(Isidori)

הרצאה 4.

Dynamic Extension

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$
$$y = h(x)$$

נניח מדגלים

$y, u \in \mathbb{R}^m, \quad x = \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$x = (\bar{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1 \, |k}$

$$r = (r_1, r_2, \dots, r_m) \in \mathbb{N}^m$$

מגדירים rel. degree ל

וקטורי

$$y^{(r)} = h^{(r)} = \begin{pmatrix} h_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ h_m^{(r_m)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} L_f^{r_1} h_1 \\ L_f^{r_k} h_k \\ L_f^{r_m} h_m \end{pmatrix}}_{L_f^r h} + \underbrace{\begin{pmatrix} \overset{\longleftarrow k \longrightarrow}{G_1} & \overset{m-k}{0} \end{pmatrix}}_{G} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

נסמן G High-Frequency Gain Matrix

אך אם G לא הפיכה, $G \not\equiv 0 \Rightarrow$ אין rel. degree.

נגדיר בקרים וירטואליים חדשים

$\dot{u}_1, \dots, \dot{u}_k$

כאשר $u_1, u_2, \dots, u_k$ - יהיו קואורדינ' נוספות

גם וירטואליים

עכשיו נגזור פעם $h^{(r)}$ גב הבקרה החדשה $\tilde{u} = (\dot{u}_1, \dots, \dot{u}_k, u_{k+1}, \dots, u_m)^T$

בכלל לא מופיע.

נקבל אז

$$y^{(r+(1,\dots,1))} = L_f^{r+(1,\dots,1)} h + \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

כאשר G_2 - זאת מטריצה חדשה

$$G_2 = G_2(x, u_1, \dots, u_k)$$

אם שלנו מצב $\det[G_1, G_2] \neq 0$

$\Leftarrow$ הסדר היחסי החדש הוא

$$\tilde{r} = (r_1 + 1, \dots, r_m + 1)$$

דוגמא

$$\begin{cases} \dot x_1 = x_2 + u_1 \\ \dot x_2 = \sin x_2 + x_3 - u_1 \\ \dot x_3 = u_2 + t \\ \dot t = 1 \end{cases}$$

$$f = \begin{pmatrix} x_2 \\ \sin x_2 + x_3 \\ \cancel{0} \ 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2, x_3, t)^T$$

$$\dot t = 1$$

אין לנו relative degree כי

$$y^{((1,1))} = \begin{pmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ \sin x_2 + x_3 \end{pmatrix}}_{L_f^{(1,1)} y} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{G} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$$\det G = 0, \quad G \neq 0$$

נכניס $\dot u_1 = \tilde u_1$ כמקור חדש, u_1 כ' קואורדינטה חדשה

$$\dot u_1 = \tilde u_1$$

עם מקדמים

$$\begin{cases} \dot x_1 = x_2 + u_1 \\ \dot x_2 = \sin x_2 + x_3 - u_1 \\ \dot x_3 = u_2 + t \\ \dot u_1 = \tilde u_1 \\ \dot t = 1 \end{cases} \qquad \tilde x = (x_1, x_2, x_3, u_1, t)^T,$$

$$\tilde f = \begin{pmatrix} x_2 + u_1 \\ \sin x_2 + x_3 - u_1 \\ t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde g = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נגזור $(*)$ ונקבל

$$y^{((2,2))} = \begin{pmatrix} \ddot x_1 \\ \ddot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x_2 + x_3 - u_1 + \dot u_1 \\ \cos x_2 (\sin x_2 + x_3 - u_1) + u_2 + t - \dot u_1 \end{pmatrix}$$

$$y^{((2,2))} = \begin{pmatrix} \ddot x_1 \\ \ddot x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin x_2 + x_3 - u_1 \\ \cos x_2 (\sin x_2 + x_3 - u_1) + t \end{pmatrix}}_{L_{\tilde f}^{(2,2)} h = L_{\tilde f}^2 h} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde G} \begin{pmatrix} \tilde u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\det \tilde G \neq 0$$

$\tilde r = (2, 2)$, ($\tilde r_1 = \tilde r_2$ כי מקרה)

Feed Back Back Stepping

ספר של Khalil, Chapter 14.3

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) + g(\xi) z \\ \dot{z} = u \end{cases} \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,\ z, u \in \mathbb{R}$$

