הרצאה 7 <u>SM order</u> (Levant 1986, 1993)

$$\dot{x} = v(x), \quad x = (t, \bar{x})$$

אומרים שיש SM מסדר r בגלגל $\sigma=0$
constraint (r-SM)

$$r = (r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{N}^m, \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$$

$$\sigma_k : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \ \sigma_k \in C^{r_k - 1}$$

אם:

1. $\sigma_1, \dots, \sigma_1^{(r_1-1)}, \dots, \sigma_m, \dots, \sigma_m^{(r_m-1)} \in C$ רציפות

rth order sliding set

2. $\emptyset \neq L_r = \{x : \sigma_1 = \dots = \sigma_1^{(r_1-1)} = \dots = \sigma_m = \dots = \sigma_m^{(r_m-1)} = 0\}$

3. דרך כל נקודה של L_r עובר פתרון Filippov המקיים (לוקלית) (optional) את $\sigma_1 \equiv \dots \equiv \sigma_m^{(r_m-1)} \equiv 0$
כלל $K_F(v)\Big|_{L_r}$ יוגדר מוגדר אחד.

<u>הגדרה</u>

r-SM נקרא regular אם קיימים $\nabla\sigma_1, \dots, \nabla\sigma_1^{(r_1-1)}, \dots, \nabla\sigma_m, \dots, \nabla\sigma_m^{(r_m-1)}$ רציפים ובלתי תלויים
(אז L_r - יריעה חלקה)

L_r נקרא rth order sliding manifold

רגולריות $\Rightarrow$

$$r_1 + r_2 + \dots + r_m \overset{\text{def}}{=} |r| \leq n$$

<u>דוגמה</u>

$x \in \mathbb{R}$, $x^{(r)} = -\operatorname{sign} x$,נניח

$\sigma = x$, $x, \dot{x}, \dots, x^{(r-1)}$ רציפות — הקואורדינטות

$$x \equiv 0$$

פתרון ב-r-SM $\quad x^{(r)} = 0 \in [-1, 1]$, $\quad K_F \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \vdots \\ x^{(r-1)} \\ -\operatorname{sign} x \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} & x > 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ [-1,1] \end{pmatrix} & x = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} & x < 0 \end{cases}$

$$K_F(v)\Big|_{L_r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ [-1,1] \end{pmatrix}$$

(אין יציבות)

הגדרה! r-SM נקרא יציב, יציב אסימפטוטי, יציב תוך זמן סופי אם

בסביבות L_r ~~פתרונות~~ פתרונות

נשארים עד $t=\infty$, או מתכנסים ל-L_r

או תוך זמן סופי.

אפשרי גם מעל קטע זמן סופי

דוגמא

$$\sigma = x_1$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1.5|x_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign} x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -1.1 \operatorname{sign} x_1 + \cos(x_1+x_2), \end{cases}$$

כיוונים

$$(\sigma, \dot\sigma) = (x_1, -1.5|x_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign} x_1 + x_2)$$

$$L_2 = \{x_1, x_2 \mid x_1 = 0, x_2 = 0\}$$

פתרון

$$x_1 \equiv x_2 \equiv 0$$

$$0 \in K_F\begin{pmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.1[-1,1] + \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ [-0.1, 2.1] \end{pmatrix}$$

⇐ כי 2-SM אבל הוא לא רגולרי: $\nexists \nabla \dot x_1\big|_{L_2}$

הוא יציב תוך זמן סופי

דוגמא

$$\hat t = 1 \longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -1.5|x_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign} x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -1.1 \operatorname{sign} x_1 + \cos(100t) \end{cases}$$

אבל סוגה dynamics super-twisting

$$L_2 = \{(t, x_1, x_2) \mid x_1 = x_2 = 0\}$$

Levant 1993, 1989

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in K_F\Big|_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ [-1.1, 1.1] + \cos(100t) \end{pmatrix}$$

