הרצאה 11

דיוק של הכללה הומוגנית (105)

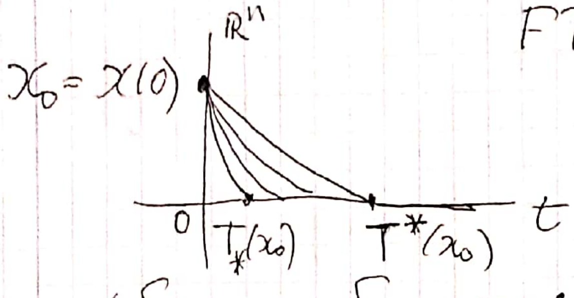
זמן התכנסות

$x\in\mathbb{R}^n$, $\dot{x}\in F(x)$
הכללת Filippov

נניח $q<0$, כלו' $\deg f = p = -q > 0$

אז יציבות אסימפטוטית AS גוררת יציבות
בזמן סופי FTS

לכל תנאי התחלה,
יש אולי ∞ פתרונות
(לפחות אחד)



משפט זמן התכנסות מקסימלי (מינימלי)
הוא פונקציה חצי רציפה, מלמעלה (מלמטה)
של תנאי התחלה, הומוגנית מסדר p.

$$c_m\|x\|_h^p \le \underset{\text{מינימלי}}{T_*(x)} \le T_{conv} \le \underset{\text{מקסימלי}}{T^*(x)} \le C_M\|x\|_h^p$$

הגדרה $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, חצי רציפה

מלמעלה: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \varphi(x)\le\varphi(x_0)+\varepsilon$

מלמטה: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \varphi(x)\ge\varphi(x_0)-\varepsilon$

מלמעלה & מלמטה = רציפות רגילה

הוכחת המשפט

נגדיר $\Phi(x_0)$ - קבוצת
פתרונות עם $x(0)=x_0$

$$T^*(x_0)=\sup\left\{t_1\ge 0 \;\middle|\; \forall x(\cdot)\in\Phi(x_0)\ \forall t>t_1\ x(t)=0\right\}<\infty$$
הוכחנו

$$C_M=\sup_{\|x\|_h=1} T^*(x)<\infty$$
יותר מכך הוכחנו
גרוע

$\cancel{C_1=\inf}\ T$

$$T_*(x_0)=\inf\left\{t_1>0 \;\middle|\; \exists x(\cdot)\in\Phi(x_0)\ \forall t>t_1\ x(t)=0\right\}$$

$$c_m=\inf_{\|x\|_h=1} T_*(x)<\infty$$

$0< c_m \le C_M$ כי $\|x\|$ חסום ב $\|x\|\in[0.5,2]$

(106)

מהומוגניות

$$C_m \|x_0\|_h^p \le T_{conv}(x_0) \le C_M \|x_0\|_h^p$$

(לפי הגדרה)

ניקח קטע $\quad I = [0, C_M \|x_0\|_h^p + 1]$

כל הפתרונות הסבירים מוגדרים בו

א. קיים פתרון $x^*_*(\cdot) \in \Phi(x_0)$ כך ש $\quad T^*_{conv} = T^*(x_0)$

$\Phi(x_0)\big|_I \subset C[I]$ compact

$x^*(\cdot) \in \Phi(x_0) : \quad T_{conv} = T_*(x_0)$

$\varphi_k : T_{conv}(\varphi_k) \to T^*(x_0)$

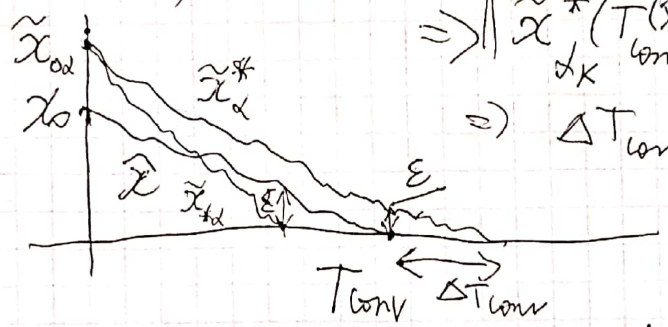
$\varphi_{k_i} \rightrightarrows \varphi^* \Rightarrow T_{conv}(\varphi^*) = T^*(x_0)$