נניח $\dot{\xi} = f(\xi)$ יציבה אסימפטוטית

$\Rightarrow \exists\, V(\xi)$, פונקציית ליאפונוב, נניח ידועה

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \xi}(\xi) \cdot f(\xi) \le -W(\xi) \le 0$$

W מוגדרת חיובית

כאשר אומרת $z=0$ מייצבת את ξ

היעד: לייצב ξ, z גם יחד

פתרון: נבחר

$$V_1 = V(\xi) + \frac{1}{2} z^2$$

$$\dot{V}_1 = \frac{\partial V}{\partial \xi} f + \frac{\partial V}{\partial \xi} g z + z u$$

$$= \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \xi} f}_{\le -W} + z\left(\frac{\partial V}{\partial \xi} g + u\right)$$

$\Leftarrow$ נבחר $u = -\frac{\partial V}{\partial \xi} g - z$

$\dot{V}_1 \le -W(\xi) - z^2 \le 0$ אז נקבל

הכללת המערכת:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) + g(\xi) z, & z = z_*(\xi) \text{ מייצבת את } \xi,\ g(0) \ne 0 \\ \dot{z} = f_1(\xi, z) + g_1(\xi, z) u, & g_1 \ne 0 \text{ (לא מתאפס)} \end{cases}$$

פתרון - $\underset{g(0)\ne 0}{\xi \equiv 0} \Rightarrow z = z_*(0) = 0$ מכאן מקבלים

לכן

נרשום את המערכת בצורה

$$\dot{\xi} = \underbrace{\underbrace{f(\xi) + g(\xi) z_*(\xi)}_{f_0} + g(\xi)}_{V(\xi) \text{ פ.ל.}} \underbrace{\left(z - z_*(\xi)\right)}_{z_1}$$

$$\dot{z}_1 = \left(z - z_*(\xi)\right)' = \underbrace{f_1(\xi, z)} + g_1(\xi, z) u \underbrace{- \frac{\partial z_*}{\partial \xi}\left(f(\xi) + g(\xi) z\right)}$$

$$\dot{z}_1 = \tilde{f}_1(\xi, z_1) + \underbrace{\tilde{g}_1(\xi, z_1)}_{g_1(\xi,\, z_1 + z_*(\xi))} u$$

$$V_1 = V(\xi) + \frac{1}{2} z_1^2$$

עכשיו לוקחים

$$V_1 = V(\xi) + \frac{1}{2}\left(z - z_*(\xi)\right)^2$$

כאשר

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f_0(\xi) + g(\xi) z_1 \\ \dot{z}_1 = \tilde{f}_1(\xi, z_1) + \tilde{g}_1(\xi, z_1 + z_*(\xi)) u = \tilde{u} \end{cases}$$

זה כבר מזכיר Recursion

<u>Strict Feedback form</u>

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x) z_1 \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ g_0(0) \neq 0$$

$$\dot{z}_1 = f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1) z_2 \qquad z_1 \in \mathbb{R},\ z_{1*}(\xi)$$

$$\dot{z}_2 = f_2(x, z_1, z_2) + g_2(x, z_1, z_2) z_3$$

מייצב את זה

$$g(0) \neq 0 \quad x(t) \equiv 0 \Longrightarrow z_1 \equiv 0 \quad \text{גם}$$

$$\ldots \qquad g_1, g_2, \ldots, g_k \neq 0$$

לא מתאפסים

$$\dot{z}_k = f_k(x, \underbrace{z_1, \ldots, z_k}_{z}) + g_k(x, z) u$$

Kokotovic, Freeman, Krstic 1990s
Khalil

Kokotovic: Joy of feedback, 1990

תרגיל 18 (Khalil)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + \overbrace{(x_2 + x_1^2)}^{z} \qquad z \equiv 0 \Rightarrow x_1 \to 0$$

$V = x_1^2$ לפי סעיף ג'

Lyapunov של פונקציה שמצאנו ב-1.א

$$\dot{z} = (x_2 + x_1^2)^{\cdot} = 2x_1\dot{x}_1 + \dot{x}_2 =$$

$$= 2x_1(x_1^2 - x_1^3 + x_2) + u$$

$$V_1 = x_1^2 + \frac{1}{2}z^2 = x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)^2$$ pos. definite, Radially unbounded

$$\dot{V}_1 = -2x_1^4 + z\dot{z} = -2x_1^4 + z\left(2x_1(x_1^2 - x_1^3 + x_2) + u\right)$$

$$u = -2x_1(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - z$$ נבחר

$$\boxed{u = -2x_1^3 + 2x_1^4 - 2x_1x_2 - x_1^2 - x_2}$$

$$\dot{V} = -2x_1^4 - z^2 = -2x_1^4 - (x_1^2 + x_2)^2$$ negative def.

