# הרצאה 10.

**הערה**: להכללה,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \in F_1(x) \subset \mathbb{R} \\ \dot{x}_2 \in F_2(x) \\ \dot{x}_n \in F_n(x) \end{cases}$$

זו צורה, מלבנית!)

95

$$\dot{x} \in F_1(x) \times F_2(x) \times \dots \times F_n(x)$$

כי זה אבל לא תמיד כך!

למשל ~~...~~!

$$|\dot{x}_1 x_2 + \dot{x}_2 x_3 + x_3 \dot{x}_3| \le 1$$

(לא בצורה כזו. גם לא קמורה?)

## פונקציות Lyapunov חלקות

הכללות:

**Kurzweil (1956)**

$$\dot{x} = f(x), \quad f \in C, \quad f(0) = 0$$

$$\exists V \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \iff AS$$

או לוקלי — אם גלובלי, גם לוקלי

$V(0) = 0$, $V(x) > 0 \iff x \neq 0$, radially unbounded

$\dot{V}(x) < 0 \iff x \neq 0$ $\quad \|x_n\| \to \infty \Rightarrow V(x_n) \to \infty$

**Clarke, Ledyev, Stern (1998)**

$0 \in F(0)$, $\dot{x} \in F(x)$ הכללת Filippov

(גם לוקלי) $\exists V, \cancel{W} \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \iff AS$ גם גלובלי (גם לוקלי)

$\exists W \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $W \in C(\mathbb{R}^n)$

1. $\forall x \neq 0 : V(x), W(x) > 0$ Positive Definiteness
   $V(0) = 0$
2. (radially bounded) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \le a\}$ חסום לכל $a > 0$
3. $\max_{v \in F(x)} \nabla V(x) v \le -W(x) \quad \forall x \neq 0$
   $(\Rightarrow W(0) = 0)$

# שתי דרכים לבנות פונקציות הומוגניות

96

נניח $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

איך לבנות פונקציה הומוגנית
המתלכדת ב $f$

1. הארכה (extension) מספירה, $S_1=\{x \mid \|x\|=1\}$
Euclidian

$$f_h(x) = \varkappa_1^q f(d_{\varkappa_1}^{-1}x), \quad \underbrace{\|d_{\varkappa_1}^{-1}x\|=1}$$

המשוואה שמגדירה $\varkappa$ בצורה חד-משמעית
באמת

$$d_{\varkappa_1}^{-1}x = d_{\varkappa_1^{-1}}x \qquad \cancel{\|d_{\varkappa}x\|}$$

$$\|d_s x\| = \left(s^{2m_1}x_1^2+\dots+s^{2m_n}x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_{\varkappa_1}d_{\varkappa_2}=d_{\varkappa_1\varkappa_2}$$

פונקציה מונוטונית ורציפה

$$f_h(d_\varkappa x) \overset{def}{=} \varkappa_*^q f(d^{-1}_{\varkappa_*}d_\varkappa x), \quad \|d^{-1}_{\varkappa_*}d_\varkappa x\|=1$$

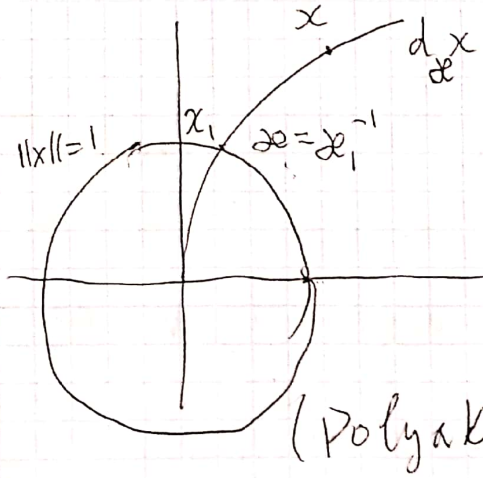
$$\|d_{\varkappa/\varkappa_*}x\|=1 \Rightarrow \varkappa/\varkappa_* = \varkappa_1^{-1}$$

