משפט 1, רקורסיה (נוסח אחר של משפט שהיה)

$q\in\mathbb{R}$ $\quad 1+rq\geq 0,\ (q\geq -\frac{1}{r})$

$\deg\sigma=1,\ \deg\dot\sigma=1+q,\ \dots,\ \deg\sigma^{(r)}=1+rq\geq 0$ (128)

נניח $\deg\varphi_k=1+kq,\ \sigma^{(k)}+\varphi_k(\vec\sigma_{k-1})=0$

יציב AS, $\varphi_k\in C,\ 1\leq k\leq r-1$

נניח גם ש $\tilde\varphi_{k+1}:\mathbb{R}^{k+1}\to\mathbb{R}$ שקולת סימן ל

$\sigma^{(k)}+\tilde\varphi_k(\vec\sigma_{k-1})-\delta$

QC , $\deg\tilde\varphi_{k+1}=1+(k+1)q$

אז לכל $\beta>0$ גדול מספיק, $\varphi_{k+1}=\beta\tilde\varphi_k$

המשואה $\sigma^{(k+1)}+\varphi_{k+1}(\vec\sigma_k)=0$

יציבה אסימפטוטית (AS)

והבקרים

$u_{k+1}=-\alpha\tilde\varphi_{k+1}$,

$u_{k+1}=-\alpha\|\vec\sigma_k\|_h^{1+(k+1)q}\operatorname{sign}\tilde\varphi_{k+1}(\vec\sigma_k)$

לכל $\alpha>0$ גדול מספיק מייצבים

אם $\sigma^{(k+1)}\in[-C,C]\|\vec\sigma_k\|_h^{1+(k+1)q}+[K_m,K_M]u_{k+1}$

כמו משפט 2:

$u_k=-\alpha\varphi_k(\vec\sigma_{k-1})$

$u_k=-\alpha(\operatorname{sign}\varphi_k(\vec\sigma_{k-1}))\cdot\|\vec\sigma_{k-1}\|_h^{1+kq}$

מייצבים $\sigma^{(k)}\in[-C,C]\|\vec\sigma_{k-1}\|_h^{1+kq}+[K_m,K_M]u_k$

נוסח שקול:

$q=\pm1,0,\ \deg t=\mp1,0=p$

$\deg\sigma=\cancel{r}q+d,\ d\geq0,\ \deg\sigma^{(k)}=(r-k)q+d,\ k=0,\dots,r$

$=rp+d,\quad \deg\sigma^{(k)}=(r-k)p+d$

128a

משפט [illegible] [illegible]

$\deg \sigma > 0 \qquad p = -q \qquad \deg t = p \in \mathbb{R}$

$\deg \dot{\sigma} = \deg \sigma - \deg t = \deg \sigma - p$

$\deg \sigma^{(k)} = \deg \sigma - kp = \deg \sigma + kq, \quad k = 0, \dots, r$

$\deg \sigma^{(r)} = \deg \sigma + rq > 0$

$A.S: \quad \sigma^{(k)} + \varphi_k(\vec{\sigma}_{k-1}) = 0, \quad 1 \le k \le r-1$

$\tilde{\varphi}_{k+1}: \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}, \quad \boxed{\tilde{\varphi}_{k+1} \in QC}, \quad \varphi_k \in C(\mathbb{R}^k)$

$\tilde{\varphi}_{k+1} \in QC$ שקולה סימן ל-$\sigma^{(k)} + \varphi_k(\vec{\sigma}_{k-1})$

$\deg \tilde{\varphi}_{k+1} = \deg \sigma^{(k+1)}$

אז לכל $\beta > 0$ גדול מספיק

$A.S \quad \sigma^{(k+1)} + \varphi_{k+1}(\vec{\sigma}_k) = 0, \quad \varphi_{k+1} = \beta \tilde{\varphi}_k$

ולכל $\alpha > 0$ גדול מספיק

$u_{k+1} = -\alpha \tilde{\varphi}_k(\vec{\sigma}_k)$

$u_{k+1} = -\alpha \|\vec{\sigma}_k\|_h^{\deg \sigma^{(k+1)}} \operatorname{sign} \tilde{\varphi}_k(\vec{\sigma}_k)$

