הרצאה 7

Sliding Mode (SM) Control

$$\dot{x} = f(x) \qquad (\dot{x} = f(t,x))$$

כל תנועה בקבוצת אי-רציפות של f

(הכוונה לאורך זמן) נקראת תנועה ב SM

Equivalent control

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\sigma(t,x), \quad \sigma : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^m, \quad u \in \mathbb{R}^m$$

נניח שקיים סדר יחסי $r = (r_1, \dots, r_n)$

כיגוץ $r_1 + r_2 + \dots + r_n \le n$

$$\sigma^{(r)} = h(t,x) + g(t,x)u, \quad \sigma^{(r)} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \sigma_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ \sigma_m^{(r_m)} \end{pmatrix}$$

$$\det g \neq 0$$

$$u_{eq}(t,x) \overset{def}{=} -g^{-1}(t,x)\, h(t,x)$$

$$SM\ \sigma = 0 \Rightarrow \sigma^{(r)}(t,x,u) = 0 \quad u = u_{eq}(t,x)$$

(סדר אחר: t,x) $\hat{x} = (t,x), \quad \sigma = \sigma(\hat{x})$ בקיצור!

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}^{\cdot} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}}_{\hat{a}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}}_{\hat{b}} u = \hat{a} + \hat{b}u = \hat{a} + \hat{b}_1 u_1 + \dots + \hat{b}_m u_m$$

$$h = \begin{pmatrix} L_{\hat{a}}^{r_1}\sigma_1 \\ \vdots \\ L_{\hat{a}}^{r_m}\sigma_m \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} L_{\hat{b}_1} L_{\hat{a}}^{r_1-1}\sigma_1 & \dots & L_{\hat{b}_m} L_{\hat{a}}^{r_1-1}\sigma_m \\ & \ddots & \\ L_{\hat{b}_1} L_{\hat{a}}^{r_m-1}\sigma_m & \dots & L_{\hat{b}_m} L_{\hat{a}}^{r_m-1}\sigma_m \end{pmatrix}$$

$SM \Leftrightarrow$ zero dynamics

$$\sigma_1 = \dot{\sigma}_1 = \dots = \sigma_1^{(r_1-1)} = 0 \quad \dots \quad \sigma_m = \dot{\sigma}_m = \dots = \sigma_m^{(r_m-1)} = 0$$

קורדינטות לוקליות נגזרות לבהמה

Zero dynamics: $\sigma \equiv 0$, $u = u_{eq}(t,x)$

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)\,u_{eq}(t,x)$$

הנחה: כל פתרון שמתאים ל $u(t)$ חסום

מוגדר עד ל $t=\infty$

(Forward complete solutions)

פורמלית: יש קואורדינטות לוקליות

שמשלימים u — $\sigma_i^{(j)}$, $i=1,\dots,m$, $j=0,\dots,r_i-1$

$$\sigma_1 \equiv \dot\sigma_1 \equiv \dots \equiv \sigma_1^{(r_1-1)} \equiv 0, \dots, \sigma_m \equiv \dot\sigma_m \equiv \dots \equiv \sigma_m^{(r_m-1)} \equiv 0, \Leftrightarrow \sigma \equiv 0$$

הנחה כל פתרון של $u(t)$ חסום

מוגדר עד $t=\infty$.

(Forward complete solutions)

הגדרה: $K_F[f](t,x) = \bigcap_{\delta>0}\bigcap_{\mu N=0} \overline{co}\, f(t, x^{\delta} \setminus N)$ (Filippov)

נשתמש באותו סימון כאשר $x = (t, \bar{x})$

$$K_F f(t,x) = \bigcap_{\delta>0}\bigcap_{\mu N=0} f(x^{\delta} \setminus N)$$

כדור עם רדיוס δ

סגור, עם מרכז ב-x.

