Filippov: $\dot x \in F(t,x)$:חשוב

הכלות Filippov

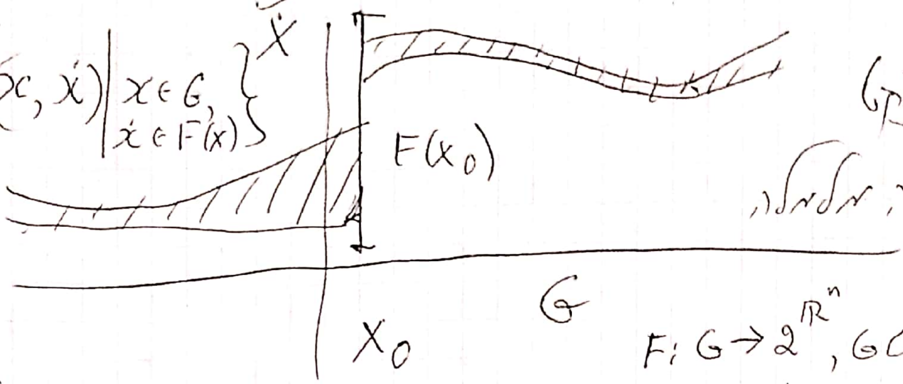
תלות רציפה בתנאי התחלה וצד ימין

$\dot x \in F(x)$

$F(x)$ - קומפקטי, קמור, $\neq \emptyset$

חצי-רציפה מלמעלה

$\Gamma = \left\{(x,\dot x) \mid x\in G, \dot x \in F(x)\right\}$ גרף



$F: G \to 2^{\mathbb{R}^n},\ G\subset \mathbb{R}^n$

למה ~~חצי רציפה מלמעלה~~ ~~...~~ $F(x)$ סגורה, חסומה, לא ריקה

חצי רציפה מלמעלה $\Leftrightarrow$ הגרף של F סגור

הוכחה 1. "$\Leftarrow$" ישנה חצי-רציפות מלמעלה

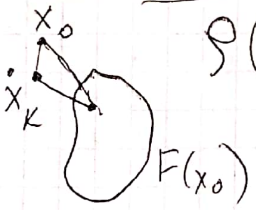
זאת אומרת $x_0 \in \partial G \cap G$

$x\to x_0 \Rightarrow \max\limits_{y\in F(x)} \rho(y, F(x_0)) \to 0$

צריך להוכיח: $\Gamma \ni (x_k,\dot x_k) \to (x_0,\dot x_0)$

$\dot x_k \in F(x_k) \Rightarrow \dot x_0 \in F(x_0)$

משולש



$\rho(\dot x_K, F(x_0)) \to 0$

$\rightarrow \rho(\dot x_0, F(x_0))$ "

חצי רציפות:

נגדיר A,B - קומפקט
$\rho(A,B) = \max\limits_{a\in A} \rho(a,B)$

2. "$\Rightarrow$" הגרף סגור

$\Gamma \ni (x_K,\dot x_K) \to (x_0,\dot x_0) \Rightarrow (x_0,\dot x_0)\in\Gamma$

בדרך שלילה: נניח אין חצי-רציפות מלמעלה,

חצי-רציפות: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in x_0^{\delta}: \rho(F(x),F(x_0))<\varepsilon$

אין חצי-רציפות מלמעלה: $\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x\in x_0^{\delta}: \rho(F(x),F(x_0))\geq\varepsilon$

$\Rightarrow \boxed{\delta_k\to 0,\ x_k\to x_0,\ \dot x_k\in F(x_k) :\ \rho(\dot x_K, F(x_0))\geq\varepsilon}$

קיימת $F(x)$ חסומה, ב x^{δ} סדרה $\Rightarrow x_{k_e}\to x_0,\ \dot x_{k_e}\to \dot x_0 \Big| \Rightarrow (x_0,\dot x_0)\in\Gamma \Rightarrow \dot x_0 \in F(x_0)$

גרף סגור

מש.ו.ל.