$\Leftarrow$ יציבות אסימפטוטית

סעיף אחרון

$y = x_1 \Rightarrow$ rel. degree $= 2$

Feedback linearization

$$\ddot{x}_1 = \underbrace{(2x_1 - 3x_1^2)\underbrace{(x_1^2 - x_1^3 + x_2)}_{\dot{x}_1}}_{\varphi(x)} + u$$

הסבר במאמר

$\left.\begin{array}{l} \deg x_1 = 3 \\ \deg \dot{x}_1 = 2 \\ \deg \ddot{x}_1 = \deg u = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow u = -\varphi(x) - x_1^{\frac{1}{3}} - |\dot{x}_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign} \dot{x}_1$

מתכנסות תוך זמן סופי

$\left.\begin{array}{l} \deg x_1 = 1 \\ \deg \dot{x}_1 = 2 \\ \deg \ddot{x}_1 = 3 = \deg u \end{array}\right\} \Rightarrow u = -\varphi(x) - x_1^3 - |\dot{x}_1|^{\frac{3}{2}} \operatorname{sign} \dot{x}_1$

מתכנסות תוך זמן קבוע בלוק כל כיוון

זמן קבוע Fixed-Time

זמן לא תלוי בתנאי התחלה

נניח מתחילים ב $t=0$

$$u = -\varphi(x) + \begin{cases} -x_1^{\frac{1}{3}} - |\dot{x}_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign} \dot{x}_1 & t \notin [0,1] \\ -x_1^{3} - |\dot{x}_1|^{\frac{3}{2}} \operatorname{sign} \dot{x}_1 & t \in [0,1] \end{cases}$$

נקבל התכנסות תוך זמן קבוע ל-0.

נוכיח רק יציבות אסימפטוטית –

$$\underbrace{\ddot{x}_1 = -x_1^{\frac{1}{3}}}_{\text{Newton [illegible]}} \underbrace{- |\dot{x}_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign} \dot{x}_1}_{\text{חיכוך}} \quad (*)$$

(מקרה שני דומה)

(מנוגד למהירות $\dot{x}_1$)

$$-x_1^{\frac{1}{3}} = -\frac{d}{dx_1}\left(\frac{3}{4} x_1^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$V = \underbrace{\frac{3}{4} x_1^{\frac{4}{3}}}_{\text{אנרגיה פוטנציאלית}} + \underbrace{\frac{1}{2} \dot{x}_1^2}_{\text{אנרגיה קינטית}}$$

$$\dot{V} = x_1^{\frac{1}{3}} \dot{x}_1 + \dot{x}_1 \ddot{x}_1 = \dot{x}_1\left(\cancel{x_1^{\frac{1}{3}}} - \cancel{x_1^{\frac{1}{3}}} - |\dot{x}_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign} \dot{x}_1\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{V} = -|\dot{x}_1|^{\frac{3}{2}} \le 0} \qquad \dot{x}_1 \operatorname{sign} \dot{x}_1 = |\dot{x}_1|$$

נשתמש ב- Barbalat lemma (כמו Lassale ... פועל מגיע)

$$\dot{V} \le 0 \Rightarrow \underbrace{V \text{ חסומה}}_{} \quad V(x(t)) \le V(x(0))$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{t\to\infty} V(x(t)) \ge 0$$

כל פתרון אפשר להאריך עד ∞ בזמן

$$\dot{V} = -\left|\dot{x}_1^{\frac{3}{2}}\right|$$

$-|\cdot|$ פונקציה ליפשיצית

$\dot{x}_1^{\frac{3}{2}}$ של פונקציה

$$\left(|\dot{x}_1|^{\frac{3}{2}}\right)^{\cdot} = \frac{3}{2}|\dot{x}_1|^{\frac{1}{2}} \ddot{x}_1 \operatorname{sign} \dot{x}_1$$

