הרצאה 14

$B_1 = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$

הוכחות למה, נסתכל בספירה הומוגנית

$S_{h1} = \{x \mid \|x\|_h = 1\}$, $\|x\|_h = \left(|x_1|^{\frac{d}{m_1}} + \ldots + |x_n|^{\frac{d}{m_n}}\right)^{\frac{1}{d}} \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

$n=1$; S_{h1} $\overset{-1}{\oplus}$ $\overset{0}{—}$ $\overset{1}{\oplus}$ x $d > \max(m_1, \ldots, m_n)$, $n > 1$

טריוויאלי

טריוויאלי $\{\varphi_2 = 0\} \cap S_{h1} = \emptyset$ אם

$\varphi_1\big|_{\Omega} > 0$, קומפקט $\Leftarrow$ $\underbrace{\{\varphi_2 = 0\}\big|_{S_{h1}}}_{\Omega} \neq \emptyset$ $\boxed{140}$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0:\ \varphi_1\big|_{\underbrace{(\Omega + \varepsilon B_1) \cap S_{h1}}_{\Omega_1}} > 0$, $\Rightarrow \varphi_2\big|_{\cancel{(\Omega+\varepsilon B_1)\cap} S_{h1} \setminus \Omega_1} \geq \delta_1 > 0$

מקומפקטיות של Ω

מקומפקטיות $S_{h1} \setminus \Omega_1$

$\Leftarrow$

$|\varphi_1\|_{S_{h1} \setminus \Omega_1} \leq \delta_2$

$\lambda = \delta_2 / \delta_1 + 1$

$\Leftarrow$

$\varphi_1 + \lambda \varphi_2 > 0 \Leftarrow (\varphi_1 + \lambda \varphi_2)\big|_{S_{h1}} > 0$

$x \neq 0$

מ.ש.ל.

Filtering Differentiator

$N = n_d + n_f$

$n_d, n_f \geq 0$

$$n_f \begin{cases} \dot{w}_1 = -\tilde{\lambda}_N L^{\frac{1}{N+1}} [w_1]^{\frac{N}{N+1}} + w_2 \\ \ldots \\ \dot{w}_{n_f} = -\tilde{\lambda}_{n_d+1} L^{\frac{n_f+N}{N+1}} [w_1]^{\frac{n_d+2}{\cancel{n_d+1}\,N+1}} + w_{n_f+1} \end{cases}$$

$$w_{n_f+1} = z_0 - f$$

$$n_d+1 \begin{cases} \dot{z}_0 = -\tilde{\lambda}_{n_d} L^{\frac{n_f-1}{N+1}} [w_1]^{\frac{n_d}{N+1}} + z_1 \\ \ldots \\ \dot{z}_{n_d-1} = -\tilde{\lambda}_1 L^{\frac{N}{N+1}} [w_1]^{\frac{1}{N+1}} + z_{n_d} \\ \dot{z}_{n_d} = -\tilde{\lambda}_0 L [w_1]^0 = -\tilde{\lambda}_0 L \operatorname{sign} w_1 \end{cases}$$

(141)

גזרה רקורסיבית

~~$\dot{w}_1 = -\lambda_N L^{N}[w_1]$~~ $\quad N = n_d + n_f$

n_f
$$\begin{cases} \dot{w}_1 = -\lambda_N L^{\frac{1}{N+1}}[w_1]^{\frac{N}{N+1}} + w_2 \\ \dot{w}_2 = -\lambda_{N-1} L^{\frac{1}{N}}[w_2 - \dot{w}_1]^{\frac{N-1}{N}} + w_3 \\ \quad \ldots \\ \dot{w}_{n_f} = -\lambda_{n_d+1} L^{\frac{1}{n_d+2}}[w_{n_f} - \dot{w}_{n_f-1}]^{\frac{n_d+1}{n_d+2}} + w_{n_f+1} \end{cases}$$

