Homogeneity 'הומוגניות' [illegible] **הרצאה 9**

$\boxed{\text{חזרה}}$

$x \in \mathbb{R}^n$, $\deg x_i = m_i > 0$

HD <u>homogeneity degree</u> of the coordinate, its <u>weight</u>, $i = 1, 2, \dots, n$

$$d_\varkappa : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\varkappa^{m_1} x_1, \dots, \varkappa^{m_n} x_n)$$

kappa $\varkappa > 0$, dilation נקרא

$$d_{\varkappa_1 \varkappa_2} = d_{\varkappa_1} d_{\varkappa_2}$$

חבורה group

הגדרה

$\deg f = q$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

$$\forall \varkappa > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(d_\varkappa x) = \varkappa^q f(x)$$

דוגמא

$\forall i \ \deg x_i = 1$

1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 x_3 \\ 0 \\ x_3^2 \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 x_2} \end{pmatrix}, \quad \deg f = 2$$

לא מוגדרת ב-0

2. $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 1$, $\deg x_3 = 1$

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_3 x_2^3 \\ x_1^2 - x_3^5 / x_2 \\ x_3^4 \cos\left(\dfrac{x_1}{x_2 x_3}\right) \end{pmatrix} \quad \deg f = 4$$

$$\begin{pmatrix} (\varkappa^2 x_1)^2 + \varkappa x_3 (\varkappa x_2)^3 \\ (\varkappa x_1)^2 - (\varkappa x_3)^5 / (\varkappa x_2) \\ (\varkappa x_3)^4 \cos\left(\dfrac{\varkappa^2 x_1}{\varkappa x_2 \varkappa x_3}\right) \end{pmatrix} = \varkappa^4 f(x)$$

$\varkappa > 0$, $x_2, x_3 \neq 0$

$\dot x \in F(x) \in T_x\mathbb{R}^n$ נכליל

לדיפ' (אינקלוזיות

(לא פורמלי)

נקרא הומוגני אם הקבוצה

אינו' לסקלור בזמן ובמרחב

$$(t, x) \mapsto (\varkappa^p t, d_\varkappa x)$$

שולח מסלולים למסלולים,

נקראת דרגת ההומוגניות $q=-p$ Homogeneity Degree

מקבלים

$$\frac{d(d_\varkappa x)}{d(\varkappa^{-q} t)} \in F(d_\varkappa x)$$

לכן

$$\dot x \in \varkappa^{-q} d_\varkappa^{-1} F(d_\varkappa x)$$

שקול ל

$$\dot x \in F(x)$$

הגדרה (פורמלית ואינטואי')

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall \varkappa>0 \quad F(d_\varkappa x) = \varkappa^q d_\varkappa F(x)}$$

כאשר F lipper ופשוטה

לא רב ערכית פונקציה

מקרה פרטי: $\dot x = f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x)\end{pmatrix} \in T_x\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\dot x_i = f_i(x) \qquad f_i(d_\varkappa x) = \varkappa^{m_i+q} f_i(x)}$$

$$\deg \dot x_i = \deg f_i = \deg x_i + q$$

$$\boxed{\deg t = p = -q \in \mathbb{R}} \quad = \deg x_i - \deg t$$

דוגמאות מערכת LTI הומוגנית

$\dot{x} = Ax \quad \deg x_i = 1,\ i = 1,\dots,n$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad q = 0,\ \deg t = -q = 0$

דוגמא $\deg x_1 = 2,\ \deg x_2 = 3,\ \deg t = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [x_2]^{\frac{2}{3}} - x_1 \\ \dot{x}_2 = \begin{cases} x_1^3 / x_2, & x_2 \neq 0 \\ 0, & x_2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

בכלל לא ליניארית
גם נגזרת Filippov
לא תכונה פה

למרות צאות נראה $\deg t = -q \cdot e$
מצייר תכונות חשובות של הכללות/משוואות

homogeneity degree - HD

חשיבות מרחב משיק

דוגמא

$x \in \mathbb{R} \quad \dot{x} = x^3$

האם הומוגנית? $\deg x - \deg t = 3 \deg x$

$$\frac{d\, \varkappa^{\deg x} x}{d\, \varkappa^{\deg t} t} = \left(\varkappa^{\deg x} x\right)^3$$