[illegible] אסימפטוטית

$\sigma^{(k+1)} \in [c, C] \|\vec{\sigma}_k\|_h^{\deg \sigma^{(k+1)}} + [K_m, K_M] u_{k+1}$

KN219

$\deg t = \frac{1}{r}$, $\deg \sigma^{(r)} = 1 + rq = 0$, $q = -\frac{1}{r}$, r–SMC

$\deg \sigma = 1$, $\deg \dot\sigma = 1+q, \ldots, \deg \sigma^{(r-1)} = 1 + (r-1)q = \frac{1}{r}$

$$\boxed{\deg \sigma = r,\ \deg \dot\sigma = r-1, \ldots, \deg \sigma^{(r-1)} = 1 \Leftarrow q=-1 \quad \deg t = 1}$$

$k = 1, \ldots, r$ $\quad u_k = -\alpha_k \varphi_k(\vec\sigma_{k-1})$ controllers

AS $\quad \sigma^{(k)} + \varphi_k(\vec\sigma_{k-1}) = 0$, $\deg \varphi_k = r-k$

$\sigma^{(r)} + \varphi_r(\vec\sigma_{r-1}) = 0$, $\deg \varphi_r = 0$ $\quad k = r$

$u_r = -\alpha_r \varphi_r(\vec\sigma_{r-1})$ – r–SMC

→ r–SM homogeneity (Levant 2005)

(Levant 2005)

$k=1 \quad \dot\sigma + \beta_0 [\sigma]^{\frac{r-1}{r}} = 0 \qquad \varphi_1 = \beta_0 [\sigma]^{\frac{r-1}{r}}$, $\beta_0 > 0$, $N_1 = \beta_0 |\sigma|^{\frac{r-1}{r}}$

$k=2 \quad \ddot\sigma + \beta_1 \dfrac{\dot\sigma + \beta_0[\sigma]^{\frac{r-1}{r}}}{|\dot\sigma| + \beta_0 |\sigma|^{\frac{r-1}{r}}} \left(|\dot\sigma| + \beta_0 |\sigma|^{\frac{r-1}{r}}\right)^{\frac{r-2}{r-1}} = 0$

$\Psi_2 = \dfrac{\dot\sigma + \beta_0[\sigma]^{\frac{r-1}{r}}}{|\dot\sigma| + \beta_0 |\sigma|^{\frac{r-1}{r}}}$, $\quad \varphi_2 = \beta_1 \underbrace{\left(|\dot\sigma_1| + \beta_0 |\sigma|^{\frac{r-1}{r}}\right)^{\frac{r-2}{r-1}}}_{N_2} \Psi_2$

$|\Psi_2| \le 1$, $\deg \Psi_2 = 0$

$k \quad \sigma^{(k)} + \beta_k \Psi_k(\vec\sigma_{k-1}) \cancel{(|\dot\sigma| + \beta_0 |\sigma}\ N_k(\vec\sigma_{k-1}) = 0$

$k \le r-1 \qquad \cancel{(|\sigma^{(k-1)}| + \beta_{k-1}}$

$\deg N_k = r-k$, $\quad$ – N_k

$\deg \Psi_k = 0 \qquad |\Psi_k| \le 1$, $\varphi_{k+1} = \sigma^{(k)} + \beta_k \Psi_k N_k$

$k+1 \quad \sigma^{(k+1)} + \beta_{k+1} \Psi_{k+1}(\vec\sigma_k) N_{k+1}(\vec\sigma_k) = 0$

$\Psi_{k+1} = \dfrac{\sigma^{(k)} + \beta_k \Psi_k(\sigma_{k-1}) N_k(\sigma_{k-1})}{|\sigma^{(k)}| + \beta_k N_k(\sigma_{k-1})}$, $\quad N_{k+1} = \left(|\sigma^{(k)}| + \beta_k \Psi_k N_k\right)^{\frac{r-k-1}{r-k}}$