FT stable 2-SM $x_1 = 0$

Twisting מקודם <u>דוגמא</u>

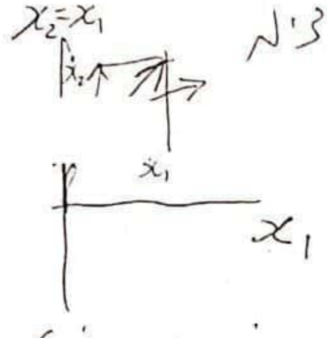
$$\begin{cases} \dot t = 1 \\ \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = 2\,\mathrm{sign}\,x_1 - \mathrm{sign}\,x_2 + \sin 3t \end{cases},\quad \sigma = x_1$$

$$L_2 = \{x_1 = 0,\ x_2 = 0\}$$

$$K[V]\Big|_{L_2} = \left\{ \begin{pmatrix} \dot t \\ \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \dot t = 1 \\ \dot x_1 = 0 \\ \dot x_2 \in [-2,2] + [-1,1] + \sin 3t \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ [-3,3] + \sin 3t \end{pmatrix} \right\} \ni \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אם 2-SM לא יציב

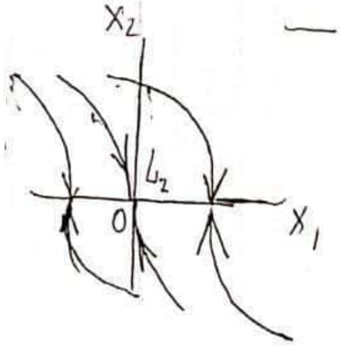


$t \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \sin 3t > 0$

<u>רגולרי:</u> $\nabla x_1 = (0,1,0)$

$\nabla \dot x_1 = \nabla x_2 = (0,0,1)$

נגזרה לפי t <u>דוגמא</u>



$$\begin{cases} \dot t = 1 \\ \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = -3\,\mathrm{sign}\,X_2 + \sin 3t \end{cases}$$

אם 2-SM $\dot x_1 = 0$ יציב

אבל לא אסימפטוטי

רגולרי

אם 1-SM $x_2 = 0$ יציב אך זמן סופי

הפתרון: $x_1 = \mathrm{const}$, $x_2 \equiv 0$

$$\dot x_2 = 0 \in [-3,3] + \sin 3t = [-3, 3+\sin 3t]$$

<u>דוגמא</u>

$$\begin{cases} \dot t = 1 \\ \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = -3\,\mathrm{sign}\,x_1 - \mathrm{sign}\,X_2 + \sin 3t \end{cases},\quad \sigma = X_1$$

Twisting Levant 1985

2-SM $X_1 = 0$ יציב אך זמן סופי, רגולרי

Classical SMC theory

1-SMC

$x \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u, \quad r = 1$$

$$\dot{\sigma} = h(t,x) + g(t,x)u, \quad u \in \mathbb{R}^m, \ \sigma \in \mathbb{R}^m$$

$\sigma = \sigma(t,x)$

מקרה, $m=1$ לפי הנ״ל:

$$|h| \le C, \quad 0 < K_m \le g \le K_M$$

$$\sigma \to 0 \Leftarrow u = -\alpha \operatorname{sign} \sigma, \quad \alpha > C/K_m$$

בזמן סופי

Matching condition

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad \dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u + \xi(t,x)$$

$u, \sigma \in \mathbb{R}^m$

שאלה: מה תנאי על ξ כדי

שתנועה ב-SM לא תהיה תלויה ב-ξ?

נניח - a, b, rel. degree: $r = (1, 1, \ldots, 1)$

$$\dot{\sigma} = \sigma_t' + \nabla\sigma\, a + \nabla\sigma\, b u$$

$$\nabla\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \begin{pmatrix} \nabla\sigma_1 \\ \vdots \\ \nabla\sigma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \sigma_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \sigma_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ m \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$\longleftarrow n \longrightarrow$$

$$r = (1, \ldots, 1) \Leftrightarrow \det(\nabla\sigma\, b) \ne 0, \quad \nabla\sigma\, b \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$\dot{\sigma} = 0 \Rightarrow u = u_{eq} = -(\nabla\sigma\, b)^{-1}(\sigma_t' + \nabla\sigma\, a)$$

Zero dynamics $\Leftrightarrow$ $(1, \ldots, 1)$-SM motion, $u = V(t,x)$

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t,x) + b(t,x)\, u_{eq}(t,x) \\ \sigma \equiv 0 \end{cases} \qquad u_{eq} \in K_F[V]\big|_{\sigma \equiv 0}$$