$\varkappa > 0$ צריך להגמ3ם

~~Sent~~

$$\boxed{2 \deg x = -\deg t}$$

$(\deg x > 0!)$ למשל: $\deg x = \frac{1}{2}$, $\deg t = -1$

או $\deg t = -2$, $\deg x = 1$ - נבחר

אז HD של השדה הווקטורי x^3 של המשוואה $\dot{x} = x^3$ הוא -2

באותו זמן $\deg x^3 = 3$ - x^3 כפונקציה

|| פה אנו רואים את ההבדל בין HD של שדה וקטורי ושל פונקציה

דוגמא

$x\in\mathbb{R}$, $\dot x = -\operatorname{sign} x$

$\deg x - \deg t = 0$ $\quad$ $\operatorname{sign}(\varkappa^{\deg x} x) = \operatorname{sign} x$

ההכללה הזו מתאימה להגדרת Filippov

$$\dot x \in \begin{cases} \{-\operatorname{sign} x\}, & x \neq 0 \\ [-1,1], & x = 0 \end{cases}$$

$\deg x = 1$
$\deg t = 1$
$F(\varkappa x) \equiv \varkappa^{1-1} F(x)$
$F(\varkappa x) \equiv F(x) \Rightarrow F(0)$, $x=0$ ת. אינו נכון

גם היא הומוגני

$$\text{גם} \quad \dot x \in \begin{cases} \{-\operatorname{sign} x\}, & x \neq 0 \\ [-2,3], & x = 0 \end{cases}$$

הומוגני

וגם הגדרת Filippov תואם! בעייתי!

$$\text{גם} \quad \dot x \in \begin{cases} \{-\operatorname{sign} x\}, & x \neq 0 \\ [-1,-0.5], & x = 0 \end{cases}$$

הומוגני

אבל לא הגדרת Filippov

ואין פתרון ל- $x(0) = 0$

$$\dot x \in \begin{cases} \{-\operatorname{sign} x\}, & x \neq 0 \\ \{0\}, & x = 0 \end{cases}$$

יש אותם בעיות כמו ל $\dot x = -\operatorname{sign} x$ (Filippov)

היא לא הגדרת Filippov

הומוגני

$$\dot x \in \begin{cases} \{\operatorname{sign} x\} & x \neq 0 \\ \{0\} & x = 0 \end{cases}$$

יש בעיות לכל $x(0)$

אבל היא לא שקולה ל- $\dot x = \operatorname{sign} x$

כי יש לה פתרון יחיד ל $x(0)=0$ במובן Filippov

האריתמטיקה ההומוגנית

$$A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

1. $\deg (A + B) = \deg A = \deg B$
2. $\deg \alpha \cancel{A} = \deg A \,, \quad \alpha \neq 0$
3. $\deg 0$ — כל מספר ממשי! , $\underset{\alpha \neq 0}{\deg} \alpha = 0$
4. $\deg AB = \deg A + \deg B$

   $\deg A/B = \deg A - \deg B$
5. $\deg A^{\alpha} = \deg [A]^{\alpha} = \deg A \cdot \alpha$

   (הגדר)

   $\deg A^0 = \deg [A]^0 = 0$

   $[A]^0 \overset{\text{def}}{=} 1 \cdot \operatorname{sign} A = \operatorname{sign} A$
6. $\deg \dfrac{\partial A}{\partial x_i} = \deg A - \deg x_i$

הוכחת 4!

$$\frac{A(d_{\varkappa} x)}{B(d_{\varkappa} x)} = \frac{\varkappa^{\deg A} A(x)}{\varkappa^{\deg B} B(x)}$$

הוכחת 6!

$\deg x_i = m_i \,, \quad i = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial A}{\partial x_i}(d_{\varkappa} x) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{1}{\varkappa^{m_i} \Delta x_i} \left(A(\dots, \varkappa^{m_i} x_i + \varkappa^{m_i} \Delta x_i, \dots) - A(d_{\varkappa} x) \right)$$

$$= \frac{\varkappa^{\deg A}}{\varkappa^{m_i}} \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\left(A(\dots, x_i + \Delta x_i, \dots) - A(x) \right)}{\Delta x_i}$$

$$= \varkappa^{\deg A - m_i} \frac{\partial A}{\partial x_i}(x)$$

7. $\deg \dot{A} = \deg A - \deg t = \deg A + q$

<u>הוכחה</u>

מקרה ראשון קלסי:

$\dot{x}_i = f_i(x)$, $\deg x_i - \deg t = \deg f_i$ | $\dot{x} = f(x)$,

$m_i + q = \deg f_i$ הגדרה!

$$\deg \dot{A} = \deg \sum_i \frac{\partial A}{\partial x_i} f_i = \quad \text{אז}$$

$$= \deg \frac{\partial A}{\partial x_i} + \deg f_i = \deg A - m_i + m_i + q, \; i = 1, \dots, n$$