מציבים

$$\varkappa_* = \cancel{\varkappa/\varkappa_1}\ \varkappa\cdot\varkappa_1$$

$$\cancel{f_h(d_\varkappa x) = (\varkappa/\varkappa_1)^q f(d^{-1}_{\varkappa_1/\varkappa}d_\varkappa x)=}$$

$$f_h(d_\varkappa x) = (\varkappa\varkappa_1)^q f(d^{-1}_{\varkappa\varkappa_1}d_\varkappa x) = \varkappa^q\varkappa_1^q f(d^{-1}_{\varkappa_1}x)$$
$$= \varkappa^q f_h(x)$$




$x$

$f_h(x)=\varkappa_1^q f(x_1)$

כך אפשר לבנות
כל פונקציה הומוגנית
$\|\cdot\|_h$ מנורמה אוקלידית
היא נקראת "canonical" (Polyakov)

2. דרך שנייה

(97)

$$f_h(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_1^{q+1}} f(d_{\varkappa_1} x)\, d\varkappa_1$$

נבדוק T

$$f_h(d_\varkappa x) = \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_1^{q+1}} f(d_{\varkappa_1} d_\varkappa x)\, d\varkappa_1 =$$

אונים, סליחה

$$= \int_0^\infty \frac{\varkappa^{q+1}}{(\varkappa\varkappa_1)^{q+1}} f(d_{\varkappa\varkappa_1} x) \frac{d(\varkappa\varkappa_1)}{\cancel{\varkappa}} =$$

$$= \varkappa^q \int_0^\infty \frac{1}{(\varkappa\varkappa_1)^{q+1}} f(d_{\varkappa\varkappa_1} x)\, d\underbrace{(\varkappa\varkappa_1)}_{\tilde\varkappa_1} = \varkappa^q f_h(x)$$

הבעיה: אינטגרל צריך להתקיים

כי עובד כאשר $\exists r>0: f|_{\|x\|\le r} = 0,\ |f|_{\|x\|\ge r} \le const$

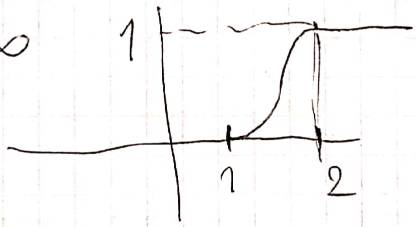
לפני נניח $V(x)$ פונקציה מוגדרת חיובית

רציפה, 1 radially unbounded, $\lim_{R\to\infty} \max_{\|x\|=R} V = \infty$

$(x_n\to\infty \Rightarrow V(x_n)\to\infty$ או$)$ $\Rightarrow$ $V<1$ בסביבת 0, $V>2$ בסביבות $\infty$

רציף

$a'(s)>0,\ a(s)\in C^\infty$

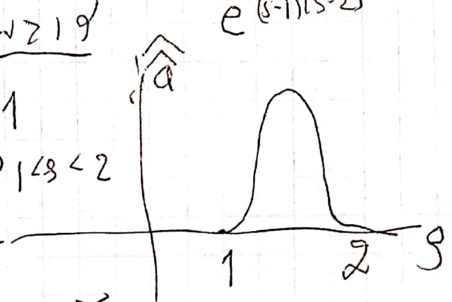


נגדיר $\tilde V(x) = a(V(x))_h = (a\circ V)_h(x)$

$$a(s) = \frac{1}{\hat a(2)} \hat a(s),$$

$$\hat a(s) = \int_{-\infty}^{s} \hat{\hat a}(s)\, ds, \quad \hat{\hat a}(s) = \begin{cases} 0 & s\le 1 \\ e^{\frac{1}{(s-1)(s-2)}} & 1<s<2 \\ 0 & s\ge 2 \end{cases}$$

פונקציה



נבנה פונקציית ליאפונוב המוצעת אפסין

(98a)

# פונקצ'ית ליאפונוב, נוסח מעודכן

LDE נוסח של Rosier - (כון, אבל δ במקור

שיטה של δ3א → Berrau, Efimov, Perruquetti, Polyakov (2013, 2016)

