הרצאה 8

שיטת Anosov (1959)

מערכת עם יציאה של relative degree r

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$u = -k\,\mathrm{sign}\,\sigma, \quad \sigma = Cx \in \mathbb{R}$$

נניח בצורה $\sigma = x_1$

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = x_3$

$\vdots$

$$\sigma^{(r)} = \dot{x}_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{r,r+1}x_{r+1} + \tilde{k}\,\mathrm{sign}\,x_1$$

$$\dot{x}_{r+1} = a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + \dots + a_{r+1,n}x_n$$

$\vdots$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n$$

(שיטת Isidori, צורה קנונית)

אחרי הרבה

1. $r=2$ המערכת יציבה אסימפטוטית

אם כל הערכים העצמיים של החלק הליניארי הם בשמאל ($\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid Re\,\lambda < 0\}$) ו- $\tilde{k} < 0$.

אם יש ערך עצמי ב- $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \mid Re\,\lambda > 0\}$ או $\tilde{k} > 0$

אז המערכת לא יציבה

2. $r \geq 3$, $\tilde{k} \neq 0 \Rightarrow$ אין יציבות

Trivial

3. אין rel. degree $\Rightarrow$ אין מה לעשות

לא קיים

הוכחה

Andronov [illegible] 83a

$$\ddot{\sigma} = a\sigma + b\dot{\sigma} - \alpha \,\mathrm{sign}\,\sigma, \quad \alpha > 0$$

$a, b < 0 \iff$ יציבות אסימפטוטית [illegible]

[illegible] a, b.

~~Twisting controller~~ ~~$\boxed{r=2}$~~

1. $r = 1$

$$\dot{\sigma} \in [-C, C] + [K_m, K_M]\,u$$

$$u = -\alpha\,\mathrm{sign}\,\sigma, \quad \alpha > C/K_m > 0$$

$\Leftarrow \sigma = 0$ מושג תוך זמן סופי

2. $\boxed{r=2}$

Twisting controller

(Levant, 1985)

$$\ddot{\sigma} \in [-C, C] + [K_m, K_M]\,u \qquad (r = 2)$$

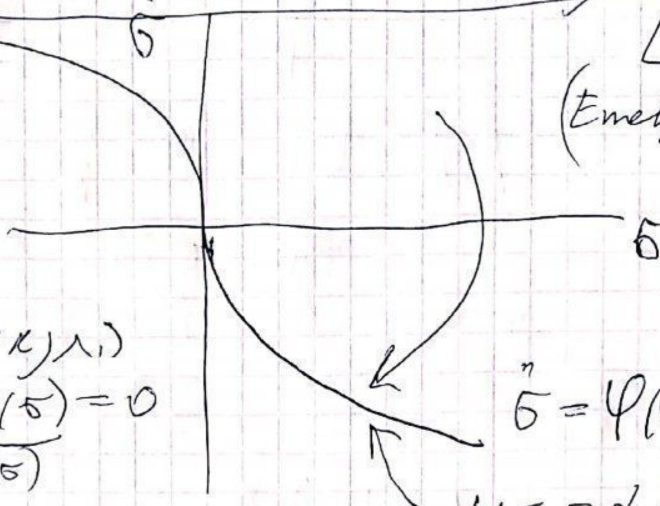
$$u = -\alpha_1\,\mathrm{sign}\,\sigma - \alpha_2\,\mathrm{sign}\,\dot{\sigma}, \quad \alpha_1 > \alpha_2$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 > C/K_m$$

$$K_m(\alpha_1 + \alpha_2) - C > K_M(\alpha_1 - \alpha_2) + C$$

<u>משפט</u> התכנסות תוך זמן סופי

2. התכנסות לפי המשוואה הנומינלית



Levant 1986

(Emelyanov, Korovin, Levantovski 1986)

Levant 1993

התנאי ההכרחי:

1-SM $\underbrace{\dot\sigma - \varphi(\sigma)}_{\Sigma(\sigma)} = 0$

$\ddot\sigma = \varphi(\sigma)$ FTS ODE

$u = -\alpha \,\mathrm{sign}[\dot\sigma - \varphi(\sigma)]$

$\Sigma\dot\Sigma \le 0$ נגזרת שלילית בסביבת $\Sigma = 0$

$$\dot\Sigma\Big|_{\Sigma=0} = \ddot\sigma - \varphi'(\sigma)\dot\sigma = \ddot\sigma - \varphi'(\sigma)\varphi(\sigma)$$

$$\ddot\sigma \in [-C, C] + \alpha[K_m, K_M]\,\mathrm{sign}(\dot\sigma - \varphi(\sigma))$$