סתירה $\rho(\dot x_{k_e}, F(x_0))\to 0$

נניח פתרונות קיימים ב-G

$G\subset R^n$ קומפקט, $t\in[a,b]$, $x(t)\in G$

$\dot x\in F(x)$ - הכל, Filippov

משפט <u>תלות רציפה בגרף של הצד הימני</u>

1. $t\in[\alpha_k,\beta_k]\subset[a,b]$, $\dot x_{\varepsilon_k}\in\left(coF(x^{\varepsilon_k})\right)^{\varepsilon_k}$ $\cancel{=F(x^{\varepsilon_k})^{\varepsilon_k}}$, $(\alpha_k,\beta_k)\to(\alpha,\beta)$, $\varepsilon_k\to0$

אז קיים גבול ולכן: $\exists\{x_{\varepsilon_{k_l}}\}\rightrightarrows x_*$

מתקיים $\forall[\alpha',\beta']\subset(\alpha,\beta)$ $\dot x_*\in F(x)$, $x_{\varepsilon_{k_l}}\rightrightarrows x_*$

כמו כן $[\alpha_k,\beta_k]\supset[\alpha,\beta]\Rightarrow[\alpha,\beta]$

2. $\forall\delta>0\ \exists\varepsilon>0\ \forall x_\varepsilon(\cdot)$ מקיים $\dot x_\varepsilon\in\left(co F(x^\varepsilon)\right)^\varepsilon$, $t\in[\alpha,\beta]$

$\exists x_*(\cdot)$, $\dot x_*\in F(x_*)$, $\underbrace{\|x_*-x_\varepsilon\|_C}_{=\max_{t\in[\alpha,\beta]}\|x_*(t)-x_\varepsilon(t)\|}<\delta$

<u>הוכחה:</u>

1. מרגע k מסויים כל x_{ε_k} מוגדרים ב-$[\alpha',\beta']$

$F(x)$ חסומה ב-G ⇐ $\dot x_{\varepsilon_k}$ חסומים, $\forall t\ x_{\varepsilon_k}(t)\in G$ חסומים

<u>משפט Arzela</u> ⇐ $\exists x_{k_l}\rightrightarrows x_*$

משלב 2 ⇐ x_* רציפה מוחלטת, $\dot x_*\in F(x)$

2. <u>בדרך שלילה</u> נניח לא נכון

$\exists\delta>0\ \forall\varepsilon>0\ \exists x_\varepsilon(\cdot)$, $\dot x_\varepsilon\in\left(coF(x^\varepsilon)\right)^\varepsilon$, $t\in[\alpha,\beta]$

$\forall x_*(\cdot)$, $\dot x_*\in F(x_*)$ $\|x_*-x_\varepsilon\|_C\geq\delta$

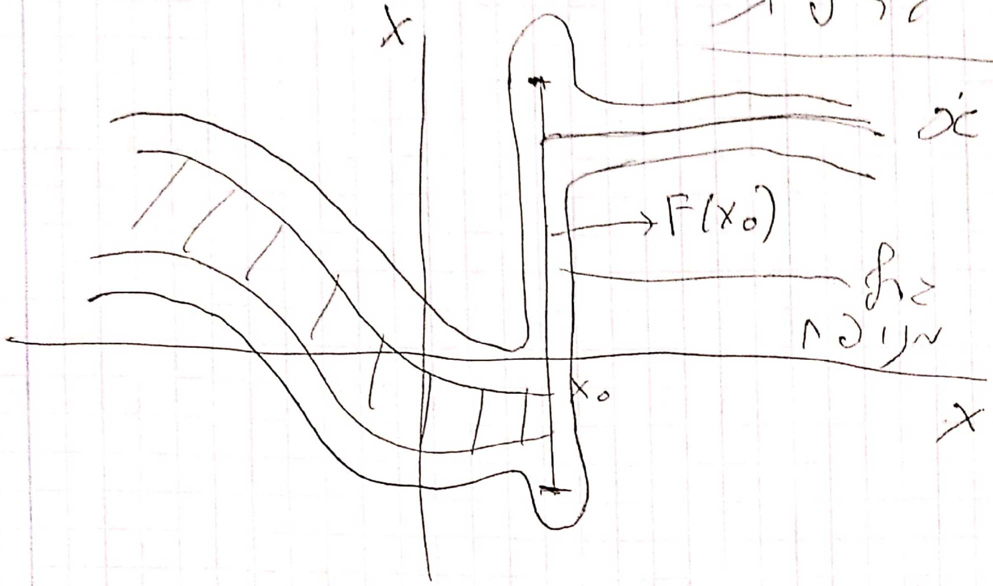
ניקח $\varepsilon_k\to0$, $\dot x_{\varepsilon_k}\in\left(coF(x^{\varepsilon_k})\right)^{\varepsilon_k}$, $t\in[\alpha,\beta]$

