מקרה ליניארי, מבוא.

Controllability.

$\dot{x} = f(t,x,u)$, $(t_0,x_0) \xrightarrow{u(t)} (t_1,x_1)$:יעד

$\dot{x} = Ax + Bu$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$

משפט (Kalman 1960)

$$\text{Controllability} \iff \operatorname{rank}\underbrace{[B, AB, \dots, A^{n-1}B]}_{\text{controllability matrix } W} = n$$

הוכחה:

נניח $x(0) = x_0$, $t_0 = 0$

$x(t) = x_h + x_p$ — פתרון הומוגני

$x_p = e^{At}c(t)$ — וריאציית המקדמים

$$\cancel{Ae^{At}c} + e^{At}\dot{c} = \cancel{Ae^{At}c} + Bu$$

$$\dot{c} = e^{-At}Bu(t), \quad c = \int_0^t e^{-As}Bu(s)\,ds \; + \cancel{C} \to 0$$ לא הגבלות

$$x_p = e^{At}\int_0^t e^{-As}Bu(s)\,ds = \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds$$

פתרון כללי:

$$x = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds$$

היעד: למצוא $u(t)$ כך ש

$$x_1 = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds$$

$x_1 := x_1 - e^{At}x_0$ בה"כ שקול לפתרון של

$$x_1 = \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds$$

למצוא את לכל x_1
עבור t נתון

1. $\operatorname{rank} W < n \Rightarrow$ אין controllability

$\operatorname{rank} W < n \Rightarrow \exists\, c^T \in \mathbb{R}^n: \; \overset{\text{שורה}}{c}[B\; AB \;\dots\; A^{n-1}B] = 0$

$$c\cdot x_1(t) = \int_0^t c\,e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds = \int_0^t \underbrace{c\left(I + \frac{A}{1!}(t-s) + \frac{A^2}{2!}(t-s)^2 + \dots\right)B}_{0}u(s)\,ds = 0$$

$p(A) = 0$ משפט Hamilton כל מטריצה מאפסת

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ פולינום אופייני $\Rightarrow A^n$ — צירוף לינארי של $I, A, \dots, A^{n-1}$

2. כיוון: rank $W = n \Rightarrow$ controllability

נניח לא:

$$x_1 = \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s)\, ds$$

נבחר $u(s)$ בצורה,

$$u(s) = \underset{m\times n}{B^T} \underset{n\times n}{e^{A^T(t-s)}} \underset{n\times 1}{\xi}$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$

$$x_1 = \left(\int_0^t \underbrace{e^{A(t-s)} B}_{n\times m} \underbrace{B^T e^{A^T(t-s)}}_{m\times n} ds\right)\xi$$

SK

$$0 \neq \det \underbrace{\int_0^t e^{A(t-s)} B B^T e^{A^T(t-s)} ds}$$ צר

G Gramian, ברור $G^T = G$

$\xi^T G \xi$ התבנית הריבועית $\iff \det G \neq 0$

חיובי מוגדרת

$$\xi^T G \xi = \int_0^t \underbrace{\xi^T e^{A(t-s)} B B^T e^{A^T(t-s)} \xi}_{\text{מכפלה סקלרית עם עצמו}} ds \overset{\text{נניח}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \xi^T e^{A(t-s)} B \equiv 0 \quad \forall s \in [0, t]$$

$$\iff \xi e^{As} B \equiv 0 \quad \forall s \in [0, t]$$

$$\Rightarrow \xi e^{As} B\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \xi e^{As} B = \frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} \xi e^{As} B = \dots = 0 \Leftarrow$$

$$\xi B = \xi A B = \xi A^2 B = \dots = 0 \Leftarrow$$

$$\xi W = 0 \Leftarrow$$

$$\Rightarrow \text{rank } W < n$$

מוכח

Controllability form

משפט

$\dot{x} = Ax + bu, \quad x, b \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \quad (m=1)$