התנאי:

$$\alpha K_m - C > |\varphi'(\sigma)\cdot\varphi(\sigma)|$$

מקרה נפוץ: $\varphi(\sigma) = -\beta|\sigma|^\rho \mathrm{sign}\,\sigma$

$$u = -\alpha\,\mathrm{sign}(\dot\sigma + \beta|\sigma|^\rho \mathrm{sign}\,\sigma), \quad 0<\rho<1$$

$$\alpha K_m - C > \beta\rho \underbrace{\cancel{|\sigma|^{\rho-1}}}_{|\sigma|^{\rho-1}} |\sigma|^\rho = \beta\rho|\sigma|^{2\rho-1} \Rightarrow \rho \ge \tfrac{1}{2}$$

המקרה $\rho = \frac{1}{2}$ הכי נוח:

$$\boxed{\alpha K_m - C > \tfrac{1}{2}\beta}$$

3. פה, הבטחנו בכך שהמשוואה

$$\dot\sigma + \beta|\sigma|^\rho \mathrm{sign}\,\sigma = 0$$

יציבה (אסימפטוטית) ובזמן סופי

לכל מוגדר $0<\rho<1$

(מפריעים מאתגרים...)

Terminal SM control (1994) .3

Mann, 1994

$$\varphi(t) = -\beta|\sigma|^{\rho}\operatorname{sign}\sigma$$

במקום $\varphi=\beta\sigma^{\rho}$, אי זוגיים $p,q\in\mathbb{N}$, $\rho=\frac{p}{q}\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

לוקחים $u=-\alpha\operatorname{sign}\Sigma$, $\Sigma=\dot\sigma+\beta|\sigma|^{\rho}\operatorname{sign}\sigma\to 0$ בז"ס סופי

מגיעים

$$V=\Sigma^{2}$$

מקבלים שצריך $\delta>\delta e$ $\sigma,\dot\sigma$

$$\Sigma\dot\Sigma=\left(\ddot\sigma+\beta\rho|\sigma|^{\rho-1}\dot\sigma\right)\Sigma$$

מספיק שלילי

$$-\alpha K_m-C+\beta\rho|\sigma|^{\rho-1}\dot\sigma \lessgtr 0 \qquad \Sigma>0,\ \Sigma<0$$

$\alpha>\frac{C}{K_m}$, $\alpha=\alpha(\sigma,\dot\sigma)>\frac{C}{K_m}+\frac{1}{K_m}\beta\rho\underbrace{|\sigma|^{\rho-1}\dot\sigma}$

!! $\sigma=\dot\sigma=0$ בסביבת חסום לא $\frac{\dot\sigma}{|\sigma|^{1-\rho}}$

$$\boxed{\Sigma=0\Rightarrow \dot\sigma\sigma^{\rho-1}=-\beta\sigma^{2\rho-1}\quad \text{סופי אם } \rho=\frac{p}{q}>\frac{1}{2}}$$

$$\left(|\sigma|^{\rho}\operatorname{sign}\sigma\right)^{\cdot}=\rho|\sigma|^{\rho-1}\operatorname{sign}\sigma\cdot\dot\sigma\cdot\operatorname{sign}\sigma=\rho|\sigma|^{\rho-1}\dot\sigma$$

כראשון מכך ש

Nonsingular terminal SMC (Mann Yu, 2005)

$\rho=\frac{p}{q}$, $0<p<q$ אי זוגיים

$$u=-\alpha(\sigma,\dot\sigma)\left(\dot\sigma^{q/p}+\beta\sigma\right)$$

מספיק אפשר לקחת $\alpha=\text{const}$

$$\cancel{\Sigma=\dot\sigma^{q}+\beta\sigma^{p}}$$

$$\cancel{\dot\Sigma=q\dot\sigma^{q-1}\ddot\sigma+\beta p\sigma^{p-1}\dot\sigma}$$