(130) $\varphi_r = \beta_r \psi_r$, $N_r = 1$ נקבל ל $k=r$

קראני לבקר הנכר, קוואזי רציף (קודמת ראשון)

קוואזי QC r-SMC

בדיוק אותו פיתוח אפשר לקיים לכל

$$q \geq -\frac{1}{r}$$
$$\deg \sigma^{(k)} = 1+kq$$
$$\deg t = -q$$

$$q \geq -1$$
$$\deg \sigma^{(k)} = r+kq = r - k\deg t$$
$$\deg t \leq 1$$

<u>דוגמא</u> נניח ל control ל-$r=3$ ל $q \geq -\frac{1}{3}$

אמרנו כי $\deg \sigma = 1, \deg \dot\sigma = 1+q, \deg \ddot\sigma = 1+2q,$
$\deg \dddot\sigma = 1+3q \geq 0$

$r=1$ $\quad \dot\sigma + \underbrace{\beta_0 [\sigma]^{1+q}}_{\varphi_1} = 0 \qquad AS \Leftarrow \beta_0 > 0$

$r=2$ $\quad \ddot\sigma + \underbrace{\beta_1\left([\dot\sigma]^2 + \beta_1'[\sigma]^{2(1+q)}\right)^{\frac{1+2q}{2(1+q)}}}_{\varphi_2(\vec\sigma_1)} = 0$, $\beta_i > 0$ מתאימים

$r=3$ $\quad \underbrace{\dddot\sigma}_{1+3q} + \underbrace{\beta_2 \underbrace{\left(\underbrace{\ddot\sigma + \varphi_2(\sigma,\dot\sigma,\ddot\sigma)}_{1+2q}\right)\underbrace{\|\vec\sigma_2\|^q}_{q}}_{\tilde\varphi_3}}_{\varphi_3} = 0$

$$u = -\alpha\,\tilde\varphi_3(\vec\sigma_2) = -\alpha\left(\ddot\sigma + \beta_1\left([\dot\sigma]^2 + \tilde\beta_0[\sigma]^{2(1+q)}\right)^{\frac{1+2q}{2+2q}}\right) \cdot \|(\sigma,\dot\sigma,\ddot\sigma)\|_h^q$$

סגור

$$\|(\sigma,\dot\sigma,\ddot\sigma)\|_h = \max\left(|\sigma|, |\dot\sigma|^{\frac{1}{1+q}}, |\ddot\sigma|^{\frac{1}{1+2q}}\right)$$

$$\|\vec\sigma_2\|_h \approx \left(|\sigma|^2 + 2|\dot\sigma|^{\frac{2}{1+q}} + |\ddot\sigma|^{\frac{2}{1+2q}}\right)^{\frac{1}{2}}$$ או

$$\tilde u = u \cdot \arctan\left(\frac{\varphi_3}{\|\vec\sigma_2\|_{h1}^{1+3q}}\right)$$ זה אפשרי גם

גזירה הומוגנית

הבעיה: נמדדת פונקציה

$$f(t)=f_0(t)+\eta(t),\ t\in[0,\infty)$$

$f_0(t)\in C^{n}$, ~~נגזרת~~ הנגזרות מהמעלה $f_0^{(n)}$

להעריך $f_0,\dot{f}_0,\dots,f^{(n)}$

בתנאים האלה זה בלתי אפשרי

אי-שוויון של Landau-Kolmogorov

$g: I\to\mathbb{R}$, $I\subset\mathbb{R}$

קטע, אולי אינסופי

נניח g גזירה, ברציפות n פעמים

$g^{(n)}$ רציפה, מהמעלה $|g^{(n+1)}|$ חסומה

נסמן $M_k=\sup_{t\in I}|g^{(k)}|$

אז אם קיימים M_0, M_{n+1} אז קיימים

גם $M_1,M_2,\dots,M_n$

ו-

$$M_k\le\gamma_{n,k}M_0^{\frac{n+1-k}{n+1}}M_{n+1}^{\frac{k}{n+1}}$$

הנוסחה נכונה ב $I=\mathbb{R}$, $I=\mathbb{R}_+=[0,\infty)$

היא לא נכונה ב $I=[a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$

Ditzian, Chen 1993 שגיאה!