אנחנו לא מתעסקים ביציבות של SM
בנוכחות ההפרעה

$$\dot{\sigma} = \sigma'_t + \nabla\sigma a + \nabla\sigma b u + \nabla\sigma \xi$$

$$u_{eq} = -(\nabla\sigma b)^{-1}(\sigma'_t + \nabla\sigma a + \nabla\sigma \xi)$$

התנועה ב SM $\sigma\equiv 0$ מקבלת צורה

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u_{eq}(t,x) + \xi(t,x) \\ \sigma(t,x) \equiv 0 \end{cases}$$

מה כאן אותה תנועה?

$$\begin{cases} \dot{x} = a - b(\nabla\sigma b)^{-1}(\sigma'_t + \nabla\sigma a) \underbrace{- b(\nabla\sigma b)^{-1}\nabla\sigma\xi + \xi}_{\text{תוספת}} \\ \sigma \equiv 0 \end{cases}$$

התנאי הוא

$$\left[\xi - b(\nabla\sigma b)^{-1}\nabla\sigma\xi\right]\Big|_{\sigma=0} \equiv 0$$

התנאי המס׳ :

$$\underset{xi}{\xi} = b(t,x)\underset{zeta}{\zeta}(t,x)$$

אז מקבלים

$$\xi - b(\nabla\sigma b)^{-1}\nabla\sigma \overbrace{b\zeta}^{\xi} = \xi - b\zeta = \xi - \xi = 0$$

Matching condition

$$\boxed{\xi = b(t,x)\zeta(t,x)}$$

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)(u + \zeta(t,x)) \Leftarrow$$

ההפרעה פועלת בערוץ הבקרה
control channel

Zero dynamics $\Leftrightarrow$ SM motion

$$\xi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = a + b\, u_{eq}\big|_{\xi=0} \\ \sigma \equiv 0 \end{cases} \qquad u_{eq} = u_{eq}\big|_{\xi=0} - \xi$$

<u>הארה חשובה</u>

Matching condition בצורה כללית הפרעות
כדי לייצב מערכת

<u>דוגמא</u>

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \varepsilon, \ \underset{const}{\varepsilon \neq 0} \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

אי אפשר לייצב!

נניח $x_1 \equiv x_2 \equiv 0$

$\Leftarrow \dot{x}_1 = \varepsilon \neq 0$ סתירה...

linearization feedback ב

$\ddot{x}_1 = u$

מייצבים

$x_1 = \dot{x}_1 \equiv 0$

$\Rightarrow x_2 = -\varepsilon$

<u>משפט Utkin (1980)</u>

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)\,u, \quad \sigma(t,x) \in \mathbb{R}^m$$
$$u \in \mathbb{R}^m, \ x \in \mathbb{R}^n$$

$\boxed{\text{Utkin אצל } r = (1,1,\dots,1)}$, $r \in \mathbb{N}^m$

אז

$$\sigma^{(r)} = h(t,x) + g(t,x)\,u = g(t,x)\,(u - u_{eq}(t,x))$$

$\boxed{r = (1,1,\dots,1) \text{ אם}, \ g = \nabla\sigma\, b}$, $\det g \neq 0$, $u_{eq} = -g^{-1}h$

<u>משפט</u>

1. נניח $u(t)$ - פונקציה מוגבלת, $\|u\|, \|u_{eq}\| \leq U_M$

$\|\dot{u}_{eq}(t, x(t), u(t))\| \leq L$, $\dot{g} = g'_t + g'_x(a+bu)$, $\|\dot{g}\| \leq D$

$\|g^{-1}\| \leq C$

2. $\|\sigma^{(r-1)}\| \leq \varepsilon$

$$\sigma^{(r-1)} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{(r_1-1)} \\ \vdots \\ \sigma_m^{(r_m-1)} \end{pmatrix}$$

Utkin's filter

מסנן :Utkin

$$\frac{1}{\alpha}\dot z + z = u(t), \quad z(0)=0, \quad z\in\mathbb{R}^m$$
$$\alpha \gg 1$$

הפתרון במובן של Caratheodory
(מקרה פרטי של Filippov)

[illegible]

$$\|z-u_{eq}(t,x(t))\| = o(1)+O\left(\tfrac{1}{\alpha}\right)+O(\varepsilon)+O(\alpha\varepsilon)$$

$\varphi''(t), \varphi(t)\to 0$, $t\to\infty$ אין אצל Utkin

הרעיון: להעריך את $u_{eq}(t,x(t))$

למה, כי חכות?