מתלות רציפה בתנאי ההתחלה

$$\Phi(x_0) \ni \hat{x}^*(\cdot) \underset{\text{בתת-סדרה}}{\Leftarrow} \tilde{x}^*_{\alpha_k} \Leftarrow x_0 \leftarrow \tilde{x}_{0\alpha}$$

$$\Rightarrow \|\tilde{x}^*_{\alpha_k}(T_{conv}(\hat{x}_0))\|_h \le \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k \to 0$$

$$\Rightarrow \Delta T_{conv} \le C_M \varepsilon_k^p \to 0$$



לכן $\quad T_{conv}(\hat{x}^*(\cdot)) \le T^*(x_0)$

$$T_{conv}(\tilde{x}^*_{\alpha_k}) \le T_{conv}(\hat{x}^*(\cdot)) + C_M \varepsilon_k^p, \quad \varepsilon_k \to 0$$

אולם: $\quad \tilde{x}_{*\alpha_k} \to \hat{x}_*(\cdot)$

$T_{conv}(\tilde{x}_{*\alpha_k}(\cdot)) = T_*(x_{0\alpha_k})$,

$$T_{conv}(\tilde{x}_{*\alpha_k}(\cdot)) \gtrsim T_{conv}(\hat{x}_*(\cdot)) - C_m \varepsilon_k^p$$

$$\ge T_*(x_0)$$

מ.ש.ל.

משפט (103) — דיוק ההכללה ההומוגנית

נניח AS $\dot{x} \in F(x)$

$q<0 \Rightarrow$ FTS

1. $\dot{x} \in F\left(x(t-[0,\tau]) + B_{h\varepsilon}\right)$

$B_{h\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_h \le \varepsilon\}$

2. $x(t)$ לא תלוי בערכים של $x(\cdot)$ בזמן $t<0$,

~~נניח שהגרירות את~~

$\Leftarrow$ כל ההפרעות המוגבלות מספיק קטן

(לשמור אותה שמקיימים $\dot{x} \in F(x)$)

מרצע מסוים מקיימים

$\|x\| \le \mu\rho, \quad \rho = \max(\tau^{\frac{1}{p}}, \varepsilon)$

μ תלוי במערכת (ב $F: \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$) בלבד

דוגמא

Twisting Controller

$\cancel{\ddot{\sigma} \in [K_m, K_M]}$

$\ddot{\sigma} \in [-C, C] - [K_m, K_M](\alpha_1 \operatorname{sign}\sigma + \alpha_2 \operatorname{sign}\dot{\sigma})$

$\alpha_1 K_m - C > \alpha_2 K_M + C, \quad \alpha_1 - \alpha_2 > C/K_m$

רעש מדידה

$$\boxed{\ddot{\sigma} \in [-C, C] - [K_m, K_M]\left(\alpha_1 \operatorname{sign}(\sigma(t_k) + \eta_k) + \alpha_2 \operatorname{sign}(\dot{\sigma}(t_k) + \hat{\eta}_k)\right)}$$

$\deg t = 1, \ \deg \sigma = 2, \ \deg \dot{\sigma} = 1$

$t_{k+1} - t_k \le \tau,$

$(\eta_k, \hat{\eta}_k) \in \{\|(\eta, \hat{\eta})\|_h \le \varepsilon\}$

$|\eta_k| \le \varepsilon_0, \quad |\hat{\eta}_k| \le \varepsilon_1$

$\Rightarrow \max(|\sigma|^{\frac{1}{2}}, |\dot{\sigma}|) \le \mu \max(\tau, \varepsilon_0^{\frac{1}{2}}, \varepsilon_1)$

