הרצאה 3. בקרה לא לינארית

Slotine, Li p.207, ch. 6

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = f(x) + g_1(x)u_1 + \dots + g_m(x)u_m$$

$$x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ g_i \in \mathbb{R}^n,\ m \le n$$

כאשר הגדרות שונות ב Slotine, Khalil, Isidori

למרות שבעצם צריך לדרוש ש $f, g_1, \dots, g_m$ שיהיו "חלקות"

כאשר אומרים שהם לא סתם פונקציות

$f, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ לא מעניין

ברוב המקרים נסתפק ב $m=1$

נגזרת Lie

$$a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad a(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_n(x) \end{pmatrix}$$

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

הגדרה

$$L_a \varphi(x) = \nabla \varphi(x) \cdot a(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \cdot a(x)$$

בכיוון

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) a_1(x) + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) a_n(x)$$

כאשר נגזרת של φ בכיוון $a(x)$ בנקודה x

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k,\quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \end{pmatrix},\quad L_a f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} L_a f_1(x) \\ \vdots \\ L_a f_k(x) \end{pmatrix}$$

תכונות:

$$L_a(\varphi + \psi) = L_a \varphi + L_a \psi$$

$$L_a(\lambda \varphi) = \lambda L_a \varphi,\quad \lambda \in \mathbb{R},\quad \varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$L_a(\varphi \cdot \psi) = (L_a \varphi)\psi + \varphi(L_a \psi)$$

$$L_{\psi a} \varphi = \psi L_a \varphi \qquad \left(L_{\psi a}\varphi = \nabla\varphi(\psi a) = \psi(\nabla \varphi a)\right)$$

טענה

$(L_a \varphi)(x)$ אינו תלוי בקואורדינטות

$x(t)$

וקטור משיק
Tangent vector

נניח $a \in \mathbb{R}^n$

ניקח קו $x(t) = x(0) + a_0 t + o(t)$

מוגדר המגמות $x_0 = x(0)$, $a_0 = a(x_0)$

אז נקבל

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(x(t)) = \varphi'(x(0))\dot{x}(0) = \varphi'(x_0)\cdot a_0 = L_a\varphi(x_0)$$

הגדרה

וקטור משיק $a_0 \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$ זאת

קבוצת הקווים החלקים המוגדרים

בסביבת $t=0$, ומקיימים $x(0) = x_0$

כך שההפרש של כל שני קווים מהקבוצה

הוא $o(t)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{x_1(t)-x_2(t)}{t} = 0$$

ברור שכל זה שקול

קבוצה, של כל ~~הקווים~~ וקטורים כאלה,

בנק' x_0 נקרא מרחב משיק Tangent Space

בנק' x_0 $a_0 \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$

ההגדרה נכונה גם ליריעה manifold

קבוצה של כל הוקטורים המשיקים

בכל הנקודות נקרא מרחב משיק ליריעה,

Tangent Space $T\mathbb{R}^n = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} T_x\mathbb{R}^n$

Tangent bundle

manifold גם TM $\Leftarrow$ manifold M

אגב ב $M=\mathbb{R}^n$ אנחנו מסתפקים	$\dim TM = 2\dim M$ $\dim T_x M = \dim M$

כמו כן [illegible] מגיע אפשר לפי לקיים
לפעמים על TR^n כעל R^n עצמו.
צריך לקבוע [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible]

$$g: R^n \to R^n$$

אם נגדיר [illegible] לדיפרנציאל

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(x(t)) = g'(x_0)\cdot\dot{x}(0) = g'(x_0)a$$

$a: R^n \to TR^n$ $a(x_0) \in T_{x_0}R^n$, $a(x_0) \longrightarrow g'(x_0)a(x_0) \in T_{g(x_0)}R^n$ לכן

שדה וקטורי

vector field

$g': TR^n \to TR^n$

$y_0 = g(x_0)$

אם

אם אפשר לכתוב

קח $x(t)$, $\dot{x}(0) = a \in T_{x_0}R^n$

$g(x(t)) \in T_{g(x_0)}R^n$ קח $g(x(t))$, [illegible]