דוגמא: פונקציה $f(t)$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $|\dot f|\le C$

בונים במחשב: $\dot x = u$. $\sigma = x-f$

$$\dot x = -2C\,\mathrm{sign}(x-f(t)), \quad u=-2C\,\mathrm{sign}\,\sigma$$

$$\dot\sigma = \overset{u}{\dot x} - \dot f \in \overset{u}{-2C\,\mathrm{sign}\,\sigma} + [-C, C]$$

$$\text{1-SM} \quad \sigma\equiv 0 \Leftarrow$$

$$\dot\sigma = 0 = u-\dot f \Rightarrow u_{eq} = \dot f$$

$$\frac{1}{\alpha}\dot z + z = u(t) \qquad z(t)\approx u_{eq} = \dot f$$

מנין 1) לפי (Golembo 1976)

הוכחה: ~~ניתוח המקרה הכללי -~~

כי המערכת לכאורה לינארית decoupled

~~המקרה הכללי כאילו כמו~~ כמו מקרה סקלרי

$$u = u_{eq} + u - u_{eq}$$

$$\dot{z} + \alpha z = \alpha u = \alpha u_{eq} + \alpha(u - u_{eq})$$

$$(z - u_{eq})^{\cdot} + \alpha(z - u_{eq}) = -\dot{u}_{eq} + \alpha(u - u_{eq})$$

נסמן $w = z - u_{eq}$ נקבל לסכום w

$$\dot{w} + \alpha w = -\dot{u}_{eq} + \alpha(u - u_{eq})$$

$\|w_b\| \le \sqrt{\alpha^2 U_M^2 m} = \alpha U_M\sqrt{m}$

$$w(t) = \underbrace{e^{-\alpha t} w(0)}_{\text{פתרון משוואה הומוגנית}} + \underbrace{w_a(t)}_{\text{סעיף א}} + \underbrace{w_b(t)}_{\text{סעיף ב}}$$

$$\dot{w}_a + \alpha w_a = -\dot{u}_{eq}(t), \quad w_a(0) = 0$$

$$|\dot{u}_{eq}| \le L$$

$$\Rightarrow \underbrace{|w_{ai}|}_{\text{מרכיב אחד}} \le \frac{L}{\alpha}, \quad \|w_a\| \le \sqrt{\underbrace{\left(\frac{L}{\alpha}\right)^2 + \dots + \left(\frac{L}{\alpha}\right)^2}_{m}} \le \sqrt{m}\,\frac{L}{\alpha}$$

$$\dot{w}_b + \alpha w_b = \alpha(u(t) - u_{eq}(t)), \quad w_b(0) = 0$$

$$w_b(t) = \alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\underbrace{(u(s) - u_{eq}(s))}_{\shortparallel}\,ds =$$

$$= \alpha e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s} g^{-1}(s)\,\sigma^{(r)}(s)\,ds =$$

לפי חלקים

$$= \alpha e^{-\alpha t}\left[e^{\alpha s} g^{-1}(s)\,\sigma^{(r-1)}(s)\right]\Big|_0^t$$

$$- \alpha e^{-\alpha t}\int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{\alpha s} g^{-1}(s)\right)\sigma^{(r-1)}(s)\,ds$$

$$= \alpha\left(g^{-1}(t)\,\sigma^{(r-1)}(t) - e^{-\alpha t} g^{-1}(0)\,\sigma^{(r-1)}(0)\right)$$

$$- \alpha^2 e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s} g^{-1}(s)\,\sigma^{(r-1)}(s)\,ds$$

$$+ \alpha e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s} g^{-1}(s)\,\dot{g}(s)\,g^{-1}(s)\,\sigma^{(r-1)}(s)\,ds$$

