שיטות צפייה ובקרה תוך זמן סופי 1

אריה לבנט חדר 320, בניין שרייבר
שעות קבלה: יום ג' 14^{10} – 15^{00}

http://www.tau.ac.il/~levant/fintime/

תוכנית הקורס:

1. מבוא קצר לבקרה לא ליניארית ומשוואות דיפרנציאליות רגילות עם צד ימין לא רציף. הכלות דיפרנציאליות.
2. שיטות בקרה בתנאי אי-ודאות: מבוא קצר לבקרה בעזרת מצבי החלקה (sliding mode control)
3. הכלות דיפרנציאליות הומוגניות: תורת היציבות. הכלות/מערכות הומוגניות במציאות: דיוק ומימוש במחשב.
4. תכנון בקרה ואובזרוורים (צופים) הומוגניים של מערכות הומוגניות כלשהן לרבות גוזרים מדויקים ורובוסטיים, יציבות תוך זמן סופי ואפילו תוך זמן קבוע. (Finite and Fixed time convergence)
5. הכללת התוצאות לבקרה של כמה פלטים וקלטים.
6. בקרת קופסה שחורה ומושג של סדר יחסי פרקטי, Practical Relative Degree.

2018 סמסטר ב'
שרייבר 007, 13^{00}-16^{00}, יום ב'

ספרים:

1. Shtessel, Edwards, Fridman, Levant
Sliding mode control and observation, Birkhauser, 2013

2. Filippov Differential Equations with
Discontinuous Right-Hand Sides, Kluwer 1988, 2010

3. Slotine, and Li, Applied Nonlinear Control, 1991
Prentice-Hall

4. Khalil - Nonlinear systems, Prentice Hall, 2001

5. Isidori Nonlinear Control Systems, Springer 1995

6. Bacciotti, Rosier - Liapunov functions and
Stability in Control theory, Springer 2005

+ הדרכה. מאמרים
שמורים ב Homepage שלי,
Filippov, Slotine, Khalil, Shtessel et al ch4,6
https://www.dropbox.com/s/m1ffro3dsunjk9i/
ControlBooks.zip?dl=0

שיעור 1   05.03.2018

בעיות בקרה

טיסה, רובוט, טייס אוטומטי, מזגן | ...

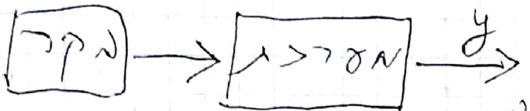
1. בעיית עקיבה
2. בעיית ייצוב

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,u) \\ y = h(t,x) \end{cases}$$

$u=?$ $y = y_c(t)$ פרוש

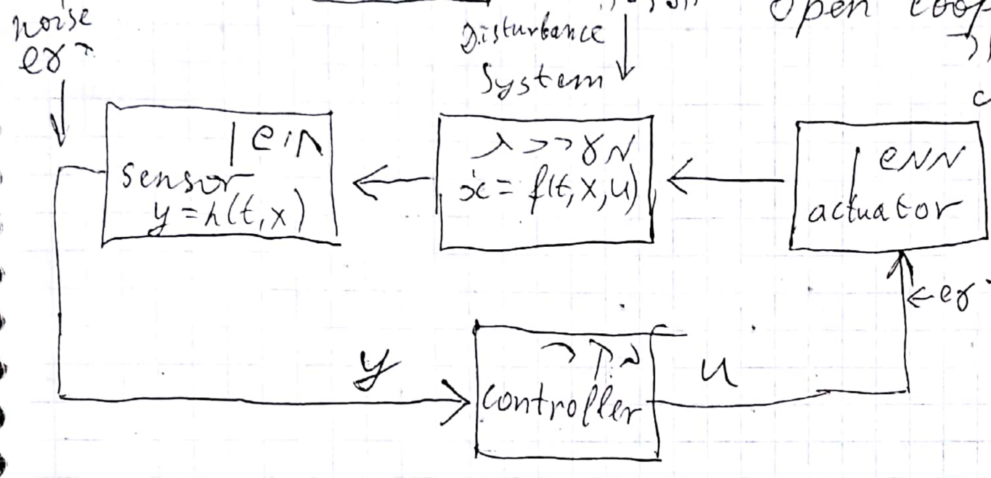
$u=?$ $x \to 0$ פרוש

עיקרון משוב



חוג פתוח
open loop

חוג סגור
closed loop



Feedback
משוב

דוגמא ייצוב

$$\ddot{x} = u$$

$$\begin{cases} u = -\text{sign}(x(0)) & 0 \le t \le |x(0)| \\ u = 0 & t > |x(0)| \end{cases}$$

פתרון לא טוב; חוג פתוח

הפתרון לא חסין לשיבושי מידע, והפרעות

אסימפטוטית ~~חוק~~ $u = -x$ פתרון נכון!