Arzela, $x_{k_l}\rightrightarrows\tilde x$, $\dot{\tilde x}\in F(\tilde x)$

<u>סתירה</u> $\|x_{k_l}-\tilde x\|\to0$

מ.ש.ל.

הערה, גרפים



$\dot{x} \in F(x^{\varepsilon})^{\varepsilon}$

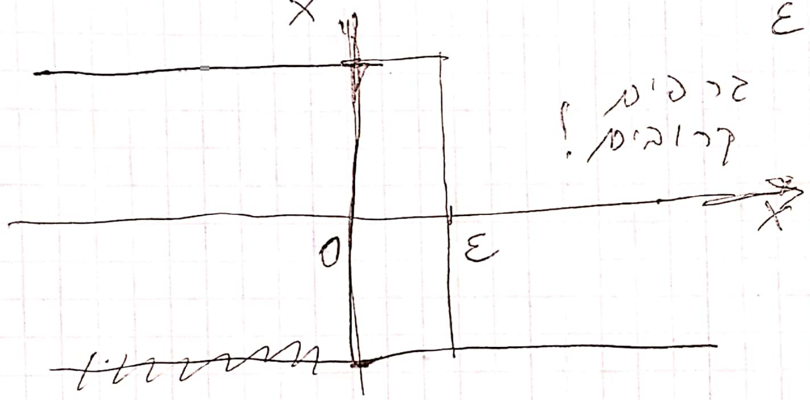
~~מקרה פרטי:~~

דוגמא

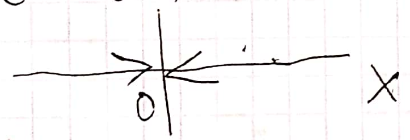
$x \in \mathbb{R}$

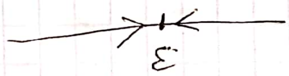
$$\dot{x} \in F(x) = \begin{cases} \{-\operatorname{sign} x\} & x \neq 0 \\ [-1,1] & x = 0 \end{cases}$$

$$\dot{x} \in F_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign}(x-\varepsilon) & x \neq \varepsilon \\ [-1,1] & x = \varepsilon \end{cases} = F(x-\varepsilon)$$



גרפים קרובים!

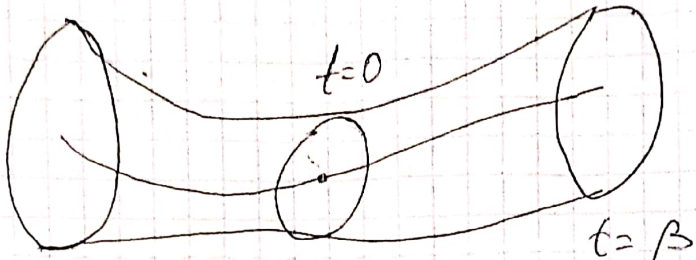




הפתרונות קרובים!