$\varepsilon = \|\varepsilon_0, \varepsilon_1\|_h, \quad \|a, b\|_h = \max |a^{\frac{1}{2}}|, |b|$

הוכחת המשפט

108

ידוע ש $\dot{x}\in F(x)$ AS , $q<0$

$\Leftarrow$ FTS

לכן כל הפתרונות שמתחילים מ- $\|x\|\le 1$

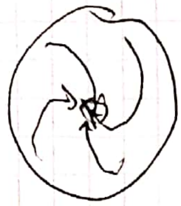
מגיעים ל $x=0$ תוך זמן T כי הוא קומפקט.

$\dot{x}\in F(x(t-\tau[0,1])+B_{h\varepsilon})$

כאשר $t\le\tau$

$\dot{x}\in F(x(t-\min(\tau,t)[0,1])+B_{h\varepsilon})$

לפי תלות רציפה בתנאי התחלה $\forall\delta>0$ ∃



תוך זמן T כל הפתרונות

נכנסים ל $B_\delta=\{\|x\|\le\delta\}$

כאשר

מספיק קטנים $\tau_0,\ \varepsilon_0$

$\rho_0=\max(\tau_0^{\frac{1}{p}},\varepsilon_0)$

$\dot{x}\in F(x(t-\rho_0^p[0,1])+B_{h\rho_0})\qquad(*)$

עבור זמן T כל פתרונות שיוצאו מ B_δ

חוזרים אליו, מתלות רציפה

בתנאי התחלה, הם כולם קרובים ל-0.

$\forall\delta_1>0\ \exists\delta>0:$ שהפתרונות לא יוצאו מ B_{δ_1}

$\Omega_1\xrightarrow{T}\Omega_2$

Ω_1,Ω_2 אינווריאנטיים ל-$(*)$

ניקח $\varkappa>0$ אז העתקת ההעתקה

$(t,x,\rho_0)\longmapsto(\varkappa^p t,\ d_\varkappa x,\ \varkappa\rho_0)$

פתרונות עוברים לפתרונות להכללה

$\dot{x}\in F(x(t-(\varkappa\rho_0)^p[0,1])+B_{h(\varkappa\rho_0)})$

בורריים ורצה רק ש $d_{\varkappa} B_2 \subset B_1$

(109)

אז מקבלים

אז מקבלים

$$\to d_{\varkappa}^2 \Omega_2 \xrightarrow{\varkappa^p T} d_{\varkappa} \Omega_2 \xrightarrow{T} \Omega_2 \qquad (**)$$

הפרעה ϱ_0 הפרעה קטנה ,,,

τ_0, ε_0 $\varkappa^p \tau_0, \varkappa \varepsilon_0$

אפשר להגדיל רעש ושה"מ לא להקטין

$\Leftarrow$ כל הפתרונות אם הפרעה $\varrho_0 = \max(\tau_0^{\frac{1}{p}}, \varepsilon_0)$ או (τ_0, ε_0)

מתכנסים תוך זמן סופי ל-Ω_2

עכשיו ניקח τ, ε שרירותיים.

$\varrho = \max(\tau^{\frac{1}{p}}, \varepsilon)$ נגדיר $\varkappa_0 = \varrho / \varrho_0$

אז כל הפתרונות עם ההפרעה ϱ

תוך זמן סופי מתכנסים לתוך $d_{\varkappa_0} \Omega_2$

נניח $= d_{\varrho} d_{\varrho_0^{-1}} \Omega_2$

נניח $d_{\varrho_0^{-1}} \Omega_2 \subset B_{h\mu}$

$\Leftarrow$ כעבור זמן סופי כל פתרונות

מתכנסים ל $B_{h(\mu\varrho)} = d_{\varkappa} B_{h\mu}$

$x \in B_{h\varrho\mu} \Leftrightarrow \|x\|_h \le \mu\varrho$ מעולה.