נניח $u = U(t,x)$ פונקציה מדידה,

וחסומה לוקלית

אז לפי הגדרה,

$\dot{x} \in K_F[a + b\,U](t,x)$ — הכלת Filippov

טענה: $a(t,x), b(t,x)$ רציפים

$\Leftarrow$

$$K_F[a+bU](t,x) = a(t,x)+b(t,x)K_F[U](t,x)$$

$$\bigcap_{\delta>0}\overline{co}(a+bU)(x,W_0) = a+b\bigcap_{\delta>0}\overline{co}\,U(x,W_0)$$

כי הרציפות נקודות של N_0
נקודות שהן לא נק' רציפות קירובי'
מאפשרת לגבי
הרציפים

$(t_j,x_j) \to (t_*,x_*)$

$a(t_j,x_j)+b(t_j,x_j)\vartheta_j \to a(t_*,x_*)+b(t_*,x_*)\vartheta_*$

$\vartheta_j \to \vartheta_*$, $\vartheta_* \in K_F[U](t_*,x_*)$

Filippov: M חסום
$\overline{co}M = co\overline{M}$
היה לנו

$\Uparrow$

$a(t_*,x_*)+b(t_*,x_*)\vartheta_* = a(t_*,x_*)+b(t_*,x_*)\vartheta_{**}$

פשוט יותר!

(בלי δ פשוט) מ.ש.ל.

טענה: $a,b\in C^\infty$, קיים relative degree

אז $u_{eq}(t,x)\big|_{\sigma\equiv0} \in K_F(U)(t,x) \iff$ קיים $SM\ \sigma\equiv0$

הוכחה:

$\sigma\equiv0 \Rightarrow \sigma^{(r)}=0 \iff u=u_{eq}(t,x)=g^{-1}(t,x)h(t,x)$

$\dot x = a+bu_{eq} \in K_F[a+bU] = a+bK_F[U]$

Filippov פתרון

מ.ש.ל.

SM order (Levant 1986, 1993)

68

$$\dot x = v(x), \quad x=(t,\bar x)$$

אומרים שיש SM מסדר r במשטח $\sigma=0$
(r-SM)

$$r=(r_1,\dots,r_m)\in N^m, \quad \sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_m) \text{ and}$$

$$\sigma_k:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}, \ \sigma_k\in C^{r_k-1}$$

אם:

1. $\sigma_1,\dots,\sigma_1^{(r_1-1)},\dots,\sigma_m,\dots,\sigma_m^{(r_m-1)}\in C$ רציפות

2. $\emptyset\neq L_r=\{x:\sigma_1=\dots=\sigma_1^{(r_1-1)}=\dots=\sigma_m=\dots=\sigma_m^{(r_m-1)}=0\}$

3. בדרך כלל L_r אוסף פתרונות Filippov
מתקיימים (לפחות) $\sigma_1\equiv\dots\equiv\sigma_m^{(r_m-1)}\equiv0$ אז
(optional)
$K_F(v)\big|_{L_r}$ מוכל ב...
מישור לא.

<u>הגדרה</u>

r-SM נקרא regular

אם $\nabla\sigma_1,\dots,\nabla\sigma_1^{(r_1-1)},\dots,\nabla\sigma_m,\dots,\nabla\sigma_m^{(r_m-1)}$ ליניארית
בלתי תלויים
(אז L_r - יריעה חלקה)

L_r נקרא rth order sliding manifold

$$r_1+r_2+\dots+r_m \overset{def}{=} |r| \le n \quad \Leftarrow \text{ובפרט}$$

<u>דוגמא</u>

$x\in\mathbb{R}$, $x^{(r)}=-\text{sign}\,x$ נניח,

$\sigma=x$, $x,\dot x,\dots,x^{(r-1)}$ קיימות רציפות

$$x\equiv0, \quad x^{(r)}=0\in[-1,1], \quad K_F\begin{pmatrix}\dot x_?\\ \vdots\\ x^{(r-1)}\\ -\text{sign}\,x\end{pmatrix}=\begin{cases}\begin{pmatrix}\vdots\\ -1\end{pmatrix} & x>0\\ \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ [-1,1]\end{pmatrix} & x=0\\ \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} & x<0\end{cases}$$

מתקיים r-SM

$$K_F(v)\big|_{L_r}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ [-1,1]\end{pmatrix}$$

(אין רציפות)

הגדרה! SM-r נקרא יציב, יציב אסימפטוטי,

69 יציב תוך זמן סופי אם

בסביבות L_r פתרונות ~~נשארים~~ נשארים עד $t=\infty$, או מתכנסים ל-L_r

או תוך זמן סופי.