כלל עכן, קבוצת פתרונות מעל קטע חסומה (כי $x(t) \in G$ קומפקט) וסגורה, ב-C קומפקטית

משפט $A\subset G$, קומפקטי



$0\in[\alpha,\beta]$

$\forall x_0(0)\in A$ קיימים פתרונות $x(t)\in G$, $t\in[\alpha,\beta]$

$\Leftarrow$ א. קבוצת כל הפתרונות קומפקטית ב $C[\alpha,\beta]$

ב. קבוצת נקודות של כל הפתרונות קומפקטית ב $\mathbb{R}^n$

הוכחה:

א. סדרה, $x_k(t)$ - פתרונות ב $[\alpha,\beta]$

לפי Arzela ישנה $x_{k_\ell}\rightrightarrows x_*$, $\dot{x}_*\in F(x_*)$

ב. ישנה סדרה $x_k(t_k)$

ישנה תת-סדרה, $x_{k_\ell}\rightrightarrows x_*$, $t_{k_\ell}\to t_*$ (נמצאים בגבול)

$$\lim_{\ell\to\infty} x_{k_\ell}(t_{k_\ell})=\lim_{t\to t_*}\lim_{\ell\to\infty} x_{k_\ell}(t)=x_*(t_*)$$

$$\|x_{k_\ell}(t_{k_\ell})-x_*(t_*)\|\le\underbrace{\|x_{k_\ell}(t_{k_\ell})-x_*(t_{k_\ell})\|}_{\to 0}+\underbrace{\|x_*(t_{k_\ell})-x_*(t_*)\|}_{\to 0}$$

מ.ש.ל.

הערה! התנאי ש-A קומפקטי אפשר להחליף ב G-פתוח (Filippov)

כולל $G=\mathbb{R}^n$

הגדרת Filippov (1958-60)

הגדרת Filippov המקורית
נתונה לפתרון $\dot{x} = f(t,x)$
אבל נתרכז במקרה האוטונומי
(אחר כך נחזור גם למקרה עם הזמן)

$$\dot{x} = f(x), \quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

מדידה לפי Lebesgue וחסומה לוקלית
או locally essentionally bounded
חסומה לוקלית $\exists N: \mu N = 0, \ f|_{\mathbb{R}^n \setminus N}$
μ-מידת Lebesgue

הגדרה: פונקציה $x(t)$ נקראת פתרון של $\dot{x} = f(x)$ במובן Filippov
אם היא פתרון של ההכלה

$$\dot{x} \in \underbrace{K_F[f]}_{\boxed{\text{Filippov Procedure}}}(x) = \bigcap_{\mu N = 0} \bigcap_{\delta > 0} \overline{co} f(x^\delta \setminus N)$$

ההגדרה נכונה גם ל $f: G \to \mathbb{R}^n$
G-תחום פתוח

משפט (Filippov)
הכלת Filippov - $\dot{x} \in K_F[f](x)$
נכונה אותו

הגדרה: נקודה נקראת נק' צפיפות (density point)
של קבוצה E מדידה לפי Lebesgue אם

$$\lim_{\delta \to 0+} \frac{\mu(E \cap x^\delta)}{\mu x^\delta} = 1$$

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

59 **הגדרה** נק' x_0 נקראת נק' של רציפות קירובית
approximate continuity point
אם בסביבת x_0 קיימת קבוצה E מדידה
כך ש-x_0 נק' צפיפות של E, $x_0\in E$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ x\in E,\ \|x-x_0\|<\delta\Rightarrow\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$$

הגדרה שקולה x_0 נקראת נק' של רציפות קירובית
אם $\forall\varepsilon>0$ x_0 - נק' צפיפות
של הקבוצה $\{x \mid \|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon\}$

משפט (Luzin) אם f מדידה, אז
כמעט כל נק' בתחום ההגדרה היא נק' רציפות קירובית

נסמן: נקודות שהן לא נק' של רציפות קירובית - N_0

למה 1: $K_F[f](x)=F(x)=\bigcap_{\delta>0}\overline{co}\,f(x^\delta\setminus N_0)$

הוכחה: לפי ההגדרה
$$K_F[f](x)=\bigcap_{\delta>0}\bigcap_{\mu N=0}\overline{co}\,f(x^\delta\setminus N)\subset F(x)$$
כי $\mu N_0=0$

יותר מכך $\forall\delta\ \forall N\ \mu N=0\Rightarrow\overline{f(x^\delta\setminus N)}\supset\overline{f(x^\delta\setminus N_0)}$
ולכן $F(x)\subset K_F[f](x)$ מ.ש.ל.