הוכחה:

$$\boxed{|\dot\sigma|^{1/\rho}\operatorname{sign}\dot\sigma+\beta\sigma>0 \Leftrightarrow \dot\sigma+\beta|\sigma|^{\rho}\operatorname{sign}\sigma>0}$$

$$u=-\alpha\operatorname{sign}\big(\underbrace{|\dot\sigma|^{1/\rho}\operatorname{sign}\dot\sigma+\beta\sigma}_{\Sigma}\big) \qquad \tfrac{1}{2}\le\rho<1$$

$$\dot\Sigma=\frac{1}{\rho}|\dot\sigma|^{\frac{1}{\rho}-1}\ddot\sigma+\beta\dot\sigma \qquad \ddot\sigma\sim K_m\alpha-C>\rho|\dot\sigma|^{2-\frac{1}{\rho}}$$

חסום בסביבת 0!

לא רוצים chattering　　**מקרה $r=1$**

$$\dot\sigma = h(t,x)+g(t,x)u \qquad |\dot h|\le \dot h_M$$

$$u = u_1+u_2 \qquad |u|\le U_M \Rightarrow \qquad |\dot g|\le \dot g_M$$

$$\dot u_1 = \begin{cases} -u, & |u|>U_M \\ -\alpha\,\mathrm{sign}\,\sigma, & |u|\le U_M \end{cases} \qquad \Rightarrow \dot u_{eq} = -\frac{\dot h g-\dot g h}{g^2} \text{ חסום}$$

$$U_M > |u_{eq}| \le \frac{C}{K_m}$$

$$u_2 = -\beta\sigma^\rho\,\mathrm{sign}\,\sigma$$

~~הוכחה~~ מזמן מסוים מקיים $|u|<U_M$ תמיד

כי כאשר $|u|>U_M$ מקטינים

$$\dot u = \dot u_1+\dot u_2 = -u-\beta\rho|\sigma|^\rho\dot\sigma =$$

$$= -u-\beta\rho|\sigma|^\rho g(u-u_{eq}), \quad \mathrm{sign}\,u = \mathrm{sign}(u-u_{eq}) \text{ כי } U_M > |u_{eq}|$$

$$\Rightarrow \cancel{\ddot\sigma \in [\pm\dot h_M+\dot g_M} \quad \boxed{\hat C = \sup_{|u|\le U_M}\left|h'_t+h'_x(a+bu)+(g'_t+g'_x(a+bu))u\right|}$$

$\alpha > C/K_m$, $\hat C/K_m$ מספיק

$$\ddot\sigma \in \hat C[-1,1]-[K_m, K_M](\alpha\,\mathrm{sign}\,\sigma+\beta\rho|\sigma|^\rho\dot\sigma) \qquad \boxed{\text{Levant 1993}}$$

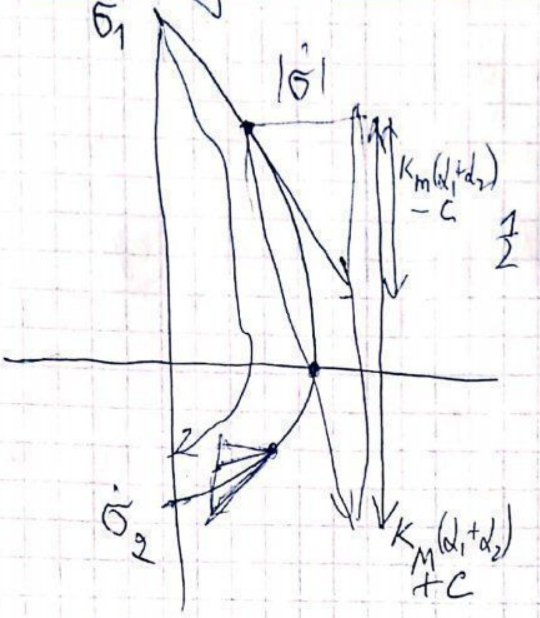
1. $0<\rho\le\frac12 \Rightarrow$ $\forall\beta>0\ \exists\alpha>0: \sigma,\dot\sigma\to0$ בזמן סופי גדול מספיק　קיים α מספיק
FT

2. $\rho=1 \Rightarrow u_2=u$, $\alpha>0$ גדול מספיק
$\Rightarrow$ exponentially $\sigma,\dot\sigma\to0$