Controllability $\Leftrightarrow$ קיים בסיס שבו

$x = E\tilde{x}, \quad \dot{\tilde{x}} = E^{-1}AE\tilde{x} + E^{-1}bu$

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \\ -\alpha_0 & \cdots & & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$\tilde{x}_1^{(n)} + \alpha_{n-1}\tilde{x}_1^{(n-1)} + \dots + \alpha_0 \tilde{x}_1 = u$$

$$p(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

פולינום אופייני

רעיון של הוכחה! מחפשים בסיס חדש $e_1, e_2, \dots, e_n$

שבו $e_n = b$

אין ברירה,

$$\begin{aligned}
Ae_n &= e_{n-1} - \alpha_{n-1} e_n, & Ae_n + \alpha_{n-1} e_n &= e_{n-1}, \\
Ae_{n-1} &= e_{n-2} - \alpha_{n-2} e_n, & Ae_{n-1} + \alpha_{n-2} e_n &= e_{n-2} \\
&\dots \\
Ae_2 &= e_1 - \alpha_1 e_n, & Ae_2 + \alpha_1 e_n &= e_1 \\
Ae_1 &= -\alpha_0 e_n & Ae_1 + \alpha_0 e_n &= 0
\end{aligned}$$

מגדיר $e_1 \dots e_{n-1}$

ברור שמתקיים

משפט Hamilton!

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \alpha_{n-2}A^{n-2} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$$

נכפיל ב b

$b = e_n$

$$A^n b + \alpha_{n-1}A^{n-1}b + \dots + \alpha_1 Ab + \alpha_0 b = 0$$

$$A\underbrace{\big(A\underbrace{(A^{n-2}b + \alpha_{n-1}A^{n-3}b + \dots + \alpha_2 b)}_{e_2} + \alpha_1 b\big)}_{e_1} + \underbrace{\alpha_0 b}_{\alpha_0 e_n} = 0$$

נשאר להראות ש E הפיכה

$$E = [e_1, e_2 \dots e_n] = [b \; Ab \dots A^{n-1}b] \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \iddots & \\ \vdots & 1 & & 0 \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

$$e_1 = A^{n-1}b + \alpha_{n-1}A^{n-2}b + \dots + \alpha_1 b$$
$$= W \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

מש"ל

Brunowski form

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{n-1} = \tilde{x}_n \\ \dot{\tilde{x}}_n = \tilde{u} \quad \left(= -\alpha_0 \tilde{x}_1 - \dots - \alpha_{n-1}\tilde{x}_n + u\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{x}_1^{(n)} = \tilde{u}$$

נוסחת Ackermann

אם רוצים פולינום אופייני

$$\tilde{p}(\lambda) = \lambda^n + \tilde{\alpha}_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \tilde{\alpha}_0$$

3 כיון לקחו

$$u = kx$$

שור

כך שמתקיים

$$\det(A + bk - \lambda I) = \tilde{p}(\lambda)(-1)^n$$

$$\boxed{k = -(0, 0, \dots, 0, 1)\, W^{-1}\, \tilde{p}(A)}$$

הוכחה. אלגברי

<u>דוגמא</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W = [b\ Ab\ A^2b] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & -34 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 0.984 & -0.091 & -1.545 \\ 0.091 & 0.091 & 1.545 \\ -0.045 & -0.045 & -0.273 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{P}(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+5) = \lambda^3+8\lambda^2+17\lambda+10$$

$$\tilde{P}(A) = A^3+8A^2+17A+10I = \begin{pmatrix} 25 & 0 & -35 \\ -145 & 420 & 315 \\ 35 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

$$K = -(0,0,1)W^{-1}\tilde{P}(A) = (4{,}091,\ 19{,}091,\ 19{,}545)$$

$u = Kx$ סוגר את הבעיה

Observability

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$ מדידות!

$x(t) = ?$ מטרה צפייה

$\cancel{\dot{y} = CAx + Bu}$

$$y = Cx$$

$$\dot{y} - CBu = CAx$$

$$\ddot{y} - CB\dot{u} - CABu = CA^2x$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)} - \underbrace{(\ldots)}_{u,\dot{u},\ldots,u^{(n-2)}} = CA^{n-1}x$$

ידוע

אם ידועים $y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}$ $\Rightarrow$ $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$ $\Leftarrow$ אפשר למצוא x

המטרה: תוך זמן קצוב להעריך $x(t)$

הגדרה: x_0 נקרא לא נצפה, (unobservable)

אם $x(0)=x_0$, $u(t)\equiv 0 \Rightarrow y(t)\equiv 0 \ \forall t\geq 0$

(A,C) נקראת observable אם אין מצבים לא נצפים חוץ מ-0.