$\wedge$

$g'_x(x_0)a \in T_{g^{-1}y_0}R^n$ [illegible]!

$$\hat{a}(y_0) = g'_x(g^{-1}(y_0))\,a(g^{-1}(y_0)),\quad \hat{\varphi}(y_0) \overset{def}{=} \varphi(x_0) = \varphi(g^{-1}(y_0))$$

לזה קוראים
נגזרת
Lie

$$L_a\varphi(x_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}a(x_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\Big|_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}(g^{-1}(y_0))\,\dot{y} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}(g^{-1}(y_0))}_{\nabla\hat{\varphi}(y_0)}\;\underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(g^{-1}(y_0))\,a(g^{-1}(y_0))}_{\hat{a}(y_0)} = L_{\hat{a}}\hat{\varphi}(y_0)$$

[illegible] [illegible] ככה

$x(t) \to y(t)$

[illegible] אחר!

$$\hat{a}(y_0) = \dot{y}\Big|_{t=0} = \frac{\partial y}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial y}{\partial x}(x_0)\underbrace{\dot{x}(0)}_{a(x_0)} = g'_x(g^{-1}(y_0))\,a(g^{-1}(y_0))$$

דוגמא

$$\varphi = \operatorname{tg} x + x\cos y$$

$$a = \begin{pmatrix} x^2 y \\ \ln x \end{pmatrix}$$

$$L_a \varphi(x,y) = \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos y,\ -x\sin y\right)\begin{pmatrix} x^2 y \\ \ln x \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x\right) x^2 y - x\sin y \ln x$$

$$L_f = L_g \Leftrightarrow f = g$$ למדנו

$$L_f x_i = \nabla x_i f = f_i$$ הוכחנו

Input-State Linearization
(Feedback Linearization) SISO case

Relative degree

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x},t) + \bar{g}(\bar{x},t)u \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$y = h(\bar{x},t) \qquad u \in \mathbb{R}$$

$$h: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

מוסיפים קואורדינטה t, $\dot{t} = 1$

שי מקים גמקבלים: $x = (\bar{x},t) \in \mathbb{R}^{n+1}$; $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

הגדרה

relative degree נקרא r
מסדר יחסי

ב-x_0 אם קיימת סביבה של x_0 שבה

$$L_g h \equiv L_g L_f h \equiv \dots \equiv L_g L_f^{r-2} h \equiv 0$$

וגם $L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0$

אם $r=const$ בתחום Ω $\forall (t,x)\in\Omega$
$x\in\Omega$ או

אז אומרים ש- r system rel. degree

הסבר: נגזור את h עד שמופיע u
בדרך כלל במספר פעמים הראשונות

$$\dot h = \frac{\partial}{\partial x} h (f+gu) = L_f h + \cancel{L_g h \cdot u} \to 0 \qquad L_g h = 0$$

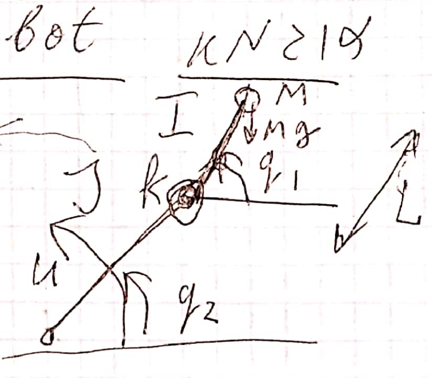
$$\ddot h = \nabla L_f h \cdot \dot x = \nabla L_f h (f+gu) = L_f^2 h + \cancel{L_g L_f h u} \to 0$$

$$L_g L_f h = 0$$

$\dots$

$$h^{(r)} = L_f^r h + \underbrace{L_g L_f^{r-1} h}_{\neq 0} u$$

Single-link flexible-joint robot **דוגמא**



קפיץ עם קבוע קפיץ K

q_1, q_2 - זוויות

I, J - מומנטי אינרציה

$x = (q_1, \dot q_1, q_2, \dot q_2)$ מצבים (4)

u - מומנט כניסה

$$\begin{cases} I\ddot q_1 + MgL\cos q_1 + K(q_1 - q_2) = 0 \\ J\ddot q_2 - K(q_1 - q_2) = u \end{cases}, \quad h = x_1 = q_1$$