$$w_{n_f+1} = z_0 - f, \quad n_f = 0 \Rightarrow \dot{w}_{n_f} \triangleq 0$$

משני
הגזרים

$-f_0$

n_d+1

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = -\lambda_{n_d} L^{\frac{1}{n_d+1}}[w_{n_f+1} - \dot{w}_{n_f}]^{\frac{n_d}{n_d+1}} + z_1 \\ \dot{z}_1 = -\lambda_{n_d-1} L^{\frac{1}{n_d}}[z_1 - \dot{z}_0]^{\frac{n_d-1}{n_d}} + z_2 \\ \quad \ldots \\ \dot{z}_{n_d-1} = -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}}[z_{n_d-1} - \dot{z}_{n_d-2}]^{\frac{1}{2}} + z_{n_d} \\ \dot{z}_{n_d} = -\lambda_0 L[z_{n_d} - \dot{z}_{n_d-1}]^0 \end{cases}$$

$-f_0^{(n_d+1)}$

$f = f_0$ הוכחת התכנסות במקרה ללא רעש

$L \sim$ מחלקים

$$\omega_j = w_j / L, \quad \sigma_i = (z_i - f_0^{(i)})/L \quad i = 0, \ldots, n_d$$
$$j = 1, \ldots, n_f$$

$n_f \geq 1$

נקבל;

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = -\tilde{\lambda}_N[\omega_1]^{\frac{N}{N+1}} + \omega_2 \\ \quad \ldots \\ \dot{\omega}_{n_f} = -\tilde{\lambda}_{n_d+1}[\omega_1]^{\frac{n_d+1}{N+1}} + \sigma_0 \\ \dot{\sigma}_0 = -\tilde{\lambda}_{n_d}[\omega_1]^{\frac{n_d}{N+1}} + \sigma_1 \\ \quad \ldots \\ \dot{\sigma}_{n_d-1} = -\tilde{\lambda}_1[\omega_1]^{\frac{1}{N+1}} + \sigma_{n_d} \\ \dot{\sigma}_{n_d} = -\tilde{\lambda}_0[\omega_1]^0 - \frac{f_0^{(n_d+1)}}{L} \in -\tilde{\lambda}_0[\omega_1]^0 + [-1, 1] \end{cases}$$

יציבות
בזמן סופי
מובטח

$n_f \geq 1$ $\quad |\zeta| \leq \varepsilon$ בנוכחות רעש חסום:

נקבל

142

$\deg \omega_j = \overset{n_d+n_f}{N} + 2 - j$

$\deg z_i = n_d + 1 - i$

$\deg t = -1$

$$\dot{\omega}_1 = -\tilde{\lambda}_N [\omega_1]^{\frac{N}{N+1}} + \omega_2$$

$$\ldots$$

$$\dot{\omega}_{n_f} \in -\tilde{\lambda}_{n_d+1} [\omega_1]^{\frac{n_d+1}{N+1}} + \sigma_0 + \frac{\varepsilon}{L}[-1,1]$$

$$\dot{\sigma}_0 = -\tilde{\lambda}_{n_d} [\omega_1]^{\frac{n_d}{N+1}} + \sigma_1$$

$$\ldots$$

$$\dot{\sigma}_{n_d} \in -\tilde{\lambda}_0 [\omega_1]^0 + [-1,1]$$

$n_f = 0$

$$\dot{\sigma}_0 \in -\tilde{\lambda}_{n_d} \left[\sigma_0 + \frac{\varepsilon}{L}[-1,1]\right]^{\frac{n_d}{n_d+1}} + \sigma_1$$

$$\ldots$$

$$\dot{\sigma}_{n_d} \in -\tilde{\lambda}_0 \left[\sigma_0 + \frac{\varepsilon}{L}[-1,1]\right]^0 + [-1,1]$$