נוכיח! ניקח $x_0\in x^\delta\setminus N_0$, x_0 - approx. cont.
⇐ $E(x_0)$ קבוצת נקודות מתאימה
x_0 - נק' צפיפות $E(x_0)$, f רציפה לאורך $E(x_0)$ ב-x_0
⇐ x_0 גם נק' צפיפות של $\tilde{E}=E(x_0)\cap(x^\delta\setminus N)$
f רציפה, גם לאורך $\tilde{E}$ ⇐ $f(x_0)\in\overline{f(x^\delta\setminus N)}$
מ.ש.ל.

למה 2

$F=\bigcap_{\delta>0} F_\delta$, $F_\delta \subseteq \mathbb{R}^n$ סגור

$\delta\in\mathbb{R}$, $\delta_1<\delta_2 \Rightarrow F_{\delta_1}\subset F_{\delta_2}$

אזי:

$$y=\lim_{k\to\infty} y_k,\ y_k\in F_{\delta_k},\ \delta_k\to 0 \iff y\in\bigcap_{\delta>0} F_\delta$$

הוכחה: 1. "$\Leftarrow$" $y_k=y$, $y=\lim_{k\to\infty} y$

2. $\exists \lim_{k\to\infty} y_k=y,\ y_k\in F_{\delta_k}$

$$\Rightarrow \forall \delta_0\ \exists k_0,\ k>k_0 \Rightarrow y_k\in F_{\delta_0} \Rightarrow \underbrace{\lim y_k}_{y} \in F_{\delta_0}$$

$$\Rightarrow y\in\bigcap_{\delta_0} F_{\delta_0}$$

מ.ש.ל.

משפט Filippov f חסומה לוקלית, מדידה,

$$F(x)=K_F[f](x)=\bigcap_{\delta>0}\bigcap_{\mu N=0}\overline{co}\, f(x^\delta\setminus N)$$

אזי: 1. $F(x)$ - לא ריקה

2. קמורה, קומפקטית

3. חצי-רציפה מלמעלה

הוכחה: 1. $F(x)=\bigcap_{\delta>0}\overline{co}\, f(x^\delta\setminus N_0)$

ניקח $\delta_k\to 0$, $x_k\in x^{\delta_k}\setminus N_0$

$$\Rightarrow f(x_k)\in\overline{co}\, f(x^{\delta_k}\setminus N_0)$$

סדרה חסומה

$$\Rightarrow \exists y=\lim_{l\to\infty} f(x_{k_l}),\quad y\in F(x)$$ לפי למה 1

2. קמורה, חסומה, סגורה - קומפקטי

3. רציפות האוסדורף של מולטיפונקציה

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall \hat{x}\ \|\hat{x}-x\|<\delta \Rightarrow \rho(F(\hat{x}),F(x))<\varepsilon$$

תזכורת!

$$\rho(A,B)=\max_{a\in A}\rho(a,B)=$$
$$=\max_{a\in A}\min_{b\in B}\rho(a,b)$$

A,B compact

נניח בשלילה: נניח

$$\exists \varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists\hat{x}: \|\hat{x}-x\|<\delta\ \&\ \exists\hat{y}\in F(\hat{x})$$
$$\rho(\hat{y},F(x))\geq\varepsilon$$

$\delta_k\to 0,\ x_k\in x^{\delta_k}$

$x_k\to x,\ y_k\in F(x_k)$ ניקח $0<\gamma<\varepsilon$

$\rho(y_k,F(x))\geq\varepsilon$

$$y_k\in\bigcap_{\delta>0}\overline{co}f(x_k^{\delta}\setminus N_0)\Rightarrow y_k=\lim_{\ell\to\infty}y_{k\ell}\quad (2,\text{מא})$$