פורמלית (בעיתי!)

$$\left.\begin{matrix}g^{(n+1)}=0\\ n\ge1\end{matrix}\right]\Rightarrow g=\alpha t,\ \alpha>0,\ t\in[0,1]$$

$$\sup|g|=\alpha\le\gamma_{n,0}\,\alpha^{\frac{n+1-0}{n+1}}\,0^{\frac{0}{n+1}}\le\gamma_{n,0}\alpha$$

פורמלית $0^{\frac{0}{n+1}}=1$

ברור

$\gamma_{n,0}=1$

$\gamma_{n,n+1}=1$

אבל

$$\sup|\dot g|=\alpha\le\gamma_{n,1}\,\alpha^{\frac{n}{n+1}}\,0^{\frac{1}{n+1}}=0$$

סתירה

דוגמה

$g(t) = \cos\left(L^{\frac{1}{n+1}} t\right) \Rightarrow M_0 = 1,\ M_k = L^{\frac{k}{n+1}},\ M_{n+1} = L$

מכאן ידוע ש- $\gamma_{n,k} \geq 1$

$\gamma_{1,0} = \gamma_{1,2} = 1,\ \gamma_{1,1} = \cancel{2}$, $I = \mathbb{R}_+,\ n=1$

$\gamma_{1,1} = \sqrt{2} \Leftarrow I = \mathbb{R}$ Landau 1913

ל- $I = \mathbb{R}$

$I = \mathbb{R}$ Kolmogorov 1939

$\boxed{\gamma_{n,k} \quad k \in \mathbb{N}}$

$K_{n,k} \overset{\text{סימון}}{=} \gamma_{n,k} \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$

(נוסחא די מסובכת)

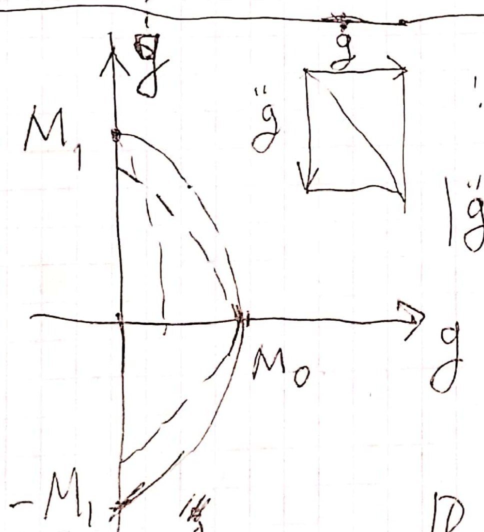
$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n-k=\text{const}}} K_{n,k} = \frac{\pi}{2}$