אפשרי גם מעל קטע זמן סופי

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1.5|x_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign} x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -1.1 \operatorname{sign} x_1 + \cos(x_1 + x_2) \end{cases},$$

$$\sigma = x_1$$

$$(\sigma, \dot{\sigma}) = (x_1, -1.5|x_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign} x_1 + x_2)$$ כציפוס

$$L_2 = \{x_1, x_2 \mid x_1 = 0, x_2 = 0\}$$

$$x_1 \equiv x_2 \equiv 0$$ פתרון

$$0 \in K_F \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.1[-1,1] + \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ [-0.1, 2.1] \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ יש 2-SM אבל הוא לא רגולרי; $\nexists \nabla \dot{x}_1 \big|_{L_2}$

הוא יציב תוך זמן סופי

$\mathring{t} = 1 \longrightarrow$

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1.5|x_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign} x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -1.1 \operatorname{sign} x_1 + \cos(100t) \end{cases}$$

אבל מושג

dynamics

super-twisting

Levant 1993

1989

$$L_2 = \{(t, x_1, x_2) \mid x_1 = x_2 = 0\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in K_F \Big|_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ [-1.1, 1.1] + \cos(100t) \end{pmatrix}$$

FT stable 2-SM $x_1 = 0$

Twisting מקלקל **דוגמא**

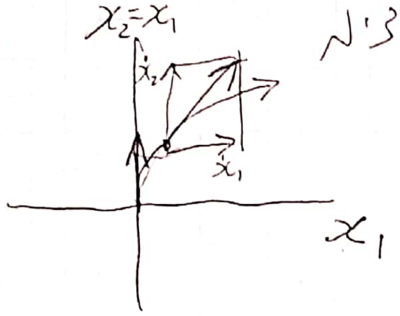
(70)

$$\begin{cases} \dot t = 1 \\ \dot x_1 = x_2 \quad , \sigma = x_1 \\ \dot x_2 = 2\,\mathrm{sign}\,x_1 - \mathrm{sign}\,x_2 + \sin 3t \end{cases}$$

$$L_2 = \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$$

$$K[V]\Big|_{L_2} = \left\{ \begin{pmatrix} \dot t \\ \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \dot t = 1 \\ \dot x_1 = 0 \\ \dot x_2 \in [-2,2] + [-1,1] + \sin 3t \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ [-3,3] + \sin 3t \end{pmatrix} \right\} \ni \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



ש' 2-SM לא יציב

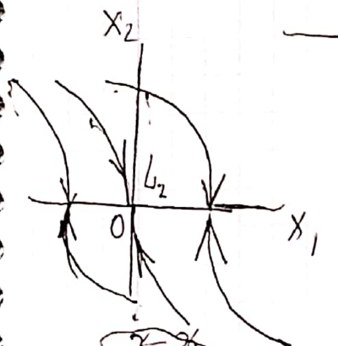
$t \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \sin 3t > 0$

רגולרי:

$\nabla x_1 = (0, 1, 0)$

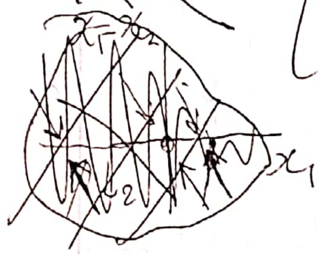
$\nabla \dot x_1 = \nabla x_2 = (0, 0, 1)$