המשך

$z_1 = h,\ z_2 = \dot h, \dots$

$z_2 = \dot h = \dot x_1 = x_2 = z_2$

$z_3 = \ddot h = \ddot x_1 = \frac{Mgl}{I}\cos x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) = z_3 = \dots + \frac{k}{I} q_2$

$z_4 = \dddot h = x_1''' = q_1''' = \dots + \frac{k}{I}\dot q_2$

$\dot z_4 = q_1^{V} = \dots + \frac{k}{I}\ddot q_2 = \dots + \underbrace{\frac{k}{IJ}}_{\neq 0} u$, $\boxed{r = 4}$

משפט אם ק"ם rel. degree r אזי $r \le n$

המערכת מקבלת את הצורה,

$z_1 = h,\ z_2 = \dot h = L_f h, \dots,\ z_r = h^{(r-1)} = L_f^{r-1} h$

$\dot z_1 = z_2$

$\dot z_2 = z_3$

$\vdots$

$\dot z_{r-1} = z_r$

$h^{(r)} = \dot z_r = L_f^r h + \underbrace{L_g L_f^{r-1} h}_{\neq 0} u$

$z_1, \dots, z_r$ - בלתי תלויים מאחר ש $\nabla z_1 \dots \nabla z_r$ בלתי תלויים

ואפשר לבחור אותם עוד $\xi_1, \dots, \xi_{n-m}$ קואורדינטות

כך ש $\nabla \xi_1 \dots \nabla \xi_{n-m}, \nabla z_1 \dots \nabla z_r$ בלתי תלויים (∇t),

ומקיימים

$\dot \xi = \psi_1(z, \xi, t) + \psi_2(z, \xi, t) u$

או

$\dot \xi = \psi_1(z, \xi) + \psi_2(z, \xi) u$

ויותר מכך אפשר לבחור $\psi_2 \equiv 0$

(בייחוד במקרה SISO)

אפשר להגדיר בקר חדש

$$\dot z_r = h^{(r)} = \tilde u = \underbrace{L_f^r h}_{\alpha(z)} + \underbrace{L_g L_f^{r-1} h}_{\beta(z)\ \neq 0}\, u$$

$\alpha(z,t)$ או $\beta(z,t)$ או

אם $r=n$ אז אין ξ

ומקבלים Feedback linearization

$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2 \\ \quad \vdots \\ \dot z_r = \tilde u \end{cases}$$

Brunowski system

Controllability form

$$h^{(r)} = \alpha(x,t) + \beta(x,t)\,u$$

$u = -\alpha/\beta \Rightarrow h^{(r)} = 0$ הגדרה

הדינמיקה המתאימה ל

$$z_1 \equiv z_2 \equiv \dots \equiv z_r \equiv 0 \iff h \equiv 0,\ u = -\alpha/\beta$$

נקראת Zero dynamics

$u_{eq} = -\alpha/\beta$ ב-Sliding mode control קוראים

u equivalent

בקר אקוויוולנטי

משפט (Isidori)

לינאריזצ"ת משוב אפשרית $\iff$

קיים פלט $z_1(x)$ כך ש-$\text{rel. degree} = r$

פונקציית תמסורת

דוגמא

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u$$

$b_m \neq 0, \ m \leq n$

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

$s \sim \frac{d}{dt}$

$$Y = G(s) U(s)$$

תוצאת התמרת Laplace

$y(\cdot) \in a(D)^{-1} u$

$y(\cdot) + Y_h = a(D)^{-1} u$

פתרון כללי

שאלה: איך לממש?

$$G(s) = \frac{1}{\underbrace{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}_{a(s)}}$$

$y = x_0$

קל לממש!