---

הכלת Filippov הומוגנית $\dot{x} \in F(x)$

$\deg t = p = -q$, $d_{\ae} x = (\ae^{m_1} x_1, \dots, \ae^{m_n} x_n)$, $m_i > 0$

<u>משפט</u>: אם $\dot{x} \in F(x)$ AS אז $\forall\, \delta > \delta$ $k; \ell > 0$

המקיימים $k + q > 0$, $\ell \cdot \max_i m_i < k$

קיימים שני פונקציות <u>הומוגניות</u> $\tilde{W}$, $\tilde{V}$

1. $\tilde{V}, \tilde{W} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\tilde{W}, \tilde{V} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

מוגדרות חיוביות: $\tilde{W}(x), \tilde{V}(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$\tilde{W}(0) = \tilde{V}(0) = 0$

2. $\tilde{V} \in C^\ell(\mathbb{R}^n)$, $\deg \tilde{V} = k$, $\deg \tilde{W} = k + q$

3. $\forall x \in \mathbb{R}^n : \max_{z \in F(x)} \nabla \tilde{V}(x) \cdot z \leq -\tilde{W}(x)$.

---

<u>תזכורת</u>: $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^K$ הומוגנית גזירה

$$\deg \varphi'_{x_i} = \deg \varphi - \deg x_i = \deg \varphi - m_i$$

לכן לנגזרות חלקיות מסדר מספיק גבוה יש דרגת הומוגניות שלילית

אם $\deg \Theta < 0$ אז היא לא רציפה ב $x = 0$: כי אם $\Theta(x_0) \neq 0$

אז $\lim_{\ae \to 0} \Theta(d_{\ae} x_0) = \lim_{\ae \to 0} \ae^{\deg \Theta} \Theta(x_0) = \infty$ או $-\infty$

98

$$\left(\overset{DE}{\text{Rosier 1992}},\ \overset{DI}{\text{Polyakov 2013}},\ \right)\qquad \text{לכן}$$

Bernau, Efimov, Perruquetti, Polyakov → Bernau, Efimov, Perruquetti 2016

$\dot x \in F(x)$ Homogeneous Filippov DI

AS' נניח שלפונקציה קיים פונקציה $\tilde V$ הומוגנית

$\tilde V$ הומוגנית

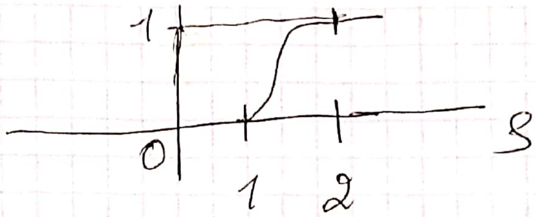
$\boxed{\text{קיימת לכל } k \text{ כזה}}$ , $\deg \tilde V = k$ , $k+q>0$ , $\cancel{k > l \max m_i,\ l \in \mathbb{N}}$

כלומר פונק' קיימת לכל $k$

$\tilde V \in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}) \cap C^l(\mathbb{R}^n)$ $\deg \tilde W = k+q$ , $k>0$

$\tilde W \in C(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ $\boxed{k > l \max_i m_i}$

הוכחה: לפי Rosier



$a(s)$: $a'(s)>0$ , $s\in(1,2)$ , $a\in C^\infty$

$$a\circ V(x) \overset{def}{=} a(V(x))$$

$$\tilde V(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_1^{k+1}} (a\circ V)(\varkappa_1^{m_1} x_1, \dots, \varkappa_1^{m_n} x_n)\, d\varkappa_1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

מוגדר

הומוגני (הנחנו $\varkappa_1$ ...)