בשני המקרים משקל של $\frac{\varepsilon}{L}$ הוא $n_d + 1$

$$\deg \sigma_0 = \deg\left(\frac{\varepsilon}{L}\right) = n_d + 1$$

$$|\omega_j| \leq \gamma_{\omega j} \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{n_d+n_f+2-j}{n_d+1}}$$ ⇐ הדיוק

$$|\sigma_i| = \left|\frac{z_i - f_0^{(i)}}{L}\right| \leq \gamma_{zi} \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{n_d+\cancel{n_f}+1-i}{n_d+1}}$$

$$|\omega_j| \leq \gamma_{\omega j} L \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{n_d+n_f+2-j} = \gamma_{\omega j} L^{\frac{-n_f-1+j}{n_d+1}} \varepsilon^{\frac{n_d+n_f+2-i}{n_d+1}}$$

$$|z_i - f_0^{(i)}| \leq \gamma_{zi} L \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{n_d+1-i}{n_d+1}} = \gamma_{zi} L^{\frac{i}{n_d+1}} \varepsilon^{\frac{n_d+1-i}{n_d+1}}$$

!! asymptotically optimal המגזר ⇐

143

$$\eta = \eta_0(t) + \eta_1(t) + \ldots + \eta_{n_f}(t)$$ ← (הגדרה עמ' 144)

נניח

$|\eta_0(t)| \le \varepsilon_0,$ ~~$\dot\xi_{j1} = \xi_{j2}, \dot\xi_{j2} = \xi_{j3}, \ldots, \dot\xi_{jj-1} = \xi_{jj}, \dot\xi_{jj} = \eta_j$~~

$|\xi_{j1}| \le \varepsilon_j$ $\quad j = 1, 2, \ldots, n_f$

משפט הגיון הוא

$$|\omega_1| \le \gamma_{\omega_1} L \rho^{n_d+n_f+1}$$

$$|z_i - f_0^{(i)}| \le \gamma_{z_i} L \rho^{n_d+1-i}$$

$$\rho = \max\left[\left(\frac{\varepsilon_0}{L}\right)^{\frac{1}{n_d+1}}, \ldots, \left(\frac{\varepsilon_{n_f}}{L}\right)^{\frac{1}{n_d+n_f+1}}\right]$$

~~$\dot\xi_{21} = \eta_1, \dot\xi_{11} = \xi_{12}, \dot\xi_{12} = \eta_2$~~

~~$|\xi_{21}| \le \varepsilon_1, |\xi_{11}| \le \varepsilon_2$~~

$n_f = 2$ נקח הוכחה;

$\ddot\xi_2 = \eta_2, |\xi_2| \le \varepsilon_2$

$\dot\xi_1 = \eta_1, |\xi_1| \le \varepsilon_1$

$\dot\xi_{j1} = \xi_{j2}, \dot\xi_{j2} = \xi_{j3}, \ldots,$ ~~$\dot\xi_{j,n_f-j} = \xi_{j,n_f+1-j}, \dot\xi_{j,n_f+1-j} = \eta_j$~~

$j = 1, 2, \ldots, n_f$ ~~$\xi_{j1}^{(n_f+1-j)} = \eta_{n_f+1-j}$~~ $\xi_j^{(j)} = \eta_j$

$|\xi_j| \le \varepsilon_j$ מספר סיון [illegible] הוא $-\eta_j$

$$\dot\omega_1 = -\tilde\lambda_{N+1}[\omega_1]^{\frac{N}{N+1}} + \omega_2$$

$$\dot\omega_2 = -\tilde\lambda_N[\omega_1]^{\frac{N-1}{N+1}} + \sigma_0 + \frac{\eta_0}{L} + \frac{\dot\xi_1}{L} + \frac{\ddot\xi_2}{L}$$

...

$$\Rightarrow \left(\omega_1 - \frac{\dot\xi_2}{L}\right)^{\cdot} = -\tilde\lambda_{N+1}\left[\omega_1 - \frac{\xi_2}{L} + \frac{\xi_2}{L}\right]^{\frac{N}{N+1}} + \omega_2 - \frac{\dot\xi_2}{L} - \frac{\xi_1}{L} + \frac{\xi_1}{L}$$

$$\left(\omega_2 - \frac{\ddot\xi_2}{L} - \frac{\xi_1}{L}\right)^{\cdot} = -\tilde\lambda_N\left[\omega_1 - \frac{\xi_2}{L} + \frac{\xi_2}{L}\right] + \sigma_0 + \frac{\eta_0}{L}$$

...