למקרה ה- $I = \mathbb{R}_+$ הערכים של $\gamma_{n,k}$, $n>1$, $k \neq 0, n+1$

קיימים אך לא ידועים

מקרה $\mathbb{R}$

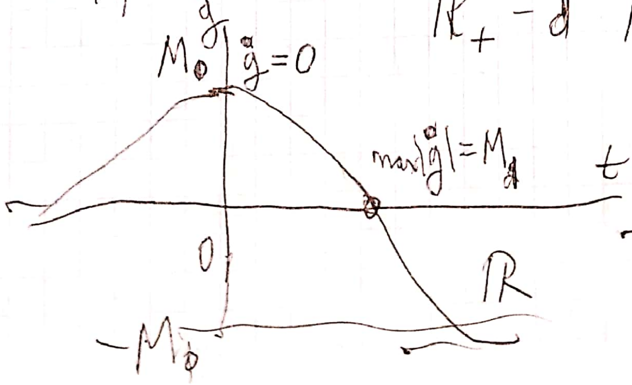
מיוחד, $\mathbb{R}_+$: $\gamma_{1,1}$

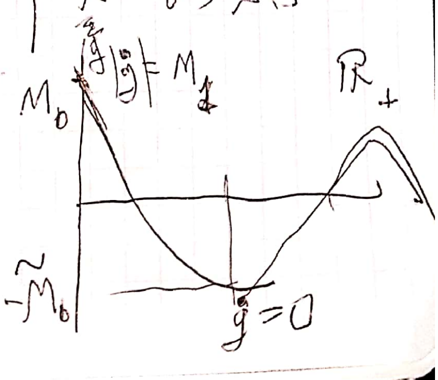


$|\ddot{g}| \leq 1$ Rescaling

$M_0 = \frac{1}{2} M_1^2,\ M_1 = \sqrt{2} M_0$

בהבדל בין $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}_+$





(133)

<u>Levant, Livne, Yu, 2017</u>

<u>משפט</u>

$M_0 \le \varepsilon$, $M_{n+1} \le L$, $I = [a, b]$, $\Delta > 0$

$$M_0 = \sup_{[a-\Delta, b+\Delta]} |g|, \quad M_{n+1} = \sup_{[a-\Delta, b+\Delta]} |g^{(n+1)}|$$

אז ל Δ גדול מספיק $\Delta = \Delta(\varepsilon, L)$

מתקיים

$$\sup_{[a,b]} |g^{(k)}| \le K_{n,k} L^{\frac{k}{n+1}} \varepsilon^{\frac{n+1-k}{n+1}}$$

(הכללה, משוערת ה-Kolmogorov)

~~משפט~~ הכללה: זוכר מסדרת כה כל אלגוריתם (אופרטור)

$$\mathcal{D}_n : f \longmapsto \begin{pmatrix} \hat{f}_\varepsilon \\ \vdots \\ \hat{f}^{(n+1)}_\varepsilon \end{pmatrix} \in C(\mathbb{R}_+), \quad f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

מעוגלת, לפי צעד

<u>סימון:</u>

f_0 — פונקציה $Lip_n(L)$

$f_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, אם $f_0^{(n)}$ - ליפשיצית עם קבוע L

<u>משפט</u> אם הבורר $\mathcal{D}$ מקיים ב $Lip_n(L)$

בקטע $[a, b]$ ל $a - \Delta \ge 0$ (משפט קודם)

אז לכל $f_1, f_2 \in Lip_n(L)$, $|f_1 - f_2| \le \varepsilon$

בקטע $[a, b]$ מתקיים

$$\left| \widehat{f_1^{(k)}}(t) - \widehat{f_2^{(k)}}(t) \right| \le K_{n,k} 2^{\frac{k}{n+1}} L^{\frac{k}{n+1}} \varepsilon^{\frac{n+1-k}{n+1}}$$

והערכה, הזו אי אפשר לשפר (הקבועים מינימליים)

Sharp inequality

הצגרה הזאלר מסדר n נקרא

asymptotically optimal $f_0 \in Lip_n(L)$

לכל δ $|z| \le \varepsilon$, $f = f_0 + z$ (134)

אם לכל t ולכל k מתקיים

$$\left| \widehat{f_0^{(k)}(t)} - f_0^{(k)}(t) \right| \le \gamma_{n,k} L^{\frac{k}{n+1}} \varepsilon^{\frac{n+1-k}{n+1}}$$

לכל δ $L > 0, \varepsilon \ge 0$

מגמה קיום גזרר אופטימלי

הוכחה קבוצה $Lip_n L \subseteq C[\mathbb{R}_+]$

היא קבוצה locally compact &

מגמה לכל קטע סופי $\mathbb{R}_+$ מגמו

$\mathcal{D}_{n,k}$: $\arg\min\limits_{\substack{g \in Lip_n(L) \\ t \in [a,b]}} \|f-g\|_C$

f - מינימ לכל מגמון סופי ב $t \in [a,b]$

מכנוס

High Gain Observer (Khalil)