מקרה $p = \deg t = 0$, $q = -p = 0$

(110)

אז מקיימים של τ_0, ε_0 מספיק קטן

$\rho_0 = \dot{\varepsilon}_0$

$$\dots \xrightarrow{T} d_x^2\Omega_2 \xrightarrow{T} d_x\Omega_2 \xrightarrow{T} \Omega_2$$

(**)

$\delta > \delta$

ההרכבות נשארות $\varepsilon \le \varepsilon_0$ $\tau \le \tau_0$

$B_{h\varepsilon_0}$ δ

עכשיו נניח $0 < \tau \le \tau_0$, ε כלשהו

נקבל את הצירוף $\boxed{\|x\|_h \le \mu\varepsilon}$

לכל גדול τ

אחרי הרגע $\tau \le \tau_0$,

משפט $\exists\, \tau_0 > 0$ שלכל $\tau \le \tau_0$, $\forall \varepsilon$

מקיים צירוף $\|x\|_h \le \mu\varepsilon$

זמן ההרכבות

$$T_{conv} \le \max\left(C \ln \max(X(0), \varepsilon), 0\right)$$

מקרה $q > 0$, $p = \deg t < 0$

delay: $\tau \mapsto x^p\tau$, $x > 1 \Rightarrow x^p\tau < \tau$

גדלים: $\varepsilon \mapsto x\varepsilon$

(**) ברירות סופיות

משפט לכל $R > 0$ קיים כך ש-ε_0, τ_0 שלכל $\tau \le \tau_0$, $\varepsilon \le \varepsilon_0$

תוך זמן סופי מתקבל

$\|x_h\| \le \mu\varepsilon$ ונשאר לתמיד

אפשר להראות של ε גדול מאוד או τ או R

יש הרבה בעיות

$$\dots \xrightarrow{x^pT} d_x\Omega_2 \xrightarrow{T} \Omega_2$$

כאשר $x^{k|p|}\tau \le \tau_0$, $x^{-k}\varepsilon \le \varepsilon_0$

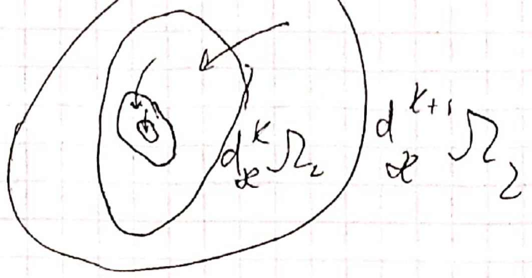
אפשר לקחת τ, ε קטנים $\Leftarrow$ לבנות ברירות

פעם שנייה:

$$d_\varkappa^{k+1}\Omega_2 \xrightarrow{\varkappa^{-k|p|}T} \dots \to d_\varkappa^2\Omega_2 \xrightarrow{\varkappa^{-|p|}T} d_\varkappa\Omega \xrightarrow[\tau_0,\varepsilon_0]{T} \Omega_2$$

$\varkappa^{-k|p|}\tau_0$, $\varkappa^k\varepsilon_0$ $\qquad \varkappa^{-|p|}\tau_0, \varkappa\varepsilon_0$

לכאן הגענו ל



141

תנאי, התכנסות: $\tau < \varkappa^{-k|p|}\tau_0$, $\varepsilon < \varkappa^k\varepsilon_0$

מ.ש.ל,

ברור ש-ε חייב להיות קטן
מאשר ה-δ של $d_\varkappa^k\Omega_2$
(כמו ש-ε_0 היה קטן בהתחלה, מ-δ)

הכללה!

$$\dot x \in F\left(x(t-\tau[0,1]), \Phi(\tau^{1/p}\varepsilon, x(t-\tau[0,1]))\right)$$

$\Phi(\cdot) \subset \mathbb{R}^k$ - פונקציה קבוצתית המונוטונית

$\tau^{1/p}\varepsilon \to 0$ $\quad \Phi \to \{0\}$, לפי Hausdorff, ב-$\varepsilon=0$, $\quad \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow \Phi(\varepsilon_1,x) \subset \Phi(\varepsilon_2,x)$