$\deg \tilde V = k$

רציף באפס מצד ימין;

$\cancel{\forall x \neq 0}$ $\exists\, \gamma_m, \gamma_M$: $V(d_\varkappa x) \ge 2$ $\|x\| \in [1,2]_R$ , $\varkappa > \gamma_M$

כי רדיאלית לא חסומה

$\tilde V$ מוגדרת חיובית + homogeneity => radially unbounded

מרבית $V(d_\varkappa x) \le 1$ $\|x\| \in [1,2]_R$ , $\varkappa < \gamma_m$

$$\Rightarrow \tilde V(x) = \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} \frac{1}{\varkappa_1^{k+1}} (a\circ V)(d_{\varkappa_1} x)\, d\varkappa_1 + \underbrace{\int_{\gamma_M}^{\infty} \frac{1}{\varkappa_1^{k+1}}\, d\varkappa_1}_{=\frac{1}{k\,\gamma_M^k}}$$

$\|x\| \in [1,2]_R$ $\tilde V \in C^\infty \Leftarrow$

הומוגניות

$$\frac{\partial \tilde V}{\partial x_i} = \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} \frac{\varkappa_1^{m_i}}{\varkappa_1^{k+1}} a'(V(d_{\varkappa_1} x)) \frac{\partial V}{\partial x_i}(d_{\varkappa_1} x)\, d\varkappa_1$$

$$\deg \frac{\partial \tilde V}{\partial x_i} = k - m_i \qquad = \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_1^{k-m_i+1}} a'(V(d_{\varkappa_1} x)) \frac{\partial V}{\partial x_i}(d_{\varkappa_1} x)\, d\varkappa_1$$

$\deg V =$

$$\tilde V(d_{\varkappa}x) = \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa^{k+1}} a(V(d_{\varkappa}d_{\lambda}x))\,d\varkappa = \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa^{k+1}} a(V(d_{\varkappa\lambda}x))\,d\varkappa$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa^{k+1}} a(V(d_{\varkappa\lambda}x))\,\frac{d(\varkappa\lambda)}{\lambda} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\lambda^k}{(\lambda\varkappa)^{k+1}} a(V(d_{\varkappa\lambda}x))\,d(\varkappa\lambda) = \lambda^k\tilde V(x)$$

$$\frac{\partial\tilde V}{\partial x}(x) = \nabla\tilde V(x)$$

$$\dot{\tilde V}(x) = \frac{\partial\tilde V}{\partial x}(x)F(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_1^{k+1}} a'(V(d_{\varkappa_1}x))\underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}(d_{\varkappa_1}x)\,d_{\varkappa_1}}\,d\varkappa_1\cdot \underbrace{F(x)}_{\text{קמורה.}}$$

קמורה.

$$\frac{\partial V}{\partial x}(d_{\varkappa_1}x)\,d_{\varkappa_1} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)\Bigg|_{d_{\varkappa_1}x}\begin{pmatrix}\varkappa_1^{m_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \varkappa_1^{m_n}\end{pmatrix}$$

$$= \left(\varkappa_1^{m_1}\frac{\partial V}{\partial x_1},\ldots,\varkappa_1^{m_n}\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)\Bigg|_{d_{\varkappa_1}x}, \quad F(x) = \varkappa_1^{-q}d_{\varkappa_1}^{-1}F(d_{\varkappa_1}x)$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_1^{k+1}} a'(V(d_{\varkappa_1}x))\frac{\partial V}{\partial x}(d_{\varkappa_1}x)\,d_{\varkappa_1}d_{\varkappa_1}^{-1}\varkappa_1^{-q}F(d_{\varkappa_1}x)\,d\varkappa_1 =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_1^{k+q+1}} a'(V(d_{\varkappa_1}x))\frac{\partial V}{\partial x}(d_{\varkappa_1}x)F(d_{\varkappa_1}x)\,d\varkappa_1$$

לכן כלו קמורה והומוגנית

$$\deg\dot{\tilde V} = k+q = k-\deg t = \deg\tilde V - \deg t$$

$$\dot{\tilde V}(x) = \{\nabla\tilde V(x)\cdot z \mid z\in F(x)\}, \quad z = \varkappa_1^{-q}d_{\varkappa_1}^{-1}z_1, \quad z_1\in F(d_{\varkappa_1}x)$$