3. $\rho\in(\frac12,1) \Rightarrow$ מונוטונית אסימפטוטי

Moreno ~2011

Twisting controller [illegible]



$$\ddot\sigma = -\alpha$$

$$\dot\sigma\ddot\sigma = -\alpha\dot\sigma$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\dot\sigma^2 = -\alpha\dot\sigma$$

$$\dot\sigma^2 + 2\alpha\sigma = const$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\ddot\sigma \in [-C, C] + [K_m, K_M]\,u\\ &u = -\alpha_1 \operatorname{sign}\sigma - \alpha_2 \operatorname{sign}\dot\sigma\\ &\alpha_1 > \alpha_2 > 0\end{aligned}}$$

$$\frac{\dot\sigma_1^2}{2[K_m(\alpha_1+\alpha_2)-C]} = \frac{\dot\sigma_2^2}{2[K_M(\alpha_1-\alpha_2)+C]}$$

[illegible]

$$\left|\frac{\dot\sigma_2}{\dot\sigma_1}\right| = \sqrt{\frac{K_M(\alpha_1-\alpha_2)+C}{K_m(\alpha_1+\alpha_2)-C}} = q < 1$$

[illegible]

$$T \le \sum T_i \le \sum \frac{|\dot\sigma_i|}{K_m(\alpha_1-\alpha_2)-C} \le \frac{\dot\sigma_0}{K_m(\alpha_1-\alpha_2)-C}\sum_{i=0}^{\infty} q^i < \infty$$

Chattering removal, $r = 1$

$$\dot\sigma = h + g\,u$$

$$\dot u = \begin{cases} -u, & |u| > U_M\\ -\alpha_1 \operatorname{sign}\sigma - \alpha_2 \operatorname{sign}\dot\sigma, & |u| \le U_M\end{cases}$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 > \hat{C}/K_m$$

$$K_m(\alpha_1+\alpha_2) - \hat{C} > K_M(\alpha_1-\alpha_2) + \tilde{C}$$

homogeneity מבוא לאחידות

$r=2$ <u>Twisting controller</u> <u>דוגמא</u>

$$u_{TW} = -\alpha_1 \operatorname{sign} \sigma - \alpha_2 \operatorname{sign} \dot{\sigma}, \quad \alpha_1 > \alpha_2$$
$$\alpha_1 - \alpha_2 > C/K_m$$

נסמן
$$\sigma_0 = \sigma, \quad \sigma_1 = \dot{\sigma}$$

אז ההכלה היא

$$\dot{\sigma}_0 = \sigma_1$$
$$\dot{\sigma}_1 \in [-C, C] + [K_m, K_M] K_F[u](\sigma_0, \sigma_1)$$

כאשר

$$K_F[-(\alpha_1 \operatorname{sign} \sigma_0 + \alpha_2 \operatorname{sign} \sigma_1)] = \begin{cases} -\alpha_1 \operatorname{sign} \sigma_0 - \alpha_2 \operatorname{sign} \sigma_1, & \sigma_0, \sigma_1 \neq 0 \\ [-\alpha_1, \alpha_1] - \alpha_2 \operatorname{sign} \sigma_1, & \sigma_0 = 0, \sigma_1 \neq 0 \\ -\alpha_1 \operatorname{sign} \sigma_0 + [-\alpha_2, \alpha_2], & \sigma_0 \neq 0, \sigma_1 = 0 \\ [-\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2], & \sigma_0 = \sigma_1 = 0 \end{cases}$$

$$M \circ N = \left\{ m \circ n \;\middle|\; \begin{matrix} m \in M \\ n \in N \end{matrix} \right\}$$ פה מניחים

נגדיר

$$\alpha + [\beta, \gamma] = [\alpha + \beta, \alpha + \gamma]$$
$$\gamma \geq \beta$$

נעשה החלפה/הצבה

לכל $\varkappa > 0$

$$t \mapsto \varkappa t$$
$$\sigma_0 \mapsto \varkappa^2 \sigma_0$$
$$\sigma_1 \mapsto \varkappa \sigma_1$$

$$\frac{d(\varkappa^2 \sigma_0)}{d(\varkappa t)} = \varkappa \frac{d\sigma_0}{dt} = \varkappa \sigma_1$$

$$\frac{d\varkappa\sigma_1}{d\varkappa t} \left(= \frac{d\sigma_1}{dt} \right) = [-C, C] + [K_m, K_M] \left(-\alpha_1 \operatorname{sign}(\varkappa^2 \sigma_0) - \alpha_2 \operatorname{sign}(\varkappa \sigma_1) \right)$$
$$= [-C, C] + [K_m, K_M](-\alpha_1 \operatorname{sign} \sigma_0 - \alpha_2 \operatorname{sign} \sigma_1)$$