יש דוגמאות מציאותיות ... Levant, Livne (2016)

$\Leftarrow$ התכנסות לאפס ש-$F(x,y)$ מלמעלה ב-$(x,0)$

$$\boxed{\|x\|_h \le \mu\rho, \quad \rho = \max\left(\tau^{\frac{1}{p}}, \|\varepsilon\|_h\right)}$$

פורסם רק לצמ׳ $\boxed{\deg t = p > d}$

הומוגניות:

$$F(d_\varkappa x, \hat d_\varkappa \varphi) = \varkappa^q d_\varkappa F(x,\varphi)$$

$$\Phi(\varkappa^p\tau, d_{\varepsilon\varkappa}\varepsilon, d_\varkappa x) = \hat d_\varkappa \Phi(\tau,\varepsilon,x)$$

Bhat, Bernstein (2000)   דוגמא

$\deg x = 3, \quad \deg t = 1$ → הומוגני

$$\ddot{x} = -\lambda_1 [x]^{\frac{1}{3}} - \lambda_2 [\dot{x}]^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0 \qquad (112)$$

(זה מקרה פרטי של $\ddot{x} = -\lambda_1 [x]^{\alpha} + \lambda_2 [\dot{x}]^{\beta}$
$\alpha, \beta \in [0,1]$)

ליאפונוב: הכח נוסף לוק מאן סופי ס.ל.

$$V = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{3}{4}\lambda_1 x^{\frac{4}{3}}$$

אנרגיה: (Newton מכניקה)

$$\dot{V} = \frac{\cancel{2}}{2}\dot{x}\ddot{x} + \lambda_1 x^{\frac{1}{3}} \dot{x} = \dot{x}\left(\ddot{x} + \lambda_1 x^{\frac{1}{3}}\right) = -\lambda_2 \underbrace{[\dot{x}]^{\frac{1}{2}}}_{|\dot{x}|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign} \dot{x}} \dot{x}$$

$$\dot{V} = -\lambda_2 |\dot{x}|^{\frac{3}{2}} \le 0 \qquad \text{Lassalle}$$

⇐ V יורד

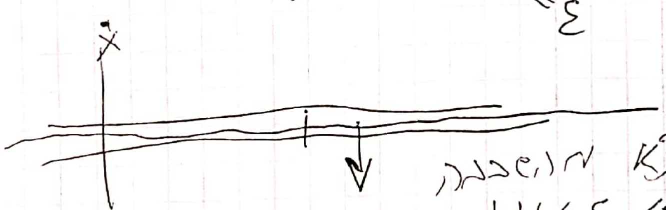
$$\ddot{V} = -\lambda_2 \frac{3}{2} \operatorname{sign}\dot{x} \cdot |\dot{x}|^{\frac{1}{2}} \ddot{x}$$

⇐ $x, \dot{x}$ חסום

חסום בכל תחום חסום

Barbalat lemma: $\dot{V} \to 0 \Rightarrow \ddot{x} \to 0$

נניח $V \not\to 0$ ⇐ $|x| \ge \underset{= \varepsilon}{const}$ נשאר



[illegible] ''אז [illegible]

$|\dot{x}| \le \varepsilon, \ll 1$

סתירה

⇐ $V \to 0$ ⇐ $x, \dot{x} \to 0$

FT stability ⇐ הומוגניות

$k=0,1,\dots$ נכים הפרעות:

$$\ddot{x} = -\lambda_1\Big[x\big(t-\overbrace{(\sin^2 t)\varepsilon_1^2}^{t \geq \varepsilon_1^2 - \delta}\big) + 2\varepsilon_2\cos t\Big]^{\frac{1}{3}}$$

113

$$-\lambda_2\big[\dot{x}(t_k)\big]^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_3\cos(10^7 t), \quad t_{k+1}-t_k \leq \tau$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \tau > 0$ $\quad t \in [t_k, t_{k+1})$