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = -\tilde{\lambda}_n \mu (z_0 - f(t)) + z_1, \\ \dot{z}_1 = -\tilde{\lambda}_{n-1} \mu^2 (z_0 - f(t)) + z_2 \\ \quad \ldots \\ \dot{z}_n = -\tilde{\lambda}_0 \mu^{n+1} (z_0 - f(t)) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{gathered} f = f_0,\ z = 0 \\ f_0 \in Lip_n(L) \\ |z_i - f_0^{(i)}| = O(\mu^{-(n+1-i)}) \end{gathered}}$$

פולינום אופייני

$P_\mu = s^{n+1} + \tilde{\lambda}_n \mu s^n + \ldots + \tilde{\lambda}_0 \mu^{n+1}$,

$P_1 = (s+\xi_1)\ldots(s+\xi_n)$, $\xi_k = \alpha_k + \beta_k i$, $\alpha_k > 0$

$P_\mu = (s+\mu\xi_1)\ldots(s+\mu\xi_n)$ $\mu \gg 1$ High Gain

(135) (Levant 2003) גוזר לוין

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = -\tilde{\lambda}_n L^{\frac{1}{n+1}} [z_0 - f(t)]^{\frac{n}{n+1}} + z_1 \\ \dot{z}_1 = -\tilde{\lambda}_{n-1} L^{\frac{2}{n+1}} [z_0 - f(t)]^{\frac{n-1}{n+1}} + z_2 \\ \dots \\ \dot{z}_{n-1} = -\tilde{\lambda}_1 L^{\frac{n}{n+1}} [z_0 - f(t)]^{\frac{1}{n+1}} + z_n \\ \dot{z}_n = -\tilde{\lambda}_0 L [z_0 - f(t)]^0 = -\tilde{\lambda}_0 L \operatorname{sign}(z_0 - f(t)) \end{cases}$$

הוא הופך למערכת הומוגנית ל $f(t)\equiv 0$

עם משקלים $q=-1$, $\deg t = 1$, $\deg z_0 = n+1$,

$\deg z_i = n+1-i$, $\deg z_n = 1$

משפט: קיימים כאלה $\tilde{\lambda}_0, \dots, \tilde{\lambda}_n > 0$

ו $\gamma_i \geq 1$ ש כעבור זמן סופי לכל $f_0 \in Lip_n(L)$

$f = f_0 + \eta$, $|\eta| \leq \varepsilon$

$$\boxed{\left| z_i - f_0^{(i)} \right| \leq \gamma_i L^{\frac{i}{n+1}} \varepsilon^{\frac{n+1-i}{n+1}}}$$

asymptotically optimal

נכון גם ל $\varepsilon = 0$!

נכתוב את כל, נעבור לגזירה רקורסיבית

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = -\lambda_n L^{\frac{1}{n+1}} [z_0 - f(t)]^{\frac{n}{n+1}} + z_1 \\ \dot{z}_1 = -\lambda_{n-1} L^{\frac{1}{n}} [z_1 - \dot{z}_0]^{\frac{n-1}{n}} + z_2 \\ \dots \\ \dot{z}_{n-1} = -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}} [z_{n-1} - \dot{z}_{n-2}]^{\frac{1}{2}} + z_1 \\ \dot{z}_n = -\lambda_0 L [z_n - \dot{z}_{n-1}]^0 \end{cases}$$

קל לראות ש

~~$z_i - z_{i-1} =$~~

$$\dot z_i = -\tilde\lambda_{n-i} L^{\frac{i+1}{n+1}} [z_0 - f(t)]^{\frac{n-i}{n+1}} + z_{i+1}$$

136

$$z_{i+1} - \dot z_i = \tilde\lambda_{n-i} L^{\frac{i+1}{n+1}} [z_0 - f]^{\frac{n-i}{n+1}}$$

$$z_0 - f = [z_{i+1} - \dot z_i]^{\frac{n+1}{n-i}} \cdot L^{-\frac{i+1}{n-i}} \tilde\lambda_{n-i}^{-\frac{n+1}{n-i}}$$