חסום כאשר V חסום

$$\text{Barbalat} \Rightarrow \dot{V} \to 0 \Rightarrow \dot{x}_1 \to 0 \Rightarrow x_1 \to \text{const}, \ \dot{x}_1 \to 0$$

$V \to \text{const}$

$$\ddot{x} = -x_1^{\frac{1}{3}} - |\dot{x}_1|^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{sign}\,\dot{x}_1 \qquad (*)$$

$x_1(t) \to const$, $\dot{x}_1(t) \to 0$, $|\ddot{x}| \le C_{const}$

$\| \; x_{1*}$ $\qquad$ נניח $x_0 \neq 0$

$\forall t_1 > t_*$ $\qquad \ddot{x} \to -x_{1*}^{\frac{1}{3}} \neq 0$ $\qquad$ אז נקבל

$\varepsilon < \frac{|x_{1*}|}{2}$, $|\dot{x}_1(t_1)| \le \varepsilon$, $|x_1(t_1) - x_{1*}| \le \varepsilon$ $\qquad$ נניח

$$\Rightarrow \dot{x}_1(t_1+\Delta t) = \dot{x}_1(t_1) + \ddot{x}_1(t_1)\Delta t + \cancel{o(\Delta t)}\, R(t_1,\Delta t)$$

$|R| \le \frac{1}{2} C \Delta t^2$

$\cancel{|\dot{x}_1(t_1+\Delta t)| \ge}$

$$|\ddot{x}(t_1)| \ge ||x_{1*}| - \varepsilon|^{\frac{1}{3}} - \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

$$|\dot{x}_1(t_1+\Delta t)| \ge -\varepsilon + (|x_{1*}| - \varepsilon)^{\frac{1}{3}}\Delta t - \frac{1}{2}C\Delta t^2$$

ניקח $\Delta t = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$

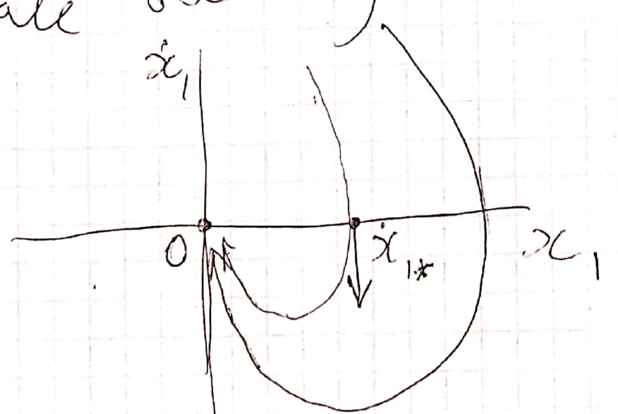
$$\Rightarrow |\dot{x}_1(t_1+\Delta t)| \ge \left(\frac{1}{2}|x_{1*}|\right)^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \delta(\varepsilon) > \varepsilon$$

$\delta(\varepsilon) = o(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$

ל-ε קטן מספיק

סתירה $\Leftarrow$ $x_1, \dot{x}_1 \to 0$

בעצם הוכחנו משפט Lassale ...



כל הסיבות האלה עובדות
עבור מערכות של משוואות הרצף
במגוון כה אף פעם לא נכון

בקרה בתנאי אי-וודאות

Control under Uncertainty conditions

דוגמא

$$\dot{x} = a(t,x) + u$$

$$x, u \in \mathbb{R}$$

$$u = -a(t,x) - x \Rightarrow x \to 0$$

$$u = -a(t,x) - x^{\frac{1}{3}} - x^{3}$$ טוב בזמן קבוע

מה קורה כאשר a לא ידוע?