(ריצה)

$$\rho = \max\left(\tau, \varepsilon_1^2, \varepsilon_2^{\frac{1}{3}}, \varepsilon_3\right)$$

$\deg \varepsilon_1^2 = \deg t = 1, \ \deg \varepsilon_2 = \deg x = 3$ מעריכים

$\deg \varepsilon_3 = \deg \ddot{x} = 1$

$$\ddot{x} \in -\lambda_1\Big[x(t-\rho[0,1]) + 2\rho[-1,1]\Big]^{\frac{1}{3}}$$

$$-\lambda_2\Big[\dot{x}(t-\rho[0,1])\Big]^{\frac{1}{2}} + \rho[-1,1]$$

לפי המשפט

$|x| \leq \mu_1 \rho^3$

$|\dot{x}| \leq \mu_2 \rho^2$

בפרט $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$

$|x| \leq \mu_1 \tau^3, \quad |\dot{x}| \leq \mu_2 \tau^2$ נקבל

<u>דוגמא</u>

Twisting controller

$$\ddot{x} \in [-C, C] - [K_m, K_M]\big(\alpha_1 \operatorname{sign} \sigma(t_k) + \alpha_2 \operatorname{sign} \dot{\sigma}(t_k)\big)$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 > C/K_m, \quad (\alpha_1+\alpha_2)K_m - C > (\alpha_1-\alpha_2)K_M + C$$

$\deg x = 2, \ \deg \dot{x} = 1, \ \deg t = 1$

$$\Rightarrow \quad \rho = \max(t_{k+1} - t_k) = \tau$$

$$|x| \leq \mu_1 \tau^2, \quad |\dot{x}| \leq \mu_2 \tau$$

דוגמה גזירה מסדר ראשון

(114)

נניח $|\ddot f_0(t)| \le L$ ($\dot f_0$ ליפשיצית עם קבוע L)

$L>0$

Levant 1998

$$\begin{cases} \dot z_0 = -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}} [z_0 - f]^{\frac{1}{2}} + z_1, \\ \dot z_1 = -\lambda_0 L \underbrace{[z_0 - f_0]^0}_{\mathrm{sign}(z_0 - f_0)} \end{cases}$$

input $f(t) = f_0(t)$ בלי רעש

$\lambda_0 = 1.1$

$\lambda_1 = 1.5$

מתאימים

$$\sigma_0 = \frac{z_0 - f_0}{L}, \quad \sigma_1 = \frac{z_1 - \dot f_0}{L}$$

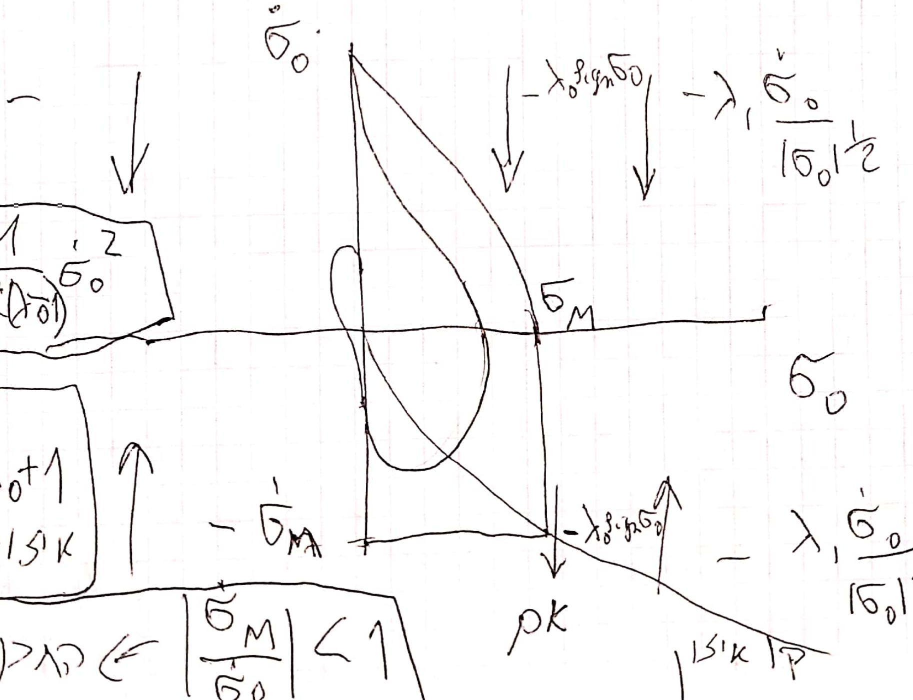
מחסרים $-f_0$, $-\dot f_0$ ומחלקים ב-L)