<u>מקרה כללי</u>: $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\dot{x} \in F(x) \subset T_x \mathbb{R}^n$

$$\dot{A}(x) = \left\{ \frac{\partial A}{\partial X} \dot{X} \right\}_{\dot{x} \in F} = \frac{\partial A}{\partial X}(x) \cdot F(x) \subset \mathbb{R}^k$$

$\dot{A}: \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^k}$ תת קבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} dA_1(x,z) \\ \vdots \\ dA_k(x,z) \end{pmatrix} \middle| z \in F(x) \right\}$$

$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \end{pmatrix}$, $A_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\deg A_j = \deg A$

<u>הגדרה</u> הדרגה ההומוגנית של העתקה קבוצתית
(לא הכלה עיפרנציאלית)

$G: \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^k}$, $G(d_\varkappa x) = \varkappa^{\deg G} G(x)$ כמובן

$$\dot{A}(d_\varkappa x) = \left. \begin{pmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial A_1}{\partial x_n} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial A_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial A_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \right|_{d_\varkappa x} \cdot F(d_\varkappa x) =$$

$$= \begin{pmatrix} \varkappa^{\deg A - m_1} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} & \cdots & \varkappa^{\deg A - m_n} \frac{\partial A_1}{\partial x_n} \\ \varkappa^{\deg A - m_1} \frac{\partial A_k}{\partial x_1} & \cdots & \varkappa^{\deg A - m_n} \frac{\partial A_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varkappa^{m_1 + q} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varkappa^{m_n + q} \end{pmatrix} F(x) =$$

$$= \frac{\partial A}{\partial X}(x) \begin{pmatrix} \varkappa^{\deg A - m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varkappa^{\deg A - m_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varkappa^{m_1 + q} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varkappa^{m_n + q} \end{pmatrix} F(x) = \varkappa^{\deg A + q} \dot{A}(x)$$

משולו.

נורמה הומוגנית

פונקציה $\varphi(x)$, $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, נקראת נורמה הומוגנית אם

1. $\varphi \in C$, 2. $\varphi(x) \geq 0$, $\varphi(x)=0 \iff x=0$ positive definite

3. $\deg \varphi = 1$, מסמנים $\|\cdot\|_h$

דוגמא

$\deg x_1 = \dots = \deg x_n = 1$

נורמה הומוגנית $\|x\|_{h2} = \left(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\|x\|_{h\infty} = \max|x_i|$

הומוגניות שקולות: $\deg x_i = m \neq 1$, $m>0$

$\Leftarrow$ $\deg\left(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = m$

כבר לא נורמה הומוגנית!

במקרה הכללי:

נורמות הומוגניות $\|x\|_{h\gamma} = \left(|x_1|^{\frac{\gamma}{m_1}} + \dots + |x_n|^{\frac{\gamma}{m_n}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$

$\|x\|_{h\infty} = \max_i |x_i|^{\frac{1}{m_i}}$

הן לא נורמות אמיתיות!

טענה: כל נורמות הומוגניות שקולות

φ_1, φ_2 - נורמות $\Leftarrow$ $\exists\, \gamma_m, \gamma_M > 0$

$\forall x: \quad \gamma_m \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \gamma_M \varphi_1(x)$

הוכחה: $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ בפרט $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ רציפה, בספירה

$S_1 = \{\|x\|=1\}$ (יחידה) $\Rightarrow$ $\left.\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right|_{S_1} \subset [\gamma_m, \gamma_M]$ ל γ_m, γ_M מסוימים

$\deg \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = 0$

מכיוון,

טענה: נניח $\|\cdot\|_h$ - נורמה הומוגנית

$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ הומוגנית ורציפה 100

בכל נקודה, חוץ מ-0.

אזי קיימת $\gamma > 0$ כך ש

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad |\varphi(x)| \le \gamma \|x\|_h^{\deg \varphi}$$

הוכחה:

$$\deg \frac{\varphi(x)}{\|x\|_h^{\deg\varphi}} = \deg\varphi - \deg\varphi = 0$$

לכן $\varphi / \|\cdot\|_h$ מקבלת אותם ערכים בכל $d_\kappa S_1$ וחסומה ב S_1 מרציפות

$$\left.\frac{\varphi(x)}{\|x\|_h^{\deg\varphi}}\right|_{\mathbb{R}^n} = \left.\frac{\varphi(x)}{\|x\|_h^{\deg\varphi}}\right|_{x \in S_1} \in [-\gamma, \gamma]$$

מ.ש.ל.