(144)

$\tilde{\omega}_1 = \omega_1 - \frac{\xi_{2}}{L}$, $\left|\frac{\xi_{2}}{L}\right| \le \frac{\varepsilon_2}{L}$, $\dot{\xi}_2 = \eta_2$ (נתון)

$\tilde{\omega}_2 = \omega_2 - \frac{\dot{\xi}_{2}}{L} - \frac{\xi_{1}}{L}$, $\left|\frac{\xi_{1}}{L}\right| \le \frac{\varepsilon_1}{L}$, $\dot{\xi}_1 = \eta_1$

אז מקדמים

$$\dot{\tilde{\omega}}_1 \in -\tilde{\lambda}_{N+1}\left[\tilde{\omega}_1 + \frac{\varepsilon_2}{L}[-1,1]\right]^{\frac{N}{N+1}} + \tilde{\omega}_2 + \frac{\varepsilon_1}{L}[-1,1]$$

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 \in -\tilde{\lambda}_{N}\left[\tilde{\omega}_1 + \frac{\varepsilon_2}{L}[-1,1]\right]^{\frac{N-1}{N+1}} + \sigma_0 + \frac{\varepsilon_0}{L}[-1,1]$$

$\ldots$

$$\Rightarrow \deg\frac{\varepsilon_2}{L} = \deg\tilde{\omega}_1 = \deg\omega_1 = N+1 = n_d+3$$

$$\deg\frac{\varepsilon_1}{L} = \deg\tilde{\omega}_2 = N = n_d+2, \quad \deg\frac{\varepsilon_0}{L} = \deg\sigma_0 = N-1 = n_d+1$$

מ.ש.ל.

~~מקרה של SMC~~ $\nu : R_+ \to R$

__הערה:__ $\nu(t)$ - מדידה לפי Lebesgue ואינטגרבילי

נקרא אות מספר סינון k (filtering order)

אם קיימת פונקציה $\xi : R_+ \to R$

כך שהיא חסומה ו- $\xi^{(k)} = \nu(t)$ כמעט בכל t

$\eta = \eta_0 + \eta_1 + \ldots + \eta_{n_f}$, מספר סינון k - η_k

---

$$\begin{cases} \dot{w} = \Omega_{n_d,n_f}(z_0 - f, w, L) \\ \dot{z} = \mathcal{D}_{n_d,n_f}(w_1, z, L) \end{cases}$$

$\vec{\lambda} = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots\}$ נתון

כקדם

$\tilde{\omega} = \Omega_{n_d,n_f}\left(\sigma_0 - \frac{\eta_0}{L}, \tilde{w} + h, 1\right)$, אז מקדמים $h = -\left(\frac{\xi_{n_f}}{L}, \ldots, \frac{\xi_1}{L}\right)^T$

$\dot{z} = \mathcal{D}_{n_d,n_f}\left(\tilde{w}_1 + \frac{\xi_{n_f}}{L}, z, 1\right)$ $\quad \xi_k^{(k)} = \eta_k, |\xi_k| \le \varepsilon_k$

145

$$\left.\begin{array}{l}\sigma^{(r)} \in [-C, C] + [K_m, K_M]u \\ u = -\alpha \Psi_r(\vec{\sigma}_{r-1})\end{array}\right\}$$