$z \in F(x)$

$$\nabla \tilde V(x)\cdot z = \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_1^{k+q+1}}\, a'(V(d_{\varkappa_1}x))\,\nabla V(d_{\varkappa_1}x)\cdot z_{1\varkappa_1}\, d\varkappa_1$$

$$z_{1\varkappa_1} = \varkappa_1^{q} d_{\varkappa_1} z \in F(d_{\varkappa_1}x)$$

שוב הכללה: $F(d_{\varkappa_1}x) = \varkappa_1^{q} d_{\varkappa_1} F(x)$ כיוון

משפט של Clarke, Ledyaev, Stern

$$\max_{z_1 \in F(d_{\varkappa_1}x_1)} \nabla V(d_{\varkappa_1}x)\cdot z_1 \le -W(d_{\varkappa_1}x)$$

$W \in C(\mathbb{R}^n)\cap C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$

מכפלה חיובית $\int > \delta$

$$\max_{z\in F(x)} \nabla \tilde V(x)\cdot z \le -\tilde W(x)$$

נקבל

$$\tilde W(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_1^{k+q+1}}\, a'(V(d_{\varkappa_1}x))\, W(d_{\varkappa_1}x)\, d\varkappa_1$$

$$\deg \tilde W = k+q = \deg \tilde V - \deg t$$

מ.ש.ל.

$\forall x \neq 0$ $\int_{\gamma_m}^{\gamma_M}$ ⇐ רציפות, חלקות של $\tilde V, \tilde W$ טריוויאלית לוקלית

(תלות בפרמטר)

הומוגניות ⇐ גלובלית

$\boxed{\text{חלקות ב-0:}}$

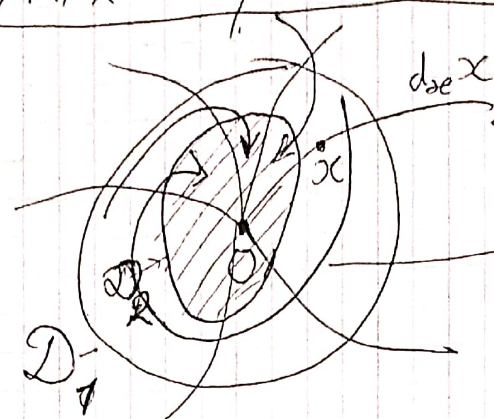
$j = j_1+\dots+j_m \le \ell$, $j \le \ell$

$$\tilde W \in C, \quad \tilde W \in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$$

$$\deg \frac{\partial^j}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}\tilde V(x) = k - j_1m_1 - \dots - j_nm_n > 0, \quad \tilde V \in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}) \Rightarrow \frac{\partial^j}{\dots}\tilde V\Big|_{\|x\|=1}$$ חסומה

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial^j}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}V(x) = \lim_{\varkappa\to 0}\varkappa^{k-j_1m_1-\dots-j_nm_n}V(\bar x)\Big|_{\|x\|=1} = 0$$ כנ״ל

# התכווצות - סיום מאמר פוליאקוב




(101)

**הגדרה** קבוצה $D \subset \mathbb{R}^n$ נקראת dilation retractable

אם $\forall \varkappa \in [0,1] \quad d_\varkappa D \subset D$

**הגדרת התכווצות** contractivity

קיימים שני קומפקטים $D_1, D_2$

dilation retractable $D_1$, $0 \in D_2 \subset \text{Interior } D_1$

($0 \in D_1 \Leftarrow$) ($D_2 \neq \emptyset \Leftarrow$)

ומספר $T > 0$ כך שלכל פתרון

של הכללה Filippov הדיפרנציאלית, $\dot x \in F(x)$, ש-

$x(0) \in D_1 \Rightarrow \cancel{\exists}\, x(T) \in D_2$

Levant (2005), Levant, Efimov, Polyakov, Perruquetti (2016) [illegible]

$\dot x \in F(x)$ יציבה אס' AS $\Leftrightarrow$ יש התכווצות

נניח $q = -\deg t$ homogeneity degree HD

1. $q<0$: FTS finite-time stability $\Leftrightarrow$ AS

$\Rightarrow q < 0,\ 0 < -q \le \min \deg x_i$

2. $q = 0$: exponential stability

$\exists \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0 : \gamma_2 \|x(0)\| e^{-\gamma_3 t} \le \|x(t)\| \le \gamma_1 \|x(0)\| e^{-\gamma_3 t}$

3. התכנסות תוך זמן קצוב לכל כדור $\|x\| \le R$

התכנסות אחידה מקום ההתחלתי ל-0.