Terminal SM control (לפי Levant)

[illegible]

$$r=2, \quad u_{TSM} = -\alpha\, \mathrm{sign}\left(\dot\sigma + \beta [\sigma]^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} [\sigma]^{\rho} = \lceil\sigma\rfloor^{\rho} = |\sigma|^{\rho}\, \mathrm{sign}\,\sigma \\ \deg[\sigma]^{\rho} = \rho \deg\sigma \end{array}}$$

סימון: [illegible]

$$u_{TSM}(\varkappa^2\sigma, \varkappa\dot\sigma) = -\alpha\, \mathrm{sign}\left(\varkappa\dot\sigma + \beta[\varkappa^2\sigma]^{\frac{1}{2}}\right) =$$
$$= -\alpha\, \mathrm{sign}\left(\varkappa\left(\dot\sigma + \beta[\sigma]^{\frac{1}{2}}\right)\right) = u_{TSM}(\sigma, \dot\sigma)$$

אותו דבר היה נכון גם לגבי Twisting

$$u_{Tw}(\varkappa^2\sigma, \varkappa\dot\sigma) = -\alpha_1 \mathrm{sign}(\varkappa^2\sigma) - \alpha_2 \mathrm{sign}(\varkappa\dot\sigma) =$$
$$= u_{Tw}(\sigma, \dot\sigma)$$

~~בדרך כלל r~~ ~~$u(\sigma, \dot\sigma, \dots, \sigma^{(r-1)})$~~

זאת תכונה חשובה מאוד

היא נקראת הומוגניות (אחידות)

Homogeneity

במשתני הקואורדינטות האלה,

נתנו משקל 2 ל- $\sigma_0 = \sigma$

ומשקל 1 ל- $\sigma_1 = \dot\sigma$

גם נתנו משקל 1 לזמן

כותבים: $\deg \sigma_0 = 2, \ \deg\sigma_1 = 1$

$\deg t = 1$

שימו לב: $\deg\sigma_1 = \deg\dot\sigma = 2-1 = \deg\sigma - \deg t$

מקרה כללי $r \in \mathbb{N}$

Weighted Homogeneity Theory

תורת ההומוגניות

נצייר מקדם לכל קואורדינטות ב-$\mathbb{R}^n$

$$\deg x_i = m_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

נצייר חבורת הטרנספורמציות הלינאריות

$$\forall \varkappa > 0 \quad d_\varkappa x = (\varkappa^{m_1} x_1, \dots, \varkappa^{m_n} x_n)$$

$$d_{\varkappa_1 \varkappa_2} = d_{\varkappa_1} \cdot d_{\varkappa_2} \quad \text{Dilation (Rosier, Kawsky (1986), Bocciotti)}$$

הגדרה.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

נקראת הומוגנית משקל weight

q degree דרגה

$$\forall \varkappa > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(d_\varkappa x) = \varkappa^q f(x)$$

אם

דוגמא

$$m_1 = m_2 = 1$$

$$\deg(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 2, \quad \deg\left(x_1^3 + \frac{x_2^{\cancel{3}\,5}}{x_1^2}\right) = 3$$

$$(\varkappa x_1)^3 + \frac{(\varkappa x_2)^5}{(\varkappa x_1)^2} = \varkappa^3\left(x_1^3 + \frac{x_2^5}{x_1^2}\right)$$

$$m_1 = 3, \; m_2 = 1$$

$$\deg(x_1 + x_2^3) = 3 \qquad \varkappa^3 x_1 + (\varkappa x_2)^3 = \varkappa^3 (x_1 + x_2^3)$$

בכלל, אופרטור דינמי מתי הומוגני?