FTS

הבקר בנוי
כמו שראינו

$\Psi_r \in QC$,חסום

$\deg u = 0$

אופציות משקל

$\deg \sigma = 1,\ \deg \sigma^{(i)} = 1 + iq,\ q = -\frac{1}{r}$

$\deg \sigma = r,\ \deg \sigma^{(i)} = r - i,\ q = -1$

Output Feedback

$$\begin{cases} \sigma^{(r)} \in [-C, C] + [K_m, K_M]u \\ u = -\alpha \Psi_r(z), \quad L \geq C + K_M \max|u| \\ \dot{w} = \Omega_{r-1, n_f}(w, z_0 - \hat{\sigma}, L), \quad \hat{\sigma} = \sigma + \eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_{n_f} \\ \dot{z} = \mathcal{D}_{r-1, n_f}(w_1, z, L) \end{cases}$$

$\deg z_i = \deg \sigma^{(i)}$, $\deg w_j = \overset{+n_f q + q}{\deg \sigma - jq}$, $j = 1, \dots, n_f$

$\deg w_j = \deg \sigma + (n_f + 1 - j)q$

הגוזר מתכנס בזמן סופי ⇐ כל המערכת
הפיוך בנוכחות הרעש $\eta = \eta_0 + \dots + \eta_{n_f}$
ושהיו, לא גלולהמד

$$\begin{cases} \cancel{z_i}\,|\sigma^{(i)}| \leq \mu_i \rho^{r-i} \\ |w_1| \leq \mu_{w_1} \rho^{r+n_f} \\ \rho = \max\left[\tau, \varepsilon_0^{\frac{1}{r}}, \varepsilon_1^{\frac{1}{r+1}}, \dots, \varepsilon_{n_f}^{\frac{1}{r+n_f}}\right] \end{cases}$$

הומוגניות ⇐
מקדמים
תלויים
ב $\Psi_r, \alpha, C, K_m, K_M$
$L, \vec{\lambda}$

ללא $\eta_1, \dots, \eta_{n_f}$ היינו מקבלים גם הערכת w_j

Discretization

המערכת $\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u$, $x\in\mathbb{R}^n$,

$\sigma : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

שאלה בזמן רציף

אבל המקרה אפשר למדוד רק בזמן בדיד ערך משמש

$$\dot{\sigma} \in [-C, C] + [K_m, K_M]u$$

zero hold

$$u = -\alpha\Psi(z(t_k)),\quad t\in[t_k, t_{k+1}),\ \underbrace{t_{k+1}-t_k=\tau_k}_{\tau_k\le\tau}$$

Euler

$$w(t_{k+1}) = w(t_k) + \Sigma_{r-1,n_f}(w(t_k), z_0(t_k)-\hat{\sigma}(t_k), L)\tau_k$$

$$z(t_{k+1}) = z(t_k) + \mathcal{D}_{r-1,n_f}(w_1(t_k), z(t_k), L)\tau_k$$

המצב הומוגני:

$$(t, \sigma, \dots, \sigma^{(r-1)}, w_1, \dots, w_{n_f}, z_0, \dots, z_{r-1}, t_k, \tau) \longmapsto$$

$$(\varkappa t, \varkappa^r\sigma, \dots, \varkappa\sigma^{(r-1)}, \varkappa^{r+n_f}w_1, \dots, \varkappa^{r+1}w_{n_f}, \varkappa^r z_0, \dots, \varkappa z_{r-1}, \varkappa t_k, \varkappa\tau)$$

אבל עדין! (מקדמים אחרים)

כל זה נכון גם למקרה כללי

$$\sigma^{(r)} \in [-C, C]\,\|\vec{\sigma}_{r-1}\|_h^{1+rq} + [K_m, K_M]u, \quad q \geq -\frac{1}{r}$$

$$u = -\alpha\varphi_r(\vec{\sigma}_{r-1}), \quad |u| \leq \tilde{\alpha}\,\|\vec{\sigma}_{r-1}\|_h^{1+rq}$$

מאמרים בצורה הומוגני כללי (IFAC 2020)