(102) $\deg t = p = -q$ נניח / **הוכחה:**

נזכיר שההעתקה מעבירה ...

$$(t, x(t)) \longmapsto (\varkappa^p t, d_\varkappa x(t))$$

מעבירה גרף / לגרף

ברור ש $d_1 D_1 = D_1$.

קיים מרחק מינימלי

~~$\rho_m(D_2, \partial D_1) = \rho_m$~~

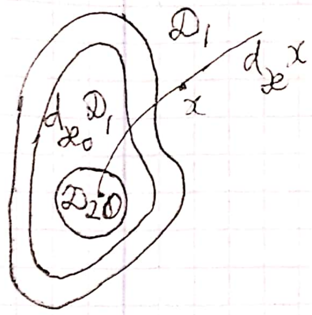
$\forall x_0 \in D_2\ \exists O_{x_0}$ קבוצה פתוחה $\subset D_1\ \exists \varkappa_{0x_0} < 1 : x_0 \in d_{\varkappa_{0x_0}} O_{x_0} \subset d_{\varkappa_0} D_1$

מקומפקטיות

$\varkappa_0 = \max_{\text{סופי}} \varkappa_{0x_0} < 1 \Rightarrow \exists \varkappa_0 < 1 :$

$D_2 \subset d_{\varkappa_0} D_1 \subset D_1$

~~$\rho(0, \partial D_1) = \rho_M(0) > 0$, $0 \in D_2$~~




לכל $T$ מגדלים

$$D_1 \supset d_{\varkappa_0} D_1 \supset D_2, \quad x(0) \in D_1 \Rightarrow x(T) \in d_{\varkappa_0} D_1$$

בונים סדרה

$$\longrightarrow d^{-1}_{\varkappa_0} D_1 \xrightarrow{\varkappa_0^{-p} T} D_1 \xrightarrow{T} d_{\varkappa_0} D_1 \xrightarrow{\varkappa_0^{p} T} d^2_{\varkappa} D_1 \longrightarrow$$

$x(t) \to 0$

מכסים את כל $R^n$

בזמן המעבר הוא $\varkappa^{kp} T$

מ $d^k_{\varkappa_0} D_1$ ל $d^{k+1}_{\varkappa_0} D_1$, $k \in \mathbb{Z}$

נזכיר $d_\varkappa x = (\varkappa^{m_1} x_1, \dots, \varkappa^{m_n} x_n)$

לכן $\rho_M(d^k_{\varkappa_0} D_1, 0) \le \varkappa_0^{km} \rho_0$, $k \geq 0$

$\rho_0 = \rho_M(D_1, 0)$

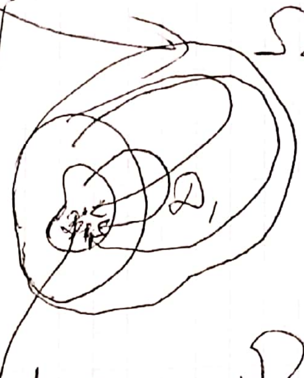
1. $\boxed{p>0}$ נניח $x(t)\in d_{x_0}^{k_0} D_1$

$T_{convergence} \le T\left(x_0^{k_0 p} + x_0^{(k_0+1)p} + \dots\right) = \frac{T x_0^{k_0 p}}{1-x_0^{p}}$ סך

נשאר להוכיח את היציבות לפי ליאפ'

2. $p\ge 0$ זמן אין סופי

Ω - קבוצה!
אינווריאנטית



נקודות של כל הפתרונות שמתחילים ב- $D_1$ בזמן 0 ומסתיימים ב- $d_x D_1$ בזמן T מהווים קבוצה קומפקטית $\Omega$ (Filippov)

$d_{x_0} D_1$

עבור זמן T נוסף

$\forall k>0:\ 0\in d_{x_0}^{k}\Omega \xrightarrow[?]{x_0^{kp}T} d_{x_0}^{k+1}\Omega \to$ הם נשארים בתוך $\Omega$

קבוצה אינווריאנטית מכילה 0.