מציבים במשוואה של $\dot z_{i+1}$ ומקבלים

את הגזרה הרקורסיבית

כך מקבלים

$$\tilde\lambda_n = \lambda_n, \quad \tilde\lambda_{n-1} = \lambda_{n-1} \tilde\lambda_n^{\frac{n}{n+1}}, \quad \ldots$$

$$\tilde\lambda_k = \lambda_k \tilde\lambda_{k+1}^{\frac{k}{k+1}}, \ldots, \quad \tilde\lambda_0 = \lambda_0 \tilde\lambda_1^{\frac{0}{1}} = \lambda_0$$

$k = n-1, n-2, \ldots, 0$

קודם נניח $\ell = 0$ $\quad f = f_0$

נסמן $\sigma_i = \frac{z_i - f_0^{(i)}}{L}$

שגם הגזרות $f_0^{(i)}$ $-f_0^{(i+1)}$

מציבים במקום $\dot z_i = \ldots$

מחלקים ב־L

ומקבלים

$$\dot\sigma_0 = -\tilde\lambda_n [\sigma_0]^{\frac{n}{n+1}} + \sigma_1$$

$$\dot\sigma_1 = -\tilde\lambda_{n-1} [\sigma_0]^{\frac{n-1}{n+1}} + \sigma_2$$

$$\vdots$$

$$\dot\sigma_n = -\tilde\lambda_0 [\sigma_0]^0 + \frac{f_0^{(n+1)}}{L} \in -\tilde\lambda_0 [\sigma_0] + [-1, 1]$$

137

צורה רקורסיבית:

$$\begin{cases} \dot\sigma_0 = -\lambda_n [\sigma_0]^{\frac{n}{n+1}} + \sigma_1 \\ \dot\sigma_1 = -\lambda_{n-1}[\sigma_1 - \dot\sigma_0]^{\frac{n-1}{n}} + \sigma_2 \\ \quad \vdots \\ \dot\sigma_n \in -\lambda_0 [\sigma_n - \dot\sigma_{n-1}]^0 + [-1,1] \end{cases}$$

הוכחה, לפי אינדוקציה:

$n=0$

$$\dot\sigma_0 \in -\lambda_0 [\sigma_0]^0 + [-1,1] = -\lambda_0 \operatorname{sign} \sigma_0 + [-1,1]$$

כל $\lambda_0 > 1$ מתאים

צעד אינדוקציה:

נניח $\tilde\lambda_0, \tilde\lambda_1, \dots, \tilde\lambda_n > 1$ מתאימים כך שהכלל

$\dot z = \mathcal{D}_n(z_0 - f_0, z, L, \vec\lambda_n)$ $\quad z \in \mathbb{R}^{n+1}$

מתכנס לכל $f_0 \in Lip_n(L)$ $\quad \vec{\tilde\lambda}_n = (\tilde\lambda_0, \dots, \tilde\lambda_n)$

אז הכלל

$$\dot z_0 = -\tilde\lambda_{n+1} L^{\frac{1}{n+2}} [z_0 - f_0]^{\frac{n+1}{n+2}} + z_1$$

$$\dot{\vec z}_{1,n} = \mathcal{D}_n(z_1 - \dot z_0, \vec z_{1,n}, L, \vec\lambda_n)$$

מתכנס לכל $f_0 \in Lip_{n+1}(L)$, $\tilde\lambda_{n+1} > 0$ גדול מספיק

הוכחה: כי שימוקה מקבלת צורך,

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_0 = -\lambda_{n+1}[\sigma_0]^{\frac{n+1}{n+2}} + \sigma_1 \\ \dot{\sigma}_1 = -\lambda_n[\sigma_1 - \dot{\sigma}_0]^{\frac{n}{n+1}} + \sigma_2 \\ \quad \vdots \\ \dot{\sigma}_n \in -\lambda_0[\sigma_n - \dot{\sigma}_{n-1}]^0 + [-1,1] \end{cases}$$

A. Levant
A. Ibara

(138)

$\tilde{\sigma}_0 = c\sigma_0$ נגדיר

$C = \lambda_{n+1}^{\frac{n+2}{n+1}}$

$\dot{\tilde{\sigma}}_0 = -c([\tilde{\sigma}_0]^{\frac{n+1}{n+2}} - \sigma_1)$ אז