גזירה לפי t



דוגמא

$$\begin{cases} \dot t = 1 \\ \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = -3\,\mathrm{sign}\,x_2 + \sin 3t \end{cases}$$



ש' 2-SM $\dot x_1 = 0$ יציב

אבל לא אסימפטוטי

רגולרי

ש' 1-SM $x_2 = 0$ יציב אך זמן סופי

הפתרון:

$x_2 \equiv 0 \;,\; x_1 = \mathrm{const}$

$$\dot x_2 = 0 \in [-3,3] + \sin 3t = [-3, 3 + \sin 3t]$$

דוגמא

$$\begin{cases} \dot t = 1 \\ \dot x_1 = x_2 \quad , \sigma = x_1 \\ \dot x_2 = -3\,\mathrm{sign}\,x_1 - \mathrm{sign}\,x_2 + \sin 3t \end{cases}$$

Twisting
Levant 1985

2-SM $x_1 = 0$ יציב אך זמן סופי, רגולרי

(7)

Classical SMC theory Уткин

1-SMC

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u, \quad r = 1$$

$$\dot{\sigma} = h(t,x) + g(t,x)u, \quad u \in \mathbb{R}^m, \ \sigma \in \mathbb{R}^m$$

$$\sigma = \sigma(t,x)$$

מקרה, $m=1$ לפי אוטקין:

$$|h| \le C, \quad 0 < K_m \le g \le K_M$$

$$\sigma \to 0 \Leftarrow u = -\alpha \,\mathrm{sign}\,\sigma, \quad \alpha > C/K_m$$

בזמן סופי

Matching condition

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad \dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u + \xi(t,x)$$

$$u, \sigma \in \mathbb{R}^m$$

שאלה: מה התנאי על ξ כדי שהתנועה ב SM לא תהיה תלויה ב ξ?

נניח rel. degree: $r = (1,1,\dots,1)$, $a, b \in C^\infty$

$$\dot{\sigma} = \sigma'_t + \nabla\sigma\, a + \nabla\sigma\, b\, u$$

$$\nabla\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial x} = \begin{pmatrix} \nabla\sigma_1 \\ \vdots \\ \nabla\sigma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\sigma_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\sigma_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\sigma_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad m \times n$$

$$r = (1,\dots,1) \iff \det(\nabla\sigma\, b) \ne 0, \quad \nabla\sigma\, b \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

$$\dot{\sigma} = 0 \Rightarrow u = u_{eq} = -(\nabla\sigma\, b)^{-1}(\sigma'_t + \nabla\sigma\, a)$$

Zero dynamics $\iff (1,\dots,1)$-SM motion, $u = U(t,x)$

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t,x) + b(t,x)\,u_{eq}(t,x) \\ \sigma \equiv 0 \end{cases} \qquad u_{eq} \in K_F[U]\big|_{\sigma\equiv 0}$$

אנחנו לא מגרעים ביצועים של SM

בתנועות הנגררת (72)

$$\dot{\sigma} = \sigma'_t + \nabla\sigma a + \nabla\sigma b u + \nabla\sigma \xi$$

$$u_{eq} = -(\nabla\sigma b)^{-1}(\sigma'_t + \nabla\sigma a + \nabla\sigma\xi)$$

התנועה ב SM $\sigma \equiv 0$ מקבלת צורה

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u_{eq}(t,x) + \xi(t,x) \\ \sigma(t,x) \equiv 0 \end{cases}$$

מה באמת אומרת תנועה?

$$\begin{cases} \dot{x} = a - b(\nabla\sigma b)^{-1}(\sigma'_t + \nabla\sigma a) \underbrace{- b(\nabla\sigma b)^{-1}\nabla\sigma\xi + \xi}_{\text{גורם}} \\ \cancel{\xi \equiv 0} \\ \sigma \equiv 0 \end{cases}$$

התנאי הוא

$$\left[\xi - b(\nabla\sigma b)^{-1}\nabla\sigma\xi\right]\Big|_{\sigma=0} \equiv 0$$