$\overline{m} = \max m_i$

$\underline{m} = \min m_i$

2. $p=0 \Leftarrow$

$\forall k\quad d_{x_0}^{k} D_1 \xrightarrow{T} d_{x_0}^{k+1} D_1 \left(\to d_{x_0}^{k}\Omega \xrightarrow{T} d_{x_0}^{k+1}\Omega \to\right)$

$B_r=\{\|x\|<r\} \subset D_1 \subset \Omega \subset B_R=\{\|x\|\le R\}$

זמן התכנסות ל- $x_0^{k} D_1$

$T\cdot \log_{x_0^{m_i}} \|x\|/R \ge k$ הוא

3. $p<0$, $q>0$

$x_0^{-p}<1$, $x_0^{kp}T<T \Leftarrow k<0$

זמן הגעה ל- $d_x^{k} D_1$ מ- $\infty$ הוא $k$ מוגדר ב

$\dots + x_0^{(k-2)p}T + x_0^{(k-1)p}T = T x_0^{(k-1)p}\frac{1}{1-x_0^{-p}}$

סופי

# [illegible] הכללות הומוגניות

**משפט** (Levant 2005)

נניח של $\dot{x} \in F(x)$ הכללות Filippov

$\dot{x} \in \tilde{F}(x)$

יש אותו סוג של הומוגניות $d_\varkappa$

ואותה דרגת הומוגניות $q$

1. $F(x)$ AS
2. נניח שבכדור $B_1=\{x \mid \|x\| \le 1\}$ מתקיים

$$\forall x \quad \tilde{F}(x) \subset \hat{F}(x) + B_\varepsilon \ \left(= F(x)^\varepsilon\right)$$

Filippov

אז $\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \varepsilon \le \varepsilon_0$

כל הכללה $\dot{x} \in \tilde{F}(x)$ כזו גם AS

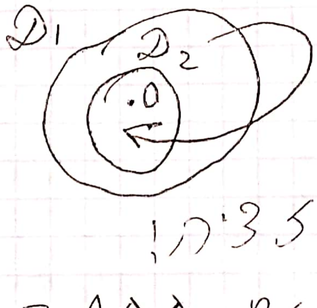
**הוכחה:** גרפים של $F(x)$, $\tilde{F}(x)$ קרובים בכל תחום קומפקטי

כי

$$\tilde{F}(d_\varkappa x) = \varkappa^q d_\varkappa \tilde{F}(x)$$

לכן מתלות רציפה, בקצב זמן

נקבל שגם ל-$\tilde{F}$ מתקיימת התכווצות




מ.ש.ל.

**דוגמא:** לינאריזציה!

$$\dot{x} = f(x) = A\cancel{(x)}x + R(x), \quad R = o(\|x\|)$$

$$A = f'(0), \quad \dot{x} = Ax \qquad \deg x_i = 1, \ \deg t = -q = 0$$

$\forall \varepsilon > 0$

בסביבה קטנה מספיק 0 $\dot{x} = f(x) \in Ax + B_\varepsilon \|x\|$

אם $\operatorname{Spec} A \subset \mathbb{C}_-$ $\Leftarrow$ $\dot{x} \in \{Ax\}$ AS

$\Leftarrow$ $\varepsilon$-$\delta$ קטן מספיק $\dot{x} \in Ax + B_\varepsilon\|x\|$ גם AS

$\Leftarrow$ $\dot{x} = f(x)$ AS (לוקלית)