הנוסחה נכונה גם למקרה וקטורי

$$gg^{-1}=I \Rightarrow \dot{g}g^{-1}+g(g^{-1})^{\cdot}=I$$

$$(g^{-1})^{\cdot}=-g^{-1}\dot{g}g^{-1}$$

$$t\to\infty$$

מקבלים

$$\|w_B\| \le \alpha C\varepsilon + \underbrace{e^{-\alpha t}C\varepsilon}_{\to 0} +$$

$$+\underbrace{\alpha C\varepsilon e^{-\alpha t}e^{\alpha s}\Big|_0^t}_{\text{אינטגרל חיובי}} + \underbrace{\varepsilon C^2 D e^{-\alpha t}e^{\alpha s}\Big|_0^t}_{\text{אינטגרל חיובי}}$$

$$= 2C\alpha\varepsilon + e^{-\alpha t}C\varepsilon - \alpha C\varepsilon e^{-\alpha t}$$

$$+ C^2 D\varepsilon - C^2 D\varepsilon e^{-\alpha t}$$

נזרוק

$\to 0$ דועך

$$\Rightarrow \|w\| \le e^{-\alpha t}\|w(0)\| + \sqrt{m}\frac{L}{\alpha} + C^2 D\varepsilon + 2C\alpha\varepsilon + e^{-\alpha t}C\varepsilon$$

$\|w\| \le \|w_{hom.}\| + \|w_a\| + \|w_B\|$

$\wedge\!|$ $2\sqrt{m}V_M$

מקרה וקטורי

$$\|w\| \le e^{-\alpha t}(2\sqrt{m}V_M + C\varepsilon) + \sqrt{m}\frac{L}{\alpha} + C^2 D\varepsilon + 2C\alpha\varepsilon$$

מעוניין

נדרוש:

$$\alpha\varepsilon \ll 1 \quad \frac{L}{\alpha} \ll 1 \quad \varepsilon \ll 1$$

$\Leftarrow$ למשל אפשר לקחת

$$\alpha = k\sqrt{\varepsilon^{-1}} = \underbrace{k\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}_{\gg 1}, \quad \alpha\varepsilon = k\varepsilon^{\frac{1}{2}} \ll 1$$

צריך לדעת L, ε בשביל זה

לדעת ε זאת בעיה

אפשר לחשב ממוצע t בדרך אחרת

$$Z_\varepsilon = \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} u(s)\,ds$$

אינטגרציה בחלקים

$$\int \big(u_{eq}(t)-u_{eq}(s)\big)ds,\quad \dot u_{eq}(\xi)(t-s)$$

$$Z_\tau(t) = \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}\Big[u(s)-u_{eq}(s)+u_{eq}(s)\Big]ds =$$

Lagrange

$$\int_{t-\tau}^{t} u_{eq}(s) = \tau u_{eq}(s) + L\,O(\tau)\cdot\tau$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} g^{-1}(s)\,\sigma^{(r)}(s)\,ds + L\,O(\tau) + u_{eq}(t)$$

$$\|Z_\tau(t)-u_{eq}(t)\| \le \frac{1}{\tau}\Big\|\int_{t-\tau}^{t} g^{-1}(s)\,\sigma^{(r)}ds\Big\| + L\tau$$

בהנחת $\|g^{-1}\|\le C$

$$\le \Big\|\frac{1}{\tau}g^{-1}(s)\,\sigma^{(r-1)}(s)\Big|_{t-\tau}^{t} - \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}\big(g^{-1}(s)\big)'\sigma^{(r-1)}(s)\,ds\Big\| + L\tau$$

$$\big(g^{-1}(s)\big)' = g^{-1}(s)\,g'(s)\,g^{-1}(s)$$

$$\boxed{\le C\frac{\varepsilon}{\tau} + C^2 D\frac{\varepsilon}{\tau} + L\tau}$$

רוצים את סומך

צריך $\frac{\varepsilon}{\tau},\ \varepsilon\to 0$

למשל $\tau = k\varepsilon^{\frac{1}{2}}$

SISO HOSM control

Single-input single-output High-order SM control

$x\in\mathbb{R}^n$ $\quad x^{(n)} = a(t,x)+b(t,x)u,\quad \sigma:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$