או

חוק זמן סופי $u = -\sqrt{|x|}\,\text{sign}\,x$

$\dot{x} = -|x|^{\frac{1}{2}}\,\text{sign}\,x$ משוואה הומוגנית

או $\begin{cases} u = -x^3, & |x| \ge 1 \\ u = -\sqrt[3]{x}, & |x| \le 1 \end{cases}$ בזמן קבוע!

משוואה הומוגנית ב Bilimit

לא ממש ישימה...

בקרה קלסית: לינאריות

לינאריזציה: $\dot{x} = f(x,u)\,;\ f(x_0,u_0)=0$

$y = h(x)\,,\ h(x_0)=y_0 \rightarrow$ נמצא אופטר פסדו

$$(x-x_0)^{\cdot} = f'_x(x_0,u_0)(x-x_0) + f'_u(x_0,u_0)(u-u_0) + o(x-x_0,u-u_0)$$

$$y-y_0 = h'_x(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

$$\begin{cases}(\Delta x)' = A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta y = C\Delta x\end{cases}$$ LTI
linear time-invariant system

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} = C\tilde{x}\,,\end{cases} \Rightarrow \tilde{u} = U(\tilde{x}) \text{ ,, } K\tilde{x}$$ כאשר $\tilde{y}=\tilde{x}$

$$u = u_0 + \cancel{U(x-x_0)}\,K(x-x_0)$$

בקיוון: מייצב את המערכת לוקלית

אם $\tilde{y} \neq \tilde{x} \Leftarrow$ בונים אובזרבר צופה

צופה: $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x}-\tilde{y})$

$\tilde{u} = K\hat{x}\,,\ u = u_0 + K\hat{x}$

תזכורת: O ו-o

יש פונקציות $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n_1}$, $g:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n_2}$

ברור מה קורה $x \to x_0 \in \mathbb{R}^m$

$f(x) = o(g(x)) \overset{\text{מוגדר}}{\Longleftrightarrow} \left(\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|} = 0\right)$ אם $g \neq 0$ "קטן בהשוואה ל-"

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \|f(x)\| \leq \varepsilon \|g(x)\|$

$f(x) = O(g(x)) \Longleftrightarrow \exists C>0, \delta>0: \|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \|f(x)\| \leq C\|g(x)\|$

"מאותו סדר גודל"

לינאריזציה

$x \to 0$

$$x^2 = O(x),\quad x^2 = o(x),\quad x = o(1),\quad x = O(10^6)$$

$$\ln x = o\left(\frac{1}{x}\right),\quad \cos x = O(1),\quad \sin x = O(x)$$

הערה היו צריך לכתוב $x \in O(1),\ x \in o(x^{\frac{1}{3}})$

$x \in O(|x|^{\frac{1}{4}})$

סוף הערה

לינאריזציה

$$\dot{x} = \underbrace{x^2}_{\text{מערכת}} + \underbrace{u}_{\text{ייצוב}} = u + o(x) \quad (x \to 0 \text{ כאשר})$$

$u_0 = x_0 = 0$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{x}} = u,\quad u = -\tilde{x} = -x$$

(מיצוב)

$$\dot{x} = -x + x^2$$

$$\xrightarrow{\quad\ } 0 \xleftarrow{\quad\ } 1 \xrightarrow{\quad\ }$$

$$x(0) < 1 \Rightarrow x(t) \to 0$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow x \equiv 1$$

$$x(0) > 1 \Rightarrow x \to \infty$$

תוך זמן קצוב! בזמן קטן מ-1.

$$\dot{x} = x^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt}\frac{1}{x^2} = 1$$

$$-\frac{1}{x}\Big|_0^t = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = \int_0^t \frac{\dot{x}}{x^2}\,dt = \int_0^t dt = t$$

$$-\frac{1}{x(t)} = t - \frac{1}{x(0)}$$

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x(0)} - t} \qquad x(0) > 1 \Rightarrow x = \infty \text{ ב-} t = \tfrac{1}{x(0)} < 1$$

ייצוב גלובלי תוך זמן קצוב:

$$u = -x^{\frac{1}{3}} - 2x^2 \operatorname{sign} x$$

הוכחה: 1. $x \to 0$ (ליפונוב) $V = x^2 \Rightarrow \dot{V} = 2x\dot{x} < 0,\ x \neq 0$