$\dot{x}_0 = x_1 = \dot{y}$

$\dot{x}_1 = x_2 = \ddot{y}$

$\dot{x}_{n-2} = x_{n-1} = y^{(n-1)}$

$\dot{x}_{n-1} = -a_0 x - \dots - a_{n-1} x_{n-1} + u$

$$G = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \Rightarrow y = b_m x_m + \dots + b_0 x_0$$

$$y = b\left(\frac{d}{dt}\right) x_0$$

$y = b_m x_0^{(m)} + \dots$

$\dot{y} = b_m x_0^{(m+1)} + \dots$

$y^{(n-m)} = b_m x^{(n)} = b_m(\dots + u) + \dots$

$$\boxed{r = n - m}$$

משל: גלאי ממומש לא ישים

ניקח $u = u_*(t) + \underbrace{\varepsilon\cos(\omega t)}_{\text{רעש}}$

מליניאריות

$y = y_* + y_{\text{רעש}}$

כאשר $y_{\text{רעש}}$ זה תגובה לרעש

$y_{\text{רעש}} = $ חלק ממשי של תגובה ל-$\varepsilon e^{i\omega t}$

לכן ניקח $u = \varepsilon e^{i\omega t}$, $s = i\omega$

$u = \varepsilon e^{st}$ ונחפש פתרון

בצורה $y = c e^{st}$

אז $\forall k \in \mathbb{N}$: $y^{(k)} = c s^k e^{st}$, $u^{(k)} = \varepsilon s^k e^{st}$

מציבים: $c(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)\cancel{e^{st}} = \varepsilon(b_m s^m + \dots + b_0)\cancel{e^{st}}$

$$c = \varepsilon\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad m > n$$

$\Leftarrow$ $|s| = \omega$, $\lim_{|s|\to\infty} c = \infty$

לכן התגובה לרעש קטן אינפיניטסימלי היא גדולה, עד אין-סוף

הרעש תמיד קיים $\Leftarrow$ המערכת לא ישימה.

מקרה פרטי!! גוזר אידיאלי מקיים משוואה

$y = \dot{u}$, $G(s) = s$

המערכת כזו לא ישימה,

אבל אפשר לממש פונקציית תמסורת

$$\frac{s}{1 + \varepsilon_0 s^2}, \quad 0 < \varepsilon_0 \ll 1$$

כזו מערכת תייצר קירוב של נגזרת

וגם תסנן רעשים ~~עם~~ של תדרים גבוהים

אנחנו נבנה גוזר מדויק וגם רובוסטי

אבל הוא לא יהיה מדויק לכל קלט

דוגמא

המערכת:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3^2 \\ \dot{x}_3 = u \end{cases}$$

$$y = x_1^3$$

פלט: $f = \begin{pmatrix} x_2^3 - x_3 \\ x_2 + x_3^2 \\ 0 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h = x_1^3$

$$\dot{y} = 2x_1^3(x_2^3 - x_3) = \dots - 2x_1^3 x_3$$

$$\ddot{y} = \underbrace{\dots}_{L_f^2 y} \underbrace{- 2x_1^3 u}_{L_g L_f y \not\equiv 0}$$

לכן

הסדר היחסי (rel. degree) לא קיים!

כי $L_g L_f h$ לא אפס תמיד

אבל מתאפס בכל נקודה $(0, x_2, x_3)$

ניקח פלט אחר!

$$\hat{y} = y^{\frac{1}{3}} = x_1$$

$$\dot{\hat{y}} = \dots - x_3, \quad \ddot{\hat{y}} = \dots - u, \quad L_g L_f \hat{y} = -1, \quad \boxed{r = 2}$$

zero dynamics: $z_1 = x_1 = 0, \dot{x}_1 = 0,$

$\dot{z}_2 = \dot{x}_1 = x_2^3 - x_3 \qquad x_3 = x_2^3$

$$\ddot{x}_1 = 0 \Rightarrow \underbrace{3x_2^2(x_2 + x_3^2)}_{u_{eq}} - u = 0$$

$$\xi = x_2$$

קואורדינטות חדשות!