כלומר $y_k=\lim_{\ell\to\infty}\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{k\ell i}f(x_{k\ell i})$, $x_{k\ell i}\notin N_0$, $\in x_k^{\delta_{k\ell}}$

$y_{k_\omega}\to y_*$ נניח $\sum\alpha_{k\ell i}=1$

$\alpha_{k\ell i}\geq 0$

$y_{k_{\omega_j}}$ $\{x_{k_{\omega_j}\ell,1}\},\dots,\{x_{k_\omega\ell_j,n+1}\}$ ניקח תת-סדרות מתכנסות

אחת אחרי שנייה

$y_{k\omega_{js}}$ $\{\alpha_{k_\omega\ell_{js},1}\},\dots,\{\alpha_{k_\omega\ell_{js},n+1}\}$ אחר כך ניקח מתכנסות

$$y_*\in\bigcap_{\delta>0}f(x^\delta\setminus N_0)=F(x)\quad \text{נקבל}\Leftarrow$$

$$\Rightarrow \rho(y_*,F(x))=0$$

$$\Rightarrow\lim_{s\to\infty}\rho(y_{k\omega_{js}},F(x))=0$$

סתירה

$$y_{k\omega_{js}}\in F(x_{k\omega_{js}})$$
$$x_{k\omega_{js}}\to x$$

מ.ש.ל.

Imperfections of switching

שהייה, ~~היסטרזיס~~, שגיאת מדידה

hysteresis delay

$$\dot x_\varepsilon \in \left(\mathrm{co}\, F(x^\varepsilon)\right)^\varepsilon, \quad F(x) = K_F[f](x)$$

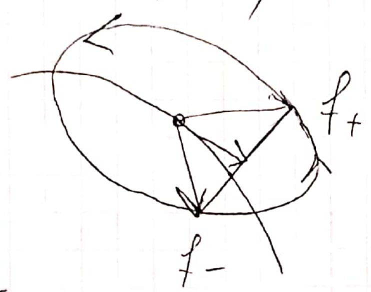
$$\varepsilon \to 0 \quad x_\varepsilon \rightrightarrows x, \quad \dot x \in F(x)$$