$a,b,\sigma\in C^\infty$ $\quad u\in\mathbb{R}$

דורשים: $\sigma(t,x)=0$

rel. degree $r\in\mathbb{N}$

מספיק $a,b,\sigma\in C^r$ $\quad \sigma^{(r)} = h(t,x)+g(t,x)u,\quad g(t,x)\neq 0$ לא אפס

אבל אם אי אפשר לחלק e

קואורדינטות $\sigma,\dot\sigma,\dots,\sigma^{(r-1)}$

הנחות:

$$\sigma^{(r)} = h(t,x) + g(t,x)\,u \quad , \ \sigma, u \in \mathbb{R}$$

$$|h| \le C, \quad 0 < K_m \le g \le K_M$$

מספיק לנו h, g מדידות לפי Lebesgue

אז כל פתרון מקיים את ההכלה הדיפרנציאלית

$$\sigma^{(r)} \in [-C, C] + [K_m, K_M]\,u \quad , \ u = u(\sigma, \dot\sigma, \dots, \sigma^{(r-1)})$$

הקואורדינטות לא בהכרח קשורות ל x, t

ה $\sigma, \dot\sigma, \ddot\sigma, \dots, \sigma^{(r-1)}$

כתיבה אחרת:

$$y_0 = \sigma,\ y_1 = \dot\sigma, \dots, y_{r-1} = \sigma^{(r-1)}$$

$$\dot y_0 = y_1, \dots, \dot y_{r-2} = y_{r-1}$$

$$\dot y_{r-1} \in [-C, C] + [K_m, K_M]\,K_F[u]\underbrace{(\sigma, \dots, \sigma^{(r-1)})}_{y}$$

הפתרון $\sigma \equiv 0$ הוא ב r-SM

1. מתקיים רציפות $\sigma, \dot\sigma, \dots, \sigma^{(r-1)}$

$$(\nabla\sigma, \nabla\dot\sigma, \dots, \nabla\sigma^{(r-1)})^T = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \nabla\sigma \\ \\ \nabla\sigma^{(r-1)} \end{array}$$

2. רגולרי - $L_r = \{\sigma = \dot\sigma = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0\}$

3. קיום תנועה ב L_r

$\Leftarrow$ יש לנו פתרון $\sigma \equiv 0$ $\Leftrightarrow$ $0 \in [-C, C] + [K_m, K_M]\,K_F[u](0)$

פורמלית ~~שלנו~~ הפתרון $\vec\sigma = 0$ $(\sigma, \dot\sigma, \dots, \sigma^{(r-1)})$

הוא פתרון ~~…~~ מרשים לכל $g(t), h(t)$

<u>דוגמא:</u> $u = -\frac{(C+\varepsilon)}{K_m}\,\mathrm{sign}\,\sigma$, $\varepsilon > 0$ לכל

$$\Rightarrow [-\varepsilon, \varepsilon] \subset [-C, C] + [K_m, K_M]\,K_F[u](0)$$

$$\frac{1}{K_m}[-(C+\varepsilon), C+\varepsilon]$$

<u>טענה:</u> $c>0$, $g(t), h(t)$ רציפים $\Leftarrow$ u אינו רציף.

נניח u רציף $\Leftarrow$

$$0=\sigma^{(r)} \in h(t)+g(t)u(0)$$

ניקח $g=K_m$, $h = \begin{cases} c & c \neq -K_m g(0) \\ -c & \text{אחרת} \end{cases}$

$\Leftarrow$ $\sigma \equiv 0$ לא מוגדר היטב.

$u = \alpha \,\mathrm{sign}\, \sigma$ ל

r-SM נותן מימוש

אבל במקרה הזה, לא יציב

<u>משפט (Anosov, 1958)</u>

$\ddot{\sigma} + \beta \dot{\sigma} + \alpha \,\mathrm{sign}\, \sigma = 0$ $\quad AS \Leftrightarrow \alpha>0,\ \beta>0$

$\sigma^{(r)} + \beta_1 \sigma^{(r-1)} + \dots + \beta_{r-2} \dot{\sigma} + \alpha \,\mathrm{sign}\, \sigma = 0$, $r>2$

לא יציב לעולם $\alpha \neq 0$

$\in [-c, c]$, $K_m, K_M = 1$