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^3 - x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$z_1 = 0 \quad \dot{z}_1 = z_2 = 0 \quad \dot{z}_2 = \ddot{z}_1 = 0$

$x_1 = 0, \quad x_3 = x_2^3, \quad u = 3x_2^2(x_2 + x_3^2)$

zero dynamics: $\boxed{\dot{x}_2 = x_2 + x_3^2 = x_2 + x_2^6}$

סיכום [illegible]: non-minimum phase

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = tg\, x_2 - u \\ \dot{x}_2 = u \\ y = x_1 \end{cases}$$

יציאה: פלט x_1

rel. degree $r=1$

Zero dynamics: $x_1=0,\ \dot{x}_1=0 \cdot tg\, x_2 - u = 0$

$\Rightarrow \dot{x}_2 = tg\, x_2$ אין יציבות

~~פתרון כלל אחד~~

יש רק פתרון אחד בדינמיקה אפס שהוא לא מתפוצץ

$x_2 \equiv 0$

צריך לממש אותו

פתרון! נגדיר כלל חדש $z_1 = x_1 + x_2$

$\dot{z}_1 = tg\, x_2 - \cancel{u} + \cancel{u} = z_2$

$\dot{z}_2 = \ddot{z}_1 = \frac{1}{\cos^2 x_2} \dot{x}_2 = \frac{1}{\cos^2 x_2} u = \tilde{u}$

$\boxed{\text{Feedback linearization}}$ קיבלנו כנה ל controllable form

נציב: $\tilde{u} = -z_1 - z_2$

$\dot{z}_2 + z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow \ddot{z}_1 + \dot{z}_1 + z_1 = 0 \quad z_1, \dot{z}_1 \to 0$

$x_1 + x_2 \Rightarrow 0,\ tg\, x_2 \to 0 \Rightarrow x_2 \to 0,\ x_1 \to 0$

$u = \cos^2 x_2 \cdot \tilde{u} = \cos^2 x_2 (-x_1 - x_2 - tg\, x_2)$

Vector relative degree

הגדרה:

$\boxed{\text{Slotine p.266}}$

MIMO Multi Input Multi Output

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = f(x) + g_1(x)u_1 + \dots + g_m(x)u_m$$

$$g(x) \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad x = (\bar{x}, t)^T$$

או $x = \bar{x}$

$$y = h(x), \quad h: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^m$$

או $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\dot{h}_i = \nabla h_i (f + gu) = L_f h_i + L_{g_1} h_i u_1 + \dots + L_{g_m} h_i u_m$$

1. $\forall i \;\exists r_i: \; L_{g_j} L_f^k h_i = 0 \quad k = 0, 1, \dots, r_i - 1, \; j = 1, \dots, m$

$$\exists j: L_{g_j} L_f^{r_i - 1} h_i \not\equiv 0$$

$\boxed{r = (r_1, r_2, \dots, r_m) \quad \text{total rel. degree} \; |r| = r_1 + r_2 + \dots + r_m}$

$$\begin{pmatrix} h_1^{(r_1)} \\ h_2^{(r_2)} \\ \vdots \\ h_m^{(r_m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_f^{r_1} h_1 \\ L_f^{r_2} h_2 \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1 - 1} h_1, & \dots, & L_{g_m} L_f^{r_1 - 1} h_1 \\ L_{g_1} L_f^{r_2 - 1} h_2, & \dots, & L_{g_m} L_f^{r_2 - 1} h_2 \\ & \dots & \\ L_{g_1} L_f^{r_m - 1} h_m, & \dots, & L_{g_m} L_f^{r_m - 1} h_m \end{pmatrix}}_{\text{High-Frequency Gain Matrix } G} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

2. דרישה $\det G = \det\left[\left(L_{g_j} L_f^{r_i - 1} h_i\right)\right] \neq 0$

משפט אם אפשר להשלים את הקואורדינטות

$$z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1r_1}, \dots, z_{m1}, \dots, z_{m, r_m}$$

מוחלט לא t, $z_{ij} = h_i^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, r_i, \; i = 1, 2, \dots, m$

$$\dot{\xi} = \Psi(z, \xi, t) + \Psi_1(z, \xi, t)u, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n - r_1 - \dots - r_m}$$

מקדם לא אוטונומי