2. הערכת הזמן:

$$|\dot{x}| \geq \begin{cases} |x|^{\frac{1}{3}} & |x| < 1 \\ x^2 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$T = -\int_{x(0)}^{0} \frac{dx}{\dot{x}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

($x(0) > 1$ נניח)

כמובן כך המקרה הכללי אלי

הערה

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ y = h(t, x) \end{cases}$$

לינאריזציה לאורך פתרון מסוים $x = x_*(t),\ u = u_*(t)$ מקבלים

$$\dot{\tilde{x}} = A(t)\tilde{x} + B(t)\tilde{u}$$

6. Lyapunov Stability יציבות לפי ליאפונוב

מצב מתמיד $\dot{x} = f(t,x)$, $f(t,x_0)=0$

הגדרה: מצב מתמיד (Equilibrium) x_0 נקרא יציב לפי Lyapunov בזמן t_0 אם

אם $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x(t)$ פתרון $\|x(t_0)-x_0\|<\delta \Rightarrow \forall t>t_0\ \|x(t)-x_0\|<\varepsilon$

אם δ אינו תלוי ב-t_0 $\forall t_0\in\mathbb{R}$ אז מדברים על יציבות אחידה (uniform)

הגדרה: המצב המתמיד x_0 נקרא יציב אסימפטוטית בזמן t_0 אם

1. הוא יציב

2. הוא מושך לוקלית: locally attractive / attracting

$\exists\delta>0$: $\|x(t_0)\|<\delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t)=x_0$

משפט Lyapunov לוקלי: $\dot{x}=f(t,x)$, $f(t,x_0)=0$, $x\in\mathbb{R}^n$

1. $\exists\vartheta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\vartheta\in C^1$ רציפה גזירה

א. $\vartheta(x_0)=0$, $\vartheta(x)\ge 0$, $\vartheta(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0$ (מוגדרת חיובית) Positive Definite

ב. $\dot\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}(x)\, f(t,x) \le 0$

$\Leftarrow$ יציבות

2. במקום ב':

$\dot\vartheta(t,x)\le -w(x)$

ב'. $W(x)$ מוגדרת חיובית, $w\in C$

$w\ge 0$, $W(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$

$\Leftarrow$ יציבות אס' לוקלית

3. אם 2 ו-ϑ מוגדרת בכל $\mathbb{R}^n$, גלובלית $\Rightarrow$ חסום $\{x \mid \vartheta(x)\le M\}$ $\forall M>0$

$\forall\{x_n\}$ $x_n\to\infty \Rightarrow \vartheta(x_n)\to\infty$ נגיד שקול

radially unbounded function

Kurzweil Theorem: $\dot{x} = f(x)$, $f \in C$, $f(0) = 0$

$\dot{x} = f(x)$ AS (GAS) $\Leftrightarrow \exists v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $w: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pos. def

$v \in C^\infty$, $w \in C^\infty$

$\dot{v} = -w$.

<u>משפט</u>

$$\dot{x} = Ax + R(t,x)$$

$$R(t,x) = o(\|x\|) = o(x)$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\quad \|x\| < \delta \Rightarrow \|R(t,x)\| \le \varepsilon \|x\|$

1. $\operatorname{Spec} A \in \mathbb{C}_- = \{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda < 0\} \Rightarrow$ יציבות א"ס
2. $\operatorname{Spec} A \cap \mathbb{C}_+ \ne \emptyset$, $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda > 0\} \Rightarrow$ אי יציבות

<u>דוגמא</u>

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1$

יציבות גלובלית

$V(x) = x_1^2 + x_2^2$

$\dot{V}(x) = 2\cancel{x_1}x_2 - 2\cancel{x_2}x_1 - x_1^2(x_1^2 + x_2^2) - x_2^2(x_1^2 + x_2^2) = -(x_1^2 + x_2^2)^2$

יציבות א"ס גלובלית

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

$\dot{V} = (x_1^2 + x_2^2)^2 = V^2$ $\qquad V = \|x\|^2$

[illegible]

<u>דוגמא</u>

$$\begin{cases} \boxed{\dot{x}_1 = x_2} + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \boxed{\dot{x}_2 = -x_1 - 0.01x_2} + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.01 \end{pmatrix}$

חיכוך

$p(\lambda) = \lambda^2 + 0.01\lambda + 1$

יציבות אסימפטוטית לוקלית

עדיין הגבולות אם קצת מרחיקים