sigma_i|}{K_m(\alpha_1-\alpha_2)-C} \le \frac{\sigma_0}{K_m(\alpha_1-\alpha_2)-C}\sum_{i=0}^{\infty} q^i < \infty$$

Dynamic Extension — בעיה

הבעיה לשלוט $\sigma^{(r)} = h(t,x)+g(t,x)u$

כאשר בנוסף $\dot x = a(t,x)+b(t,x)u$

סטנדרטי קבועים $|h|\le C$, $g\in[K_m, K_M]$, $K_m>0$

משפט: קיים בקרה $u=U_r(\sigma,\dots,\sigma^{(r-1)})$

ראינו שאם $C>0$ U_r לא רציף ⇐ chattering קשה

הפתרון המוצע: להעלות את ה- rel. degree

$\dot u$ - בקרה חדשה

בודקים

$$\sigma^{(r+1)} = \underbrace{h'_t + h'_x(a+bu) + (g'_t+g'_x(a+bu))u}_{\hat h(t,x,u)} + g\dot u$$

אז פותרים את הבעיה באותה בקרה $u = U_{r+1}(\sigma,\dot\sigma,\dots,\sigma^{(r)})$ כדי להתגבר על הקושי $\hat h$

הבעיה: כי $\hat h$ לא חסום בגלל ש u לא חסום

הפתרון: לחסום u. כי בגלל לא פשוט

פתרון: ל. $r=1$;

$\dot\sigma = h+gu$

$u_{eq}(t,x) = -\frac{h(t,x)}{g(t,x)}$

נבחר $|u_{eq}| \le C/K_m < U_M$

כאשר

$$\dot u = \begin{cases} -u & |u|>U_M \\ U_{r+1}(\sigma,\dot\sigma,\cancel{\dots}), & |u|\le U_M \end{cases}$$

OK $\left. u U_{r+1}\right|_{|u|\ge U_M-\delta} < 0$ ⇐ מבטיח חסימות $|u|\le U_M$ אחרי

לכן $\left|\hat h\right|_{|u|\le U_M} \le \hat C$, $\ddot\sigma \in [-\hat C,\hat C] + [K_m,K_M]\dot u$

Twisting controller

chattering למיגור

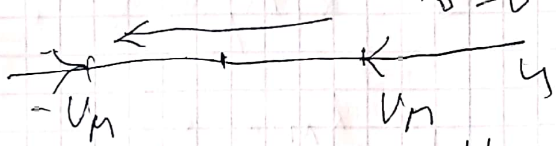
$$\dot{u} = \begin{cases} -u, & |u| > U_M, \quad U_M > \frac{C}{K_m} \\ -\alpha_1 \,\mathrm{sign}\,\sigma + \alpha_2 \,\mathrm{sign}\,\dot{\sigma}, & |u| \le U_M \end{cases} \qquad \alpha_1 > \alpha_2 > 0$$

<u>טענה:</u> אם בסוף מספיק מרגע מסוים $|u| < U_M$ נשאר

<u>הוכחה:</u>

1, תוך זמן סופי מקבלים $\sigma = 0$ (לרגע בלבד)

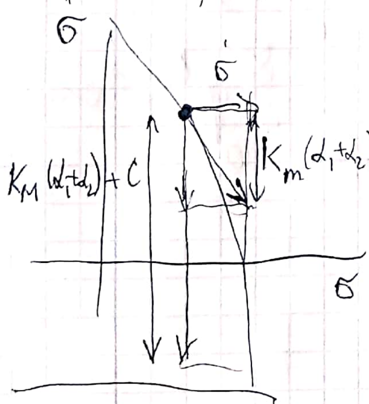
צריך שלילי: ⇐ $\dot{\sigma} > 0$ סימן של σ נשאר