נניח באינדוקציה שזה נכון

$a > 2(n+2)$ כלשהו נניח

$V_n(\vec{\sigma}_{1,n})$ קיימת פונקצית ליאפונוב

הומוגנית $\deg V_n = a$, $\dot{\vec{\sigma}}_{1,n+1} = D_n(\sigma_1, \vec{\sigma}_{1,n+1}, \vec{\zeta})$ של המערכת

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1 = -\lambda_n[\sigma_1 - \frac{1}{c}\dot{\tilde{\sigma}}_0]^{\frac{n}{n+1}} + \sigma_1 \\ \quad \vdots \\ \dot{\sigma}_{n+1} \in -\lambda_0[\sigma_{n+1} - \dot{\sigma}_1] + [-1,1] \end{cases}$$

$$\sup \dot{V}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}) \le \dot{V}_n\Big|_{\zeta=0} + \left|\frac{\partial V_n}{\partial \sigma_{n+1}}\right| \cdot 1 < 0$$

קטנה

אין

$$-\frac{\partial V_n}{\partial \sigma_{n+1}} \cdot \frac{f_0^{(n+1)}}{L}$$

δ

$\dot{\tilde{\sigma}}_0 = \tilde{\sigma}_0 = 0$

$(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}) \neq 0$

$$V_{n+1} = W_{n+1}(\tilde{\sigma}_0, \sigma_1) + V_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})$$

$$W_{n+1} = \int_{[\sigma_1]^{\frac{n+2}{n+1}}}^{\tilde{\sigma}_0} \left([s]^{\frac{a-(n+2)}{n+2}} - [\sigma_1]^{\frac{a-(n+2)}{n+1}}\right) ds \ge 0$$

Rd.

139

5K

$$\dot{W}_{n+1} = \left([\tilde{\sigma}_0]^{\frac{a-(n+2)}{n+2}} - [\sigma_1]^{\frac{a-(n+2)}{n+1}} \right) \dot{\tilde{\sigma}}_0$$

$$- \frac{a-(n+2)}{n+1} \int_{[\sigma_1]^{\frac{n+2}{n+1}}}^{\tilde{\sigma}_0} [\sigma_1]^{\frac{a-(n+2)}{n+1}-1} ds =$$

<0 n.d.

$$= -C \left([\tilde{\sigma}_0]^{\frac{a-(n+2)}{n+2}} - [\sigma_1]^{\frac{a-(n+2)}{n+1}} \right) \left([\tilde{\sigma}_0]^{\frac{n+1}{n+2}} - \sigma_1 \right)$$

$$- \frac{a-(n+2)}{n+1} [\sigma_1]^{\frac{a-(n+2)}{n+1}-1} \left(\tilde{\sigma}_0 - [\sigma_1]^{\frac{n+2}{n+1}} \right)$$

$$\dot{V}_{n+1} = -cH_1 + \underbrace{\tilde{G} + \dot{V}_n}$$

$\tilde{\sigma}_0 - [\sigma_1]^{\frac{n+2}{n+1}} = 0 \Leftrightarrow \dot{\tilde{\sigma}}_0 = 0 \Leftrightarrow \tilde{\sigma}_0 = 0$ הפכו $\dot{V}_n \cancel{\leq} 0$

$(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}) \neq 0$

$$\tilde{G}\Big|_{\dot{\tilde{\sigma}}_0 = 0} = 0$$

(Andrieu , ~~F~~ Praly, Astolfi .. 2008) למה

~~$\varphi(s)+$~~ $\varphi_1(x) + \lambda \varphi_2(x)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in QC$

$\varphi_2 \geq 0$, $\varphi_1\Big|_{\varphi_2 = 0} \cancel{\geq} 0$, $\deg \varphi_1 = \deg \varphi_2$

$\Rightarrow \forall \lambda \geq 0$ $\varphi_1(x) + \lambda \varphi_2(x)$

גדול מספיק   מוגדר חיובית

(מוגדר שלילית)

(Sic.N