בשביל מה אנו צריכים כל זה?

עם מה נוכיח $\dot{x} \in F(x)$, $\deg t = -q$ homogeneous Filippov DI

א. יציבות אס' לוקלית $\Leftrightarrow$ יציבות אס' גלובלית

ב. $\deg t > 0 \Rightarrow$ התכנסות תוך זמן סופי (יציבות)

FT stability

ג. $\deg t = 0 \Rightarrow$ יציבות אקספוננציאלית

exponential stability

ד. $\deg t < 0 \Rightarrow$ התכנסות תוך זמן T זהה לכל כדור $\|x\| \le 1$

Fixed Time convergence

התכנסות ~~א~~יטית מאקספוננציאלית

ניתן גם להעריך את הדיוק בנוכחות רעשים וסטיות

הערה: להכלה,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \in F_1(x) \subset \mathbb{R} \\ \dot{x}_2 \in F_2(x) \\ \dot{x}_n \in F_n(x) \end{cases}$$

יש צורה מלבנית!

$$\dot{x} \in F_1(x) \times F_2(x) \times \dots \times F_n(x)$$

זה נוח אבל לא תמיד נכון

פשוטא ~~[illegible]~~:

לא הומוגנית ~~[illegible]~~ $|\dot{x}_1 x_2 + \dot{x}_2 x_3 + x_3 \dot{x}_3| \le 1$

לא בצורה כזו, גם לא קמורה?)

פונקציית Lyapunov הומוגניות

תזכורת:

Kurzweil (1956)

$\dot{x} = f(x),\ f \in C,\ f(0) = 0$

$\Leftrightarrow$ AS

$\exists V \in \underbrace{C^\infty(\mathbb{R}^n)}_{\text{או לוקלי}}$ גם גלובלי, גם לוקלי

$V(0) = 0,\ V(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq 0,$ radially unbounded

$\dot{V}(x) < 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ $\quad \|x_n\| \to \infty \Rightarrow V(x_n) \to \infty$

Clarke, Ledyer, Stern (1998)

$0 \in F(0),\ \dot{x} \in F(x)$ הכלת Filippov

$\Leftrightarrow$ AS

(גם לוקלי) $\exists V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ גם גלובלי (גם לוקלי)

$\exists W \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),\ W \in C(\mathbb{R}^n)$

1. Positive Definiteness $\forall x \neq 0: V(x), W(x) > 0$

$V(0) = 0$

2. (radially unbounded) $a \geq 0$ חסום לכל $\{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq a\}$

3. $\max_{v \in F(x)} \nabla V(x) v \leq -W(x) \quad \forall x \neq 0$

$(\Rightarrow W(0) = 0)$

פונקציית ליאפונוב, נוסח מעודכן

נוסח של Rosier - (כן | לא, במקור ל ODE) 101a

שיטה של → Bernuau, Efimov, Perruquetti, Polyakov (2013, 2016)

הכלות Filippov הומוגניות $\dot{x} \in F(x)$

$\deg t = p = -q$, $d_\varkappa x = (\varkappa^{m_1} x_1, \dots, \varkappa^{m_n} x_n)$, $m_i > 0$

<u>משפט</u> אם $\dot{x} \in F(x)$ AS אז לכל $k; l > 0$

המקיימים $k + q > 0$, $l \cdot \max_i m_i < k$

קיימים שתי פונקציות <u>רציפות</u> $\tilde{W}$

1. $\tilde{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\tilde{W}, \tilde{V} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

מוגדרות חיוביות: $\tilde{W}(x), \tilde{V}(x) > 0 \iff x \neq 0$

$\tilde{W}(0) = \tilde{V}(0) = 0$

2. $\tilde{V} \in C^l(\mathbb{R}^n)$, $\deg \tilde{V} = k$, $\deg \tilde{W} = k + q$

3. $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $\max_{z \in F(x)} \nabla \tilde{V}(x) \cdot z \leq -\tilde{W}(x)$

<u>הערה:</u> הומוגניות $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_1}$ בגזירה

$$\deg \varphi'_{x_i} = \deg \varphi - \deg x_i = \deg \varphi - m_i$$

לכן | לגזירות חלקיות מסדר מסוים יש דרגות הומוגניות שליליות

אם $\deg \theta < 0$ אז היא לא רציפה בנקודה $x = 0$ כי אם $\theta(x_0) \neq 0$

אז $\lim_{\varkappa \to 0} \theta(d_\varkappa x_0) = \lim_{\varkappa \to 0} \varkappa^{\deg \theta} \theta(x_0) = \infty$ או $-\infty$