במידה שווה

⇐ ההגדרה היא טבעית

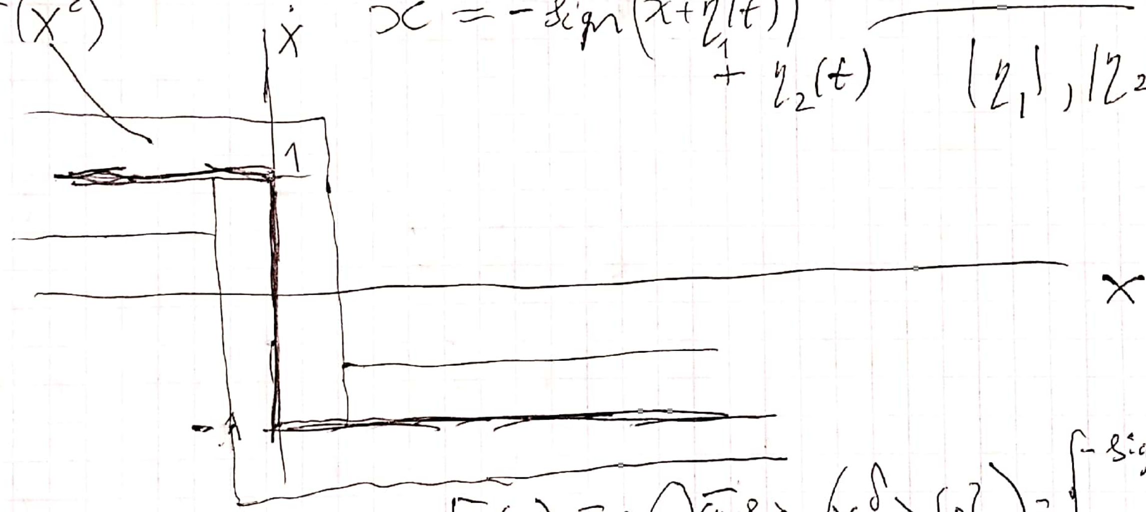
hysteresis יכול להביא ערכים חדשים

שלא מופיעים ב $F(x)$

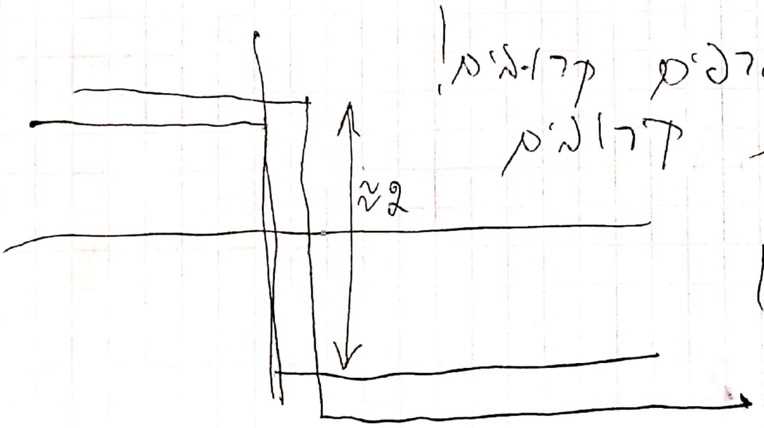


דוגמא

$F(x^\varepsilon)^\varepsilon$ $\quad \dot x = -\mathrm{sign}(x+\eta_1(t)) + \eta_2(t)$ $\quad |\eta_1|, |\eta_2| \le \varepsilon$



$$F(x) = -\bigcap_{\delta>0} \overline{\mathrm{co}}\, \mathrm{sign}\left(x^\delta \setminus \{0\}\right) = \begin{cases} -\mathrm{sign}\, x & x \neq 0 \\ [-1,1] & x = 0 \end{cases}$$



יש גרפים קרובים!

⇐ פתרונות רחוקים

למרות ש

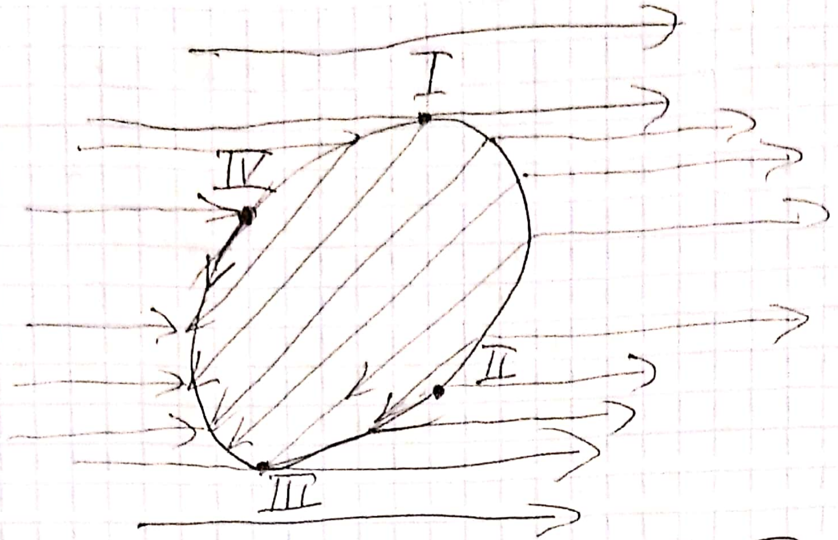
$$|\mathrm{sign}(x-\varepsilon) + [\varepsilon, \varepsilon] - \mathrm{sign}\, x| \gtrsim 2-\varepsilon$$