נניח $|a| \le 1$

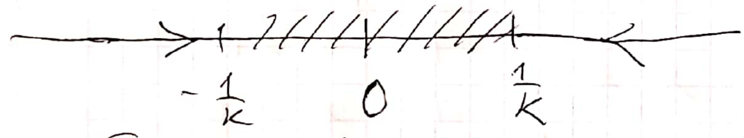
1. High-gain control

$$u = -kx, \quad k \gg 1$$

או יותר טוב:

$$u = \begin{cases} -2\,\mathrm{sign}\,x, & |kx| > 2 \\ -kx, & |kx| \le 2 \end{cases}$$

$$|x| \ge \frac{1}{k} \Rightarrow |u| > |a| \Rightarrow \dot{x}x < 0$$



נניח $a(t,x) = a(t)$, כל הנגזרות חסומות

a לא ידוע,

$$\dot{x} = a - kx$$

$$\dot{x} = -k\left(x - \frac{1}{k}a\right) \Rightarrow |x| \le \frac{1}{k}$$

$$\ddot{x} = -k\left(\dot{x} - \frac{1}{k}\dot{a}\right) \Rightarrow |\dot{x}| \le \frac{1}{k}\sup|\dot{a}|$$

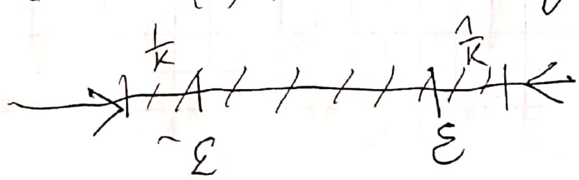
$$\boxed{\left|x^{(i)}\right| \le \frac{1}{k}\sup\left|a^{(i)}\right|}$$

מגניב!!

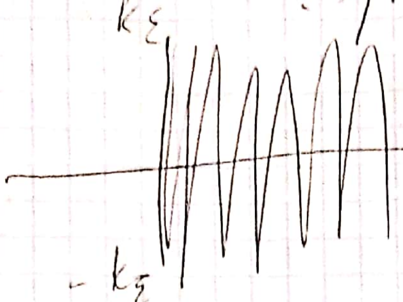
אבל נניח רעש: מדידות $\hat{x} = x(t) + \eta(t)$

$$|\eta(t)| \le \varepsilon$$

$$\dot{x} = a(t,x) - kx - k\eta(t) \Leftarrow |x| \ge \frac{1}{k} + \varepsilon \Rightarrow x\dot{x} < 0$$



הבעיה האמיתית היא הבקר!



$$u=-kx-k\eta$$

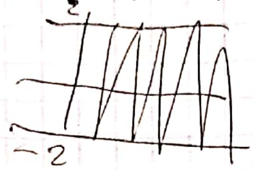
$$|k\eta|\le k\varepsilon$$

יכול להיות בעיה מאוד

אם ישנו ספר גבוה

אז

saturation של u ב ± 2

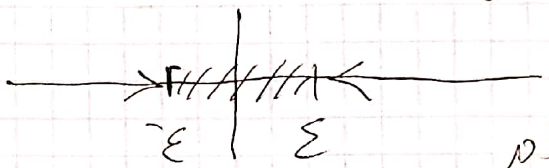


זה נקרא **chattering**

2. Sliding Mode Control

מצב החלקה $\quad u=-2\,\text{sign}\,x$

$$\dot{x}=a-2\,\text{sign}(x+\eta)\ ,\quad |\eta|\le\varepsilon$$



chattering

תמיד קיים במערכת

הבעיה!

$a(t,x)=1 \Rightarrow \dot{x}=1-2\,\text{sign}\,x$

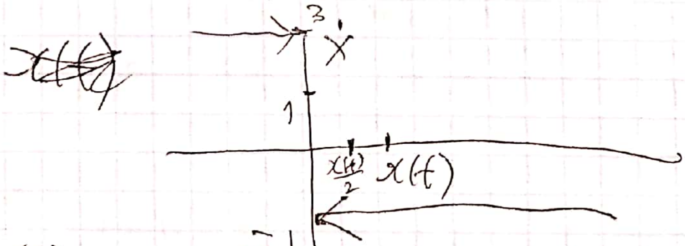
$$\dot{X}=\begin{cases}-1 & x>0\\ 1 & x=0\\ 3 & x<0\end{cases}$$

נניח $x(0)=0$ ⇐ אין פתרון לבעית Cauchy!