$\boxed{\text{הומוגניות} \quad \deg t = 1, \quad \deg \sigma_0 = 2, \ \deg \sigma_1 = 1}$

$$\begin{cases} \dot\sigma_0 = -\lambda_1 [\sigma_0]^{\frac{1}{2}} + \sigma_1 \\ \dot\sigma_1 \in -\lambda_0 \,\mathrm{sign}\, \sigma_0 + [-1, 1], \end{cases} \qquad \frac{\ddot f_0}{L} \in [-1, 1]$$

גוזרים

$$\ddot\sigma_0 \in -\frac{1}{2}\lambda_1 \frac{\dot\sigma_0}{|\sigma_0|^{\frac{1}{2}}} - \lambda_0 \,\mathrm{sign}\, \sigma_0 + [-1, 1]$$



$$\boxed{\sigma_M = \frac{1}{2(\lambda_0 - 1)} \dot\sigma_0^2}$$

$$\boxed{\lambda_1 \frac{\dot\sigma_M}{\sigma_M^{\frac{1}{2}}} = \lambda_0 + 1 \quad \text{איזון}}$$

$$\boxed{\left|\frac{\dot\sigma_M}{\dot\sigma_0}\right| < 1 \Rightarrow \text{התכנסות}}$$

מקבלים תנאים אלגבריים אחד על λ_0, λ_1
שמבטיחים את FTS. כנראה כבר מאמר.
כיום ידועים הרבה תנאים יותר טובים.
(115) למשל! $\lambda_0 = 1.1,\ \lambda_1 = 1.5$ טובים

דיוק! נניח שיש רעש

$$f(t) = f_0(t) + \eta(t) \qquad |\eta| \le \varepsilon$$

$|\ddot{f}_0| \le L$ מוגדר לפי Lebesgue

$$\sigma_0 = \frac{z_0 - f_0}{L}, \quad \sigma_1 = \frac{z_1 - \dot{f}_0}{L},$$

~~אפשר ב-z(t)~~ ~~רק נקודה~~ ~~Euler~~ ~~$t \in [t_k, t_{k+1})$~~

$$\cancel{\begin{cases} \dot{\sigma}_0 = -\lambda_1 \left[\sigma_0(t_k) - \frac{\eta(t_k)}{L}\right]^{\frac{1}{2}} + \sigma_1(t_k) \\ \dot{\sigma}_1 = -\lambda_0 \operatorname{sign}\left(\sigma_0 - \frac{\eta}{L}\right)\Big|_{t_k} - \frac{\ddot{f}_0}{L}\Big|_{t_k} \\ \dot{\sigma}_0 \in -\lambda_1 \left[\sigma_0(t - \tau[0,1]) + \frac{\varepsilon}{L}[-1,1]\right]^{\frac{1}{2}} + \sigma_1(t - \tau[0,1]) \end{cases}}$$