Hanan, Jbara, Levant

147

גזירה נומרית: גוזר לבנט'

$$f_0(t_{k+1}) = f_0(t_k) + \frac{1}{1!}\dot{f}_0(t_k)\tau_k + \dots + \frac{1}{n_d!} f_0^{(n_d)}(t_k)\tau_k^{n_d} + R_0$$

$$R_0 \in \frac{1}{(n_d+1)!} L[-1,1]\tau_k^{n_d+1}$$

$$\dots$$

$$f_0^{(n_d-1)}(t_{k+1}) \in f_0^{(n_d-1)}(t_k) + \frac{1}{1!} f_0^{(n_d)}(t_k)\tau_k + \frac{1}{2!}L[-1,1]\tau_k^2$$

Euler

מגזירים

$$w_{\cancel{1}}(t_{k+1}) = w_1(t_k) + \left(-\tilde{\lambda}_N L^{\frac{\cancel{1}}{N+1}}[w_1(t_k)]^{\frac{N}{N+1}} + w_2(t_k)\right)\tau_k$$

$$\dots$$

$$w_{n_f}(t_{k+1}) = w_{n_f}(t_{k+1}) + \left(-\tilde{\lambda}_{n_d+1} L^{\frac{n_f}{N+1}}[w_1(t_k)]^{\frac{n_d+1}{N+1}} + w_{n_f+1}(t_k)\right)\tau_k$$

$$w_{n_f+1} = Z_0 - f$$

$$Z_0(t_{k+1}) = Z_0(t_k) + \left(-\tilde{\lambda}_{n_d} L^{\frac{n_f+1}{N+1}}[w_1(t_k)]^{\frac{n_d}{N+1}} + Z_1(t_k)\right)\tau_k$$

$\deg Z_0 = n_d + 1$

$$+ \frac{1}{2!}Z_2(t_k)\tau_k^2 + \dots + \frac{1}{n_d!}Z_{n_d}(t_k)\tau_k^{n_d}$$

$$Z_1(t_{k+1}) = Z_1(t_k) + \left(-\tilde{\lambda}_{n_d-1} L^{\frac{n_f+2}{N+1}}[w_1(t_k)]^{\frac{n_d-1}{N+1}} + Z_2(t_k)\right)\tau_k$$

$$\underbrace{+ \frac{1}{2!}Z_3(t_k)\tau_k^2 + \dots + \frac{1}{(n_d-1)!}Z_{n_d}(t_k)\tau_k^{n_d-1}}_{n_d \text{ משקל}}$$

$\deg Z_1 = n_d$

$$\dots$$

$$Z_{n_d-1}(t_{k+1}) = Z_{n_d-1}(t_k) + \left(-\tilde{\lambda}_1 L^{\frac{N}{N+1}}[w_1(t_k)]^{\frac{1}{N+1}} + Z_{n_d}(t_k)\right)\tau_k$$

$$Z_{n_d}(t_{k+1}) = Z_{n_d}(t_k) + \left(-\tilde{\lambda}_0 L\,[w_1(t_k)]^0\right)\tau_k$$

במשוואה ל z_i מחסרים $f_0^{(i)}(t_{k+1})$, מחלקים ב L

$$\sigma_i=(z_i-f_0^{(i)})/L$$

מקבלים ל z_0

$$\sigma_0(t_{k+1})=\sigma_0(t_k)+(-\tilde{\lambda}_{n_d}[w_1(t_k)]^{\frac{n_d}{N+1}}+\sigma_1(t_k))\tau_k-\frac{R_0}{L}$$

$R_0\in\frac{1}{(n_d+1)!}L[-1,1]\tau_k^{n_d+1}$, מחלקים ב τ_k

$$\dot{\sigma}_0\in-\tilde{\lambda}_{n_d}L^{\frac{n_d+1}{N+1}}[w_1(t_k)]^{\frac{n_d}{N+1}}+\sigma_1(t_k)+[-1,1]\frac{\tau^{n_d}}{(n_d+1)!}$$