Observability מטריצת Q

משפט (Kalman)

(A,C) observable $\iff \operatorname{rank}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$

הוכחה:

1, ξ בלתי נצפה $\Rightarrow$ $Ce^{At}\xi \equiv 0$

גוזרים ב $t=0$ ומקבלים

$C\xi = 0,\ CA\xi = 0,\ \dots \qquad Q\xi = 0$

2, נניח $\operatorname{rank} Q < n$ $\Rightarrow$ $\exists \xi : Q\xi = 0$

$\Rightarrow$ $Ce^{At}\xi \equiv 0$ (משפט Hamilton)

מש"ל

ברור ש (A,C) observable $\iff$ (A^T,C^T) controllable

בחירת בסיס ל (A^T,C^T) שקול לבחירת בסיס של צורות ל (A,C)

אפשר לבחור פולינום אופייני ל $A^T + C^T K$

$\Rightarrow$ אותו פולינום אופייני ל $A + K^T C$

$\Rightarrow$ קיימת מטריצה L $(= K^T)$

כך ש ל-$A+LC$ יש פולינום רצוי.

נקבל

$$A + LC = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \\ & & 1 & \end{pmatrix}, \quad \tilde{y} = \tilde{x}_n$$

מספור הפוך של הקואורדינטות נותן

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} -\alpha_{n-1} & 1 & & 0 \\ -\alpha_{n-2} & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ -\alpha_0 & & & \end{pmatrix} x, \quad y = \tilde{x}_1$$

Observability form

יש גם נוסחת Ackermann מתאים

Observer Luenberger (1964)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$
$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y) + Bu$$
$$\dot{\hat{x}} = \cancel{A}\hat{x} + LC(\hat{x} - x) + Bu$$

בוחרים L כך ש $A + LC$ Hurwitz

נסמן $\varepsilon = \hat{x} - x$

נקבל מהפרש [illegible]

$$\dot{\varepsilon} = (A + \underset{LC}{LC})\varepsilon \Rightarrow \varepsilon \to 0$$

Output feedback control

Hurwitz

$A + BK$ controllable (A, B)

$A + LC$ observable (A, C)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

המקר
כללי:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BKx & u = K\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BK)x + BK\overbrace{(\hat{x} - x)}^{\varepsilon} \\ \dot{\varepsilon} = (A + LC)\varepsilon \end{cases}$$ הפרש

$$\begin{pmatrix} x \\ \varepsilon \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} A + BK & BK \\ \cancel{A+L} & A + LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

$x \to 0$

$\varepsilon \to 0$

$$P(\lambda) = P_{A+BK}(\lambda) \cdot P_{A+LC}(\lambda)$$ Hurwitz

Ackermann for observer (המשך. **מסנן**

(13)

A, C observable $\Rightarrow$ rank $\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$

$Q = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$, $Q^T = \left(C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T\right)$

מתאימים L כך ש $p\left((A+LC) + \lambda I\right) = \hat{p}(\lambda)$

$\parallel$ $P(\lambda I - (A^T + C^T L^T)) \nRightarrow$

$$L^T = -(0,\dots,0,1)(Q^T)^{-1}\hat{p}(A^T) = -\left(\hat{p}(A) Q^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}\right)^T$$

$$L = -\hat{p}(A) Q^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}$$

מקרה פרטי:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, $c = (1\ 0 \cdots 0)$, $LC = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}(1\ 0 \cdots 0) = \begin{pmatrix} \ell_1 & & \\ \vdots & 0 & \\ \ell_n & & \end{pmatrix}$

$A + LC = \begin{pmatrix} \ell_1 & 1 & & \\ \ell_2 & & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \\ \ell_n & & & 1 \end{pmatrix}$ **The normal observability form**, $P(A+LC) = \lambda^n - \ell_1\lambda^{n-1} - \dots - \ell_n \lambda^0$

סכום סופי

$e^{A\tau} = \left\{ I + \frac{\tau}{1!}A + \dots + \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1} \right.$ $\quad A^n = A^{n+1} = \dots = 0$

Symbolic calculation, $n = 2, 3$ $\quad n=2,\ e^{A\tau} = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$n=3,\ e^{A\tau} = \begin{pmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2} \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

בקרה לא לינארית

Slotine, Li p. 207, ch. 6

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = f(x) + g_1(x)u_1 + \dots + g_m(x)u_m$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$

ברוב המקרים $(m=1)$

מספיק