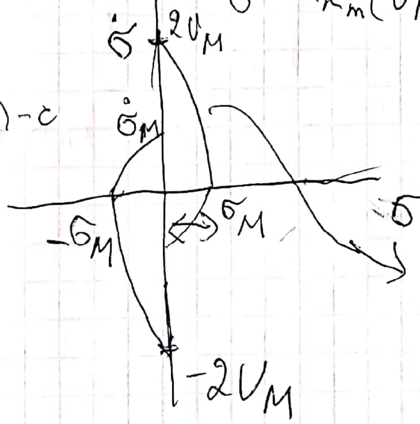


אז $u = -U_M$ אין SM ⇐ $\dot{\sigma} = g(u - u_{eq})$

$\in [K_m, K_M](U_M - \frac{C}{K_m}[-1,1])$, $\dot{\sigma} < 0 \Rightarrow \sigma = 0$ תוך זמן סופי

$\dot{\sigma} < -K_m(U_M - C/K_m) < 0$





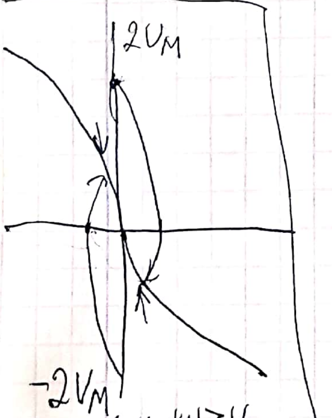
מה עם $\ddot{\sigma}$

$$|\dot{\sigma}| \le 2K_M U_M$$

$$(U_M + C/K_m) \le 2U_M$$

$$\ddot{\sigma} \in [-C, C] + [K_m, K_M](-\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$|\ddot{\sigma}| \ge -C + K_m(\alpha_1 + \alpha_2)$$



$$\dot{u} = \begin{cases} -u & |u| \ge U_M \\ -\alpha \,\mathrm{sign}(\dot{\sigma} + \beta|\sigma|^{\rho} \mathrm{sign}\,\sigma) \end{cases}$$

$$\sigma_M = \frac{4U_M^2}{2(K_m(\alpha_1 + \alpha_2) - C)}$$

$$\dot{\sigma}_M = \frac{\dot{\sigma}_M^2}{2(K_M(\alpha_1 - \alpha_2) + C)}$$

תנאי

התכנסות

$$K_M(\alpha_1 - \alpha_2) + C$$

$$> K_m(\alpha_1 + \alpha_2) + C$$

מקרה כללי $r \in \mathbb{N}$

Weighted Homogeneity Theory

תורת ההומוגניות

נציע משקלים לכל קואורדינטות ב $\mathbb{R}^n$

$$\deg x_i = m_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

נציע חבורת הטרנספורמציות הליניאריות

$$\forall \varkappa > 0 \quad d_\varkappa x = (\varkappa^{m_1} x_1, \dots, \varkappa^{m_n} x_n)$$

$$d_{\varkappa_1 \varkappa_2} = d_{\varkappa_1} d_{\varkappa_2} \qquad \text{Dilation (Rosier (1986), Kawsky, Bocciotti)}$$

הגדרה

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

נקראת הומוגנית משקל weight
דרגה degree q

$$\forall \varkappa > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(d_\varkappa x) = \varkappa^q f(x)$$ אם

דוגמא

$$m_1 = m_2 = 1$$

$$\deg(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 2, \quad \deg\left(x_1^3 + \frac{x_2^{5}}{x_1^2}\right) = 3$$

$$(\varkappa x_1)^3 + \frac{(\varkappa x_2)^5}{(\varkappa x_1)^2} = \varkappa^3\left(x_1^3 + \frac{x_2^5}{x_1^2}\right)$$

$$m_1 = 3,\ m_2 = 1$$

$$\deg(x_1 + x_2^3) = 3 \qquad \varkappa^3 x_1 + (\varkappa x_2)^3 = \varkappa^3 (x_1 + x_2^3)$$

הכללה, פיתרון 3 לא

מערכת הומוגנית?

מקרים הצגה

$$(t, x) \mapsto (\varkappa^{-q} t, d_\varkappa x)$$