אחרי אינטגרציה ב $t\in[t_k,t_{k+1}]$, $\tau_k\le\tau$

לומר,

$$\boxed{\dot{\sigma}_1\in-\tilde{\lambda}_{n_d-1}[w_1(t_k)]^{\frac{n_d-1}{N+1}}+\sigma_2(t_k)+[-1,1]\frac{\tau^{n_d-1}}{n_d!}}$$

...

$$\dot{\sigma}_n\in-\tilde{\lambda}_0[w_1(t_k)]^0+[-1,1]$$

ההפרעה היא כבר הומוגנית $\deg\tau=1$
אבל משפיעה על הפרמטר ρ
(משפיעה על המקדמים של האסימפטוטיקה,)

<u>משפט</u> $\eta_1=\eta_2=\dots=\eta_f=0$ אם מקבלים כעבור זמן סופי

$$|w_j|\le\gamma_{w_j}L\cdot\rho^{n_d+n_f+2-j}\quad, j=1,\dots,n_f$$

$$|z_i-f_0^{(i)}|\le\gamma_{z_i}L\rho^{n_d+1-i}\quad, i=0,\dots,n_d$$

$$\rho=\max\left(\tau,\left(\frac{\varepsilon_0}{L}\right)^{\frac{1}{n_d+1}}\right)$$

discrete filtering order

במקרה הדיסקרטי אם אורכים

(149) η_k הוא הנגזרת מסדר סינון דיסקרטי k

$$\xi_{k1}(t_{k+1}) - \xi_{k1}(t_k) = \xi_{k2}(t_k)\tau_k$$

$$\vdots$$

$$\xi_{k,k_{n_f}}(t_{k+1}) - \xi_{k,k_{n_f}}(t_k) = \eta_k(t_k)\tau_k$$

$$\rho = \max\left[\tau, \left(\frac{\varepsilon_0}{L}\right)^{\frac{1}{n_d+1}}, \dots, \left(\frac{\varepsilon_{n_f}}{L}\right)^{\frac{1}{n_d+n_f+1}}\right]$$ אם לא

מקרה כללי: אורכים (אלגבריים)

$$|\eta_k| \le L_{\eta k}$$

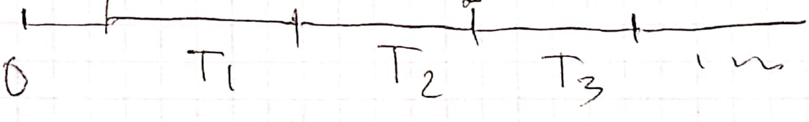
(יכול להיות גדול מאוד)

$$\rho = \max\left[\tau, \max_{1\le \ell \le n_f} \max_{1\le k \le \ell} \left(\frac{L_{\eta\ell}}{L}\left(\frac{\varepsilon_\ell}{L_{\eta\ell}}\right)^{\frac{k+1}{\ell+1}}\right)^{\frac{1}{n+k+1}}\right]$$

(Levant, Livne 2020 EJC)

התוצאות אפשר להרחיב גם לרעשים שמקיימים אותם תנאים לוקלית בתת-קטעים

$\xi_{k1}^{(k)} = \eta_k$, $|\xi_{k1}| \le \varepsilon_k$, $\xi_{k\ell}^{(\ell)}$ חסומים.



$T_k \ge T$

$$\eta_k = \tilde{\eta}_k + \tilde{\eta}_1 + \tilde{\eta}_0$$

לוקלי

גלובליים

נכון גם בזמן רציף, גם בזמן דיסקרטי

דוגמא

$$\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{1}{\omega^k}\cos(\omega t)\right] = \pm \frac{\cos}{\sin}(\omega t)$$

דוגמא

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{1}{\omega^k}[\cos(\omega t)]^{k-\frac{1}{2}}\right) = \eta_k$$ לא חסום!