לא קדום הצעד

$$(t, x) \mapsto (\varkappa^{-q} t, d_\varkappa x)$$

נניח ההכלה היא $\dot{x} \in F(x) \subset T_x\mathbb{R}^n$

אז

$$\frac{d\left(d_\varkappa x\right)}{d\,\varkappa^{-q}t} = \varkappa^q d_\varkappa \dot{x} \in \varkappa^q d_\varkappa F(x)$$

הגדרה ההכלה נקראת הומוגנית מדרגה ~~(...)~~ q Homogeneity degree

אם $\boxed{\forall \varkappa>0\ \forall x\in\mathbb{R}\quad \varkappa^q d_\varkappa F(x) = F(d_\varkappa x)}$

זאת אומרת שהחלפה $y = d_\varkappa x$

$\hat{t} = \varkappa^{-q}t$

מעבירה את $\dot{x}\in F(x)$

להכלה, $\frac{d}{d\hat{t}} y \in F(y)$

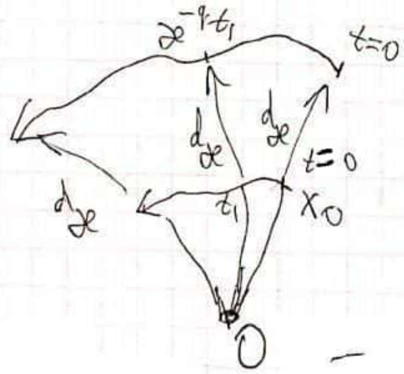
אז אחרי: $x_*(t)$ הוא פתרון של $\dot{x}_* \in F(x_*)$

$\Leftrightarrow$ עם תנאי התחלה, $x_*(0) = x_0$

$x_{**}(t) = d_\varkappa x_*(\varkappa^{-q}t)$ הוא פתרון של אותה הכלה,

עם תנאי ההתחלה $x_{**}(0) = d_\varkappa x_0$

$\forall \varkappa>0$ | (כו)



אפשר לומר את זה כ

$\deg t = -q \in \mathbb{R}$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \in T_x\mathbb{R}^n$$ משוואה דיפרנציאלית

נקראת הומוגנית מדרגה q

Kawski ~1986

$$\deg \dot{x}_i = \deg x_i + q = \deg x_i - \deg t \quad \text{אם}$$

זה מקרה פרטי של הגדרה הכללית

של הגדרה, להכלה דיפרנציאלית — Levant 2005

אי-שוויון דיפרנציאלי הומוגני שקול

להכלה דיפרנציאלית הומוגנית

<u>דוגמא</u>

שם $\deg t = -1$, $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 3$

$\deg \dot{x}_1 = 2+1 = 3$, $\deg \dot{x}_2 = 3+1 = 4$

$$\dot{x}_1^4 + \dot{x}_2^3 \le x_1^3 x_2^2 - x_2^4$$

$3 \cdot 4 = 12$ $\quad 4 \cdot 3 = 12$ $\quad 2 \times 3 + 3 \times 2 = 12$ $\quad 3 \cdot 4 = 12$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \in \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; z_1^4 + z_2^3 \le x_1^3 x_2^2 - x_2^4 \right\}$$ שקול

– לא קומפקטי

<u>מקרה כללי</u> $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_1(\dot{x}) \le f_2(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Updownarrow$$

$$\dot{x} \in \{ z \in \mathbb{R}^n \mid f_1(z) \le f_2(x) \} = F(x)$$

בצורה דומה,

$$f_1(\dot{x}, x) \le f_2(\dot{x}, x)$$
$$\tilde{f}_1(\dot{x}, x) \le \tilde{f}_2(\dot{x}, x)$$

$$\dot{x} \in F(x) = \left\{ z \;\middle|\; \begin{array}{l} f_1(z, x) \le f_2(z, x) \\ \tilde{f}_1(z, x) \le \tilde{f}_2(z, x) \end{array} \right\}$$

בדרך כלל לא הכלת Filippov

דוגמא מערכת LTI הומוגנית

$$\dot{x} = Ax \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$\deg x_i = 1,\ i = 1,\dots,n$

$q = 0,\ \deg t = -q = 0$

דוגמא

$\deg x_1 = 2,\ \deg x_2 = 3,\ \deg t = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [x_2]^{\frac{2}{3}} - x_1 \\ \dot{x}_2 = \begin{cases} x_1^3/x_2, & x_2 \neq 0 \\ 0, & x_2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

בכלל לא ליניארית

גם הגדרת Filippov לא תכונה פה

$\deg t = -q \cdot e$ נראה כאילו למרות

מצייר תכונות חשובות של הכלות/מאאת