התנאי המספיק:
$$\underset{xi}{\xi} = b(t,x)\underset{zeta}{\zeta}(t,x)$$

אם מקבלים ξ

$$\xi - b(\nabla\sigma b)^{-1}\nabla\sigma b\zeta = \xi - b\zeta = \xi - \xi = 0$$

Matching condition
$$\boxed{\xi = b(t,x)\zeta(t,x)}$$

$$\Leftarrow \quad \dot{x} = a(t,x) + b(t,x)(u + \zeta(t,x))$$

ההפרעה פועלת בערוץ הבקרה

control channel

73) Zero dynamics $\Longleftrightarrow$ SM motion

$$\xi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = a + b\,u_{eq}\big|_{\xi=0} \\ \sigma \equiv 0 \end{cases} \qquad u_{eq} = u_{eq}\big|_{\xi=0} - \xi$$

הערה חשובה

Matching condition בערך כלל פורמלי

כי לצ״מ מערכת

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \varepsilon, & \underset{\text{const}}{\varepsilon \neq 0} \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

אי אפשר לצ״מ!

נניח $x_1 \equiv x_2 \equiv 0$

$\Leftarrow \dot{x}_1 = \varepsilon \neq 0$ סתירה ...

משפט Utkin (1980)

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)\,u, \quad \sigma(t,x) \in \mathbb{R}^m$$

$u \in \mathbb{R}^m, \; x \in \mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{Utkin אצל } r = (1,1,\dots,1)}, \quad r \in \mathbb{N}^m$

אז

$$\sigma^{(r)} = h(t,x) + g(t,x)\,u = g(t,x)\left(u - u_{eq}(t,x)\right)$$

$\boxed{r = (1,1,\dots,1) \text{ אם}, \; g = \nabla\sigma\, b}, \; \det g \neq 0, \quad u_{eq} = -g^{-1}h$

משפט

1. נניח $u(t)$-רציפה, מקיימת $\|u\|, \|u_{eq}\| \le U_M$,

$$\|\dot{u}_{eq}(t, x(t), u(t))\| \le L, \quad \dot{g} = g'_t + g'_x(a + bu), \quad \|\dot{g}\| \le D$$

$$\|g^{-1}\| \le C$$

2. $\|\sigma^{(r-1)}\| \le \varepsilon$

$$\sigma^{(r-1)} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{(r_1-1)} \\ \vdots \\ \sigma_m^{(r_m-1)} \end{pmatrix}$$

מסנן Utkin:

$$\frac{1}{\alpha}\dot z + z = u(t),\quad z(0)=0,\quad z\in\mathbb{R}^m$$

$$\alpha \gg 1$$

הפתרון במובן של Caratheodory
(מקרה פרטי של Filippov)

$$\|z-u_{eq}(t,x(t))\| = o(1) + \overbrace{O\left(\tfrac{1}{\alpha}\right)+O(\varepsilon)+O(\alpha\varepsilon)}^{\text{מסנן}}$$

$\varphi(t),\ \psi(t)\to 0,\ t\to\infty$ אין אצל Utkin

הצעה: להעריך את $u_{eq}(t,x(t))$

למה כי מסנן?

דוגמא: פונקציה $f(t)$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $|\dot f|\le C$

בעיית מעקב: $\dot x = u$, $\sigma = x-f$

$$\dot x = -2C\,\mathrm{sign}(x-f(t)),\quad u=-2C\,\mathrm{sign}\,\sigma$$

$$\dot\sigma = \overset{u}{\dot x} - \dot f \in \overset{u}{\left(-2C\,\mathrm{sign}\,\sigma\right)} + [-C, C]$$

$$1\text{-SM}\quad \sigma=0 \Leftarrow$$

$$\dot\sigma = 0 = u-\dot f \Rightarrow u_{eq}=\dot f$$

$$\frac{1}{\alpha}\dot z + z = u(t)\qquad z(t)\approx u_{eq}=\dot f$$

עיין בספר (Golembo 1976)