בנקודות מסוימות

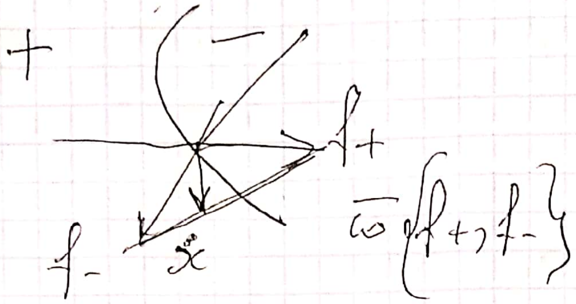
63

דוגמא

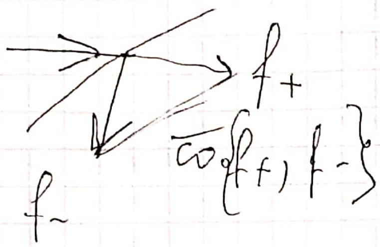
$$f(x)=\begin{cases} f_+ & \text{בחוץ} \\ f_- & \text{בפנים} \end{cases}$$



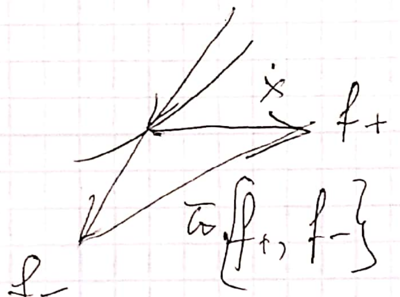
בקטע III, IV יש לנו SM



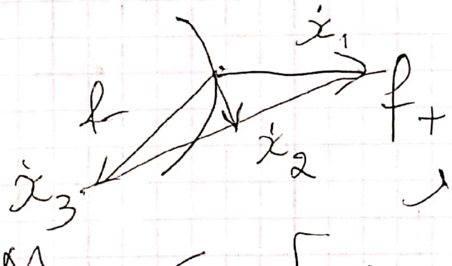
בקטע I, IV
שבירת קו
נכנסים פנימה



בקטע II, III
שבירת קו
יוצאים החוצה.



בקטע I, II



יש ~~[illegible]~~ אופציות
1. לצאת החוצה,
2. להישאר על השטח, ← SM לא יציב
3. להיכנס פנימה,

משוואות עם אי־רציפויות

$$\dot x = f(t,x) \qquad (64)$$

שיטה 1 (אפי׳ מדידה f)

f מדידה לפי Lebesgue ב־(t,x)
וחסומה לוקלית (essentially)

⇐ מוסיפים משוואה פיקטיבית $\dot t = 1$

מקבלים

$$\dot x \in \bigcap_{\delta>0}\ \bigcap_{\mu N=0} \overline{co}\, f\left((t,x)^\delta \setminus N\right)$$

לכל t,x

זה לא כמו הגדרת Caratheodory

שיטה 2 (Filippov)

$f: G \to \mathbb{R}^n$ מדידה לפי Lebesgue +
חסומה לכל (t,x), ו־$t\in[\alpha,\beta]$, G־קומפקטי

$\exists m(t):\ \|f(t,x)\| \le m(t),\ \exists \int_\alpha^\beta m(t)\,dt < \infty$

בדרך כלל מניחים $f(t,x)$ חסומה לוקלית
essentially locally bounded
$\Rightarrow |f(t,x)| \le M$
עד מידה 0

אז בהגדרה המקורית

$$F(t,x) = \bigcap_{\delta>0}\ \bigcap_{\mu N=0} \overline{co}\, f(t, x^\delta \setminus N)$$

לכל x מקבלים

כי כאשר קיים הפתרון שלנו לפתרוני

$\overline{co}F(t,x^\delta)^\delta \ni \dot x_k = \frac{1}{\mu(O^{\delta_k})} \int_{O^{\delta_k}} f(t,x+y)\,dy$ שמוגדרים משוואת Caratheodory