$\cancel{\dot{\sigma}_1 \in -\ddot{f}_0}$

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_0 = -\lambda_1 \left[\sigma_0 - \frac{\eta}{L}\right]^{\frac{1}{2}} + \sigma_1 \\ \dot{\sigma}_1 = -\lambda_0 \operatorname{sign}\left(\sigma_0 - \frac{\eta}{L}\right) - \frac{\ddot{f}_0}{L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_0 \in -\lambda_1 \left[\sigma_0 + \frac{\varepsilon}{L}[-1,1]\right]^{\frac{1}{2}} + \sigma_1 \\ \dot{\sigma}_1 \in -\lambda_0 \operatorname{sign}\left(\sigma_0 + \frac{\varepsilon}{L}[-1,1]\right)^{\frac{1}{2}} + [-1,1] \end{cases}$$

לפי המשפט הדיוק הוא $\rho = \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|\frac{\varepsilon}{L}, 0\right\|_h$

$$|\sigma_0| = \left|\frac{z_0 - f_0}{L}\right| \le \mu_0 \frac{\varepsilon}{L}, \quad |\sigma_1| = \left|\frac{z_1 - \dot{f}_0}{L}\right| \le \mu_1 \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|z_0 - f_0| \le \mu_0 \varepsilon, \quad |z_1 - \dot{f}_0| \le \mu_1 L^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

Output-Feedback Twisting Controller (116)

$C \geq 0,\ 0 < K_m \leq K_M$

$$\ddot{\sigma} \in [-C, C] + [K_m, K_M]\, u \qquad K_m(\alpha_1+\alpha_2) - C > K_M(\alpha_1-\alpha_2) + C$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 > C/K_m$$

$$u = -\alpha_1 \operatorname{sign} z_0 - \alpha_2 \operatorname{sign} z_1$$

$$\dot{z}_0 = -1.5 L^{\frac{1}{2}} [z_0 - \sigma]^{\frac{1}{2}} + z_1$$

$$\dot{z}_1 = -1.1 L\, [z_0 - \sigma]^0, \qquad L > K_M(\alpha_1+\alpha_2) + C \geq |\ddot{\sigma}|$$

כעבור זמן סופי $z_1 \equiv \dot{\sigma},\ z_0 \equiv \sigma$

כעבור עוד זמן $\sigma \equiv \dot{\sigma} \equiv 0$

$\Leftarrow$ יציבות OK

המערכת כולה הומוגנית

$$\deg t = 1,\ \deg \sigma = \deg z_0 = 2,\ \deg \dot{\sigma} = \deg z_1 = 1$$

אם σ נמדד עם רעש $|\eta| \leq \varepsilon$

(כלומר σ נמדד ב- $\sigma + [-\varepsilon, \varepsilon]$)

ונקבל אחרי זמן סופי

$$|\sigma| \leq \mu_0 \varepsilon,\ |\dot{\sigma}| \leq \mu_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}},\ |z_0| \leq \mu_2 \varepsilon,\ |z_1| \leq \mu_3 \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

<u>מימוש:</u> $\sigma, \dot{\sigma}$ - חיים "במציאות" בזמן רציף

u מחושבים ערך מחשב / ומשתנים קבוע

בין t_k ל- t_{k+1}, $t_{k+1} - t_k = \tau_k$, $\tau_k \leq \tau$

מדגמים

$$\ddot{\sigma} \in [-C, C] + [K_m, K_M]\, u$$

$$u = -\alpha_1 \operatorname{sign} z_0(t_k) - \alpha_2 \operatorname{sign} z_1(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1})$$

$$z_0(t_{k+1}) = z_0(t_k) + \tau_k\left(-1.5 L^{\frac{1}{2}} [z_0(t_k) - \sigma(t_k)]^{\frac{1}{2}} + z_1(t_k)\right)$$

$$z_1(t_{k+1}) = z_1(t_k) - \tau_k \cdot 1.1 L \operatorname{sign}(z_0(t_k) - \sigma(t_k))$$

דיוק: $|\sigma| \leq \mu_0 \rho^2,\ |\dot{\sigma}| \leq \mu_1 \rho,\ |z_0| \leq \mu_2 \rho^2,\ |z_1| \leq \mu \rho$

$$\rho = \max(\tau, \varepsilon^{\frac{1}{2}})$$

<u>נראה את זה</u>