כי נניח שיש, אז

$\dot{x}(0)=1 \Rightarrow x(t)=0+1\cdot t+o(t)\ ,\ t\approx 0$

⇐ קיים $t>0$ כך ש $x(t)>0$



אבל אי אפשר להגיע ל-$x(t)$ כי $\dot{x}<0$ בכל הערך

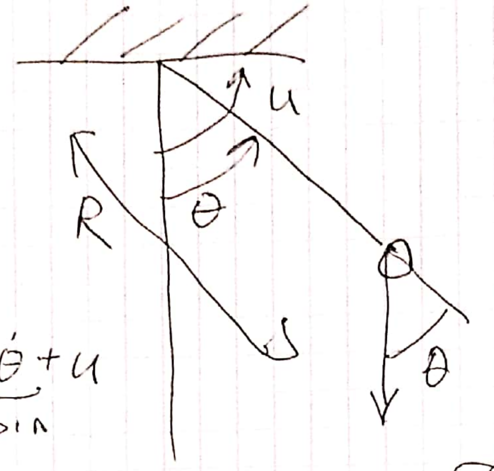
משפט ערך הביניים ⇐ מתקבל ערך $\frac{1}{2}x(t)$ בזמן $t_1<t$

$$\Rightarrow x(t)=\frac{1}{2}x(t)+\int_{t_1}^{t}\dot{x}(s)\,ds=\frac{1}{2}x(t)-(t-t_1)<x(t)$$

סתירה!

דוג' 3 בקרת מערכת של מטוטלת/

עקיבה — מטוטלת — Pendulum



רצוי

$\theta = \theta_c(t)$

$mR^2\ddot{\theta} =$

$= -mgR\sin\theta \underbrace{-k\dot{\theta}}_{\text{חיכוך}} + u$

מקרה מוכלל:

$\ddot{x} = a(t,x,\dot{x}) + b(t,x,\dot{x})u$

$|a| \leq 1, \quad b \in [1,2]$

$|\ddot{x}_c|, |\dot{x}_c| \leq 1, \quad \sigma = x - x_c \to 0$ — **רצוי:**

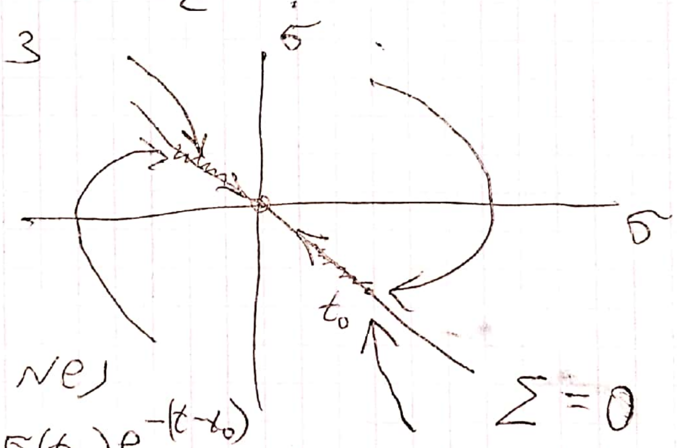
שיטה 1

$\Sigma = \sigma + \dot{\sigma} = (x - x_c) + (\dot{x} - \dot{x}_c)$

$\dot{\Sigma} = a + bu - \ddot{x}_c + \dot{x} - \dot{x}_c$

$|a - \ddot{x}_c - \dot{x}_c| \leq 3$

$u = -(4 + |\dot{x}|)\,\mathrm{sign}\,\Sigma$



כשנגיע ל SM: $\Sigma = 0$

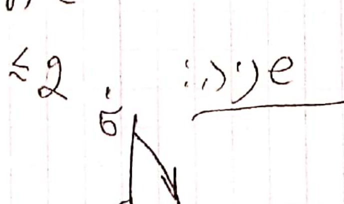
$\Rightarrow \dot{\sigma} + \sigma = 0 \Rightarrow \sigma = \sigma(t_0)e^{-(t-t_0)}$

$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}(t_0)e^{-(t-t_0)}$

שיטה שניה:

$\ddot{\sigma} = a - \ddot{x}_c + bu, \quad |a - \ddot{x}_c| \leq 2$

$u = -\cancel{3}\,\mathrm{sign}\,\sigma - \cancel{4}\,\mathrm{sign}\,\dot{\sigma}$



התכנסות תוך זמן / סופי!