 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

הגדרה נק' x_0 נקראת נק' של רציפות קירובית

approximate continuity point

אם בסביבת x_0 קיימת קבוצה E מדידה, כך ש-x_0 נק' צפיפות של E, $x_0\in E$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ x\in E,\ \|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$$

הגדרה שקולה x_0 נקראת נק' של רציפות קירובית אם $\forall\varepsilon>0$ x_0 - נק' צפיפות של הקבוצה $\{x \mid \|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon\}$

משפט (Lusin) אם f מדידה, אז כמעט כל נק' בתחום ההגדרה היא נק' רציפות קירובית

נסמן: נקודות שהן לא נק' של רציפות הקירובית - N_0

למה 1: $K_F[f](x) = F(x) = \bigcap_{\delta>0} \overline{co}\, f(x^\delta \setminus N_0)$

הוכחה: לפי ההגדרה $K_F[f](x)=\bigcap_{\delta>0}\bigcap_{\mu N=0}\overline{co}\, f(x^\delta\setminus N)\subset F(x)$

כי $\mu N_0=0$

יותר מכך $\forall\delta\ \forall N\ \mu N=0 \Rightarrow \overline{f(x^\delta\setminus N)} \supset \overline{f(x^\delta\setminus N_0)}$

וכלכן $F(x)\subset K_F[f](x)$ מ.ש.ל.

נוכיח!

נניח $x_0\in x^\delta\setminus N_0$, x_0 - approx. cont.

$\Leftarrow$ $E(x_0)$ קבוצת נקודות מתאימה, x_0 - נק' צפיפות $E(x_0)$ f רציפה, לאורך $E(x_0)$ ב-x_0

$\Leftarrow$ x_0 גם נק' צפיפות של $\tilde E = E(x_0)\cap(x^\delta\setminus N)$ f רציפה, גם לאורך $\tilde E$ $\Leftarrow$ $f(x_0)\in\overline{f(x^\delta\setminus N)}$

מ.ש.ל.

למה 2, $F = \bigcap_{\delta > 0} F_\delta$, $F_\delta \subset \mathbb{R}^n$ סגור

או כל מרחב טופולוגי

$\delta \in \mathbb{R}$, $\delta_1 < \delta_2 \Rightarrow F_{\delta_1} \subset F_{\delta_2}$

אז:

$$y = \lim_{k\to\infty} y_k,\ y_k \in F_{\delta_k},\ \delta_k \to 0 \iff y \in \bigcap_{\delta > 0} F_\delta$$

הוכחה: 1. "$\Leftarrow$"

$y_k = y$, $y = \lim_{k\to\infty} y$

2. $\exists \lim_{k\to\infty} y_k = y,\ y_k \in F_{\delta_k}$

$$\Rightarrow \cancel{\forall}\, \forall \delta_0\, \exists k_0,\ k > k_0 \Rightarrow y_k \in F_{\delta_0} \Rightarrow \underbrace{\lim y_k}_{y} \in F_{\delta_0}$$

$$\Rightarrow y \in \bigcap_{\delta_0} F_{\delta_0}$$

מ.ש.ל.

מש׳ Filippov, f חסומה לוקלית, מדידה,

$$F(x) = K_F[f](x) = \bigcap_{\delta > 0}\ \bigcap_{\mu N = 0} \overline{co}\, f(x^\delta \setminus N)$$

אז: 1. $F(x)$ - לא ריקה,

2. קמורה, קומפקטית

3. חצי-רציפה מלמעלה

הוכחה: 1. $F(x) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{co} f(x^\delta \setminus N_0)$

ניקח $\delta_k \to 0$, $x_k \in x^{\delta_k} \setminus N_0$

$$\Rightarrow f(x_k) \in \overline{co} f(x^{\delta_k} \setminus N_0)$$

סדרה חסומה

$$\Rightarrow \exists y = \lim_{\ell\to\infty} f(x_{k_\ell}),\quad y \in F(x)$$

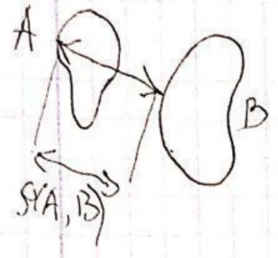
לפי למה 1

2. קמורה, חסומה, סגורה - טריוויאלי

3. נוכיח חצי-רציפות מלמעלה

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall \hat{x}\ \|\hat{x}-x\|<\delta \Rightarrow \rho(F(\hat{x}),F(x))<\varepsilon$

תזכורת:



$$\rho(A,B)=\max_{a\in A}\rho(a,B) = \max_{a\in A}\min_{b\in B}\rho(a,b)$$

A, B compact

דרך שלילה: נניח

$\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists\hat{x}: \|\hat{x}-x\|<\delta \ \&\ \exists \hat{y}\in F(\hat{x})$

$\rho(\hat{y},F(x))\ge\varepsilon$

נקבע $\varepsilon>0$ וניקח

$\delta_k\to 0,\ x_k\in x^{\delta_k}$

$x_k\to x,\ y_k\in F(x_k)$

$\rho(y_k,F(x))\ge\varepsilon$

$y_k\in\bigcap_{\delta>0}\overline{\text{co}}\, f(x_k^{\delta}\setminus N_0)\Rightarrow y_k=\lim_{\ell\to\infty} y_{k\ell}$ (למה 2)

$y_k=\lim_{\ell\to\infty}\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{k\ell i}f(x_{k\ell i})$, $x_{k\ell i}\notin N_0$, $\in x_k^{\delta_{k\ell}}$ חסומה

$\sum \alpha_{k\ell i}=1$

$\alpha_{k\ell i}\ge 0$

נבחר $y_{k_\omega}\to y_*$

$y_{k_{\omega_j}}$ $\{x_{k_{\omega_j}\ell,1}\},\dots,\{x_{k_{\omega_j}\ell,n+1}\}$ ניקח תת-סדרות מתכנסות אחת אחרי שנייה

$y_{k_{\omega_{js}}}$ $\{\alpha_{k_{\omega_{js}}\ell,1}\},\dots,\{\alpha_{k_{\omega_{js}}\ell,n+1}\}$ אחר כך ניקח מתכנסות

$\Leftarrow$ נקבל

$y_*\in\bigcap_{\delta>0} f(x^{\delta}\setminus N_0)=F(x)$

$\Rightarrow \rho(y_*,F(x))=0$

$\Rightarrow \lim_{s\to\infty}\rho(y_{k_{\omega_{js}}},F(x))=0$

סתירה,

$y_{k_{\omega_{js}}}\in F(x_{k_{\omega_{js}}})$

$x_{k_{\omega_{js}}}\to x$

מש"ל.

Imperfections of switching

שהיות, ~~הסטרזיס~~, שגיאות מדידה
delay, hysteresis

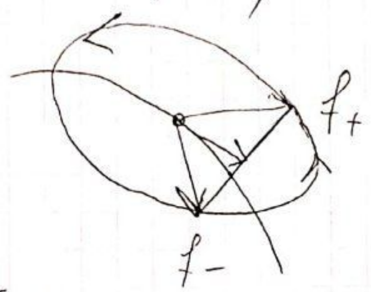
$$\dot{x}_\varepsilon \in \left(\overline{co}\, F(x^\varepsilon)\right)^\varepsilon, \quad F(x) = K_F[f](x)$$

$$\varepsilon \to 0 \quad x_\varepsilon \rightrightarrows x, \quad \dot{x} \in F(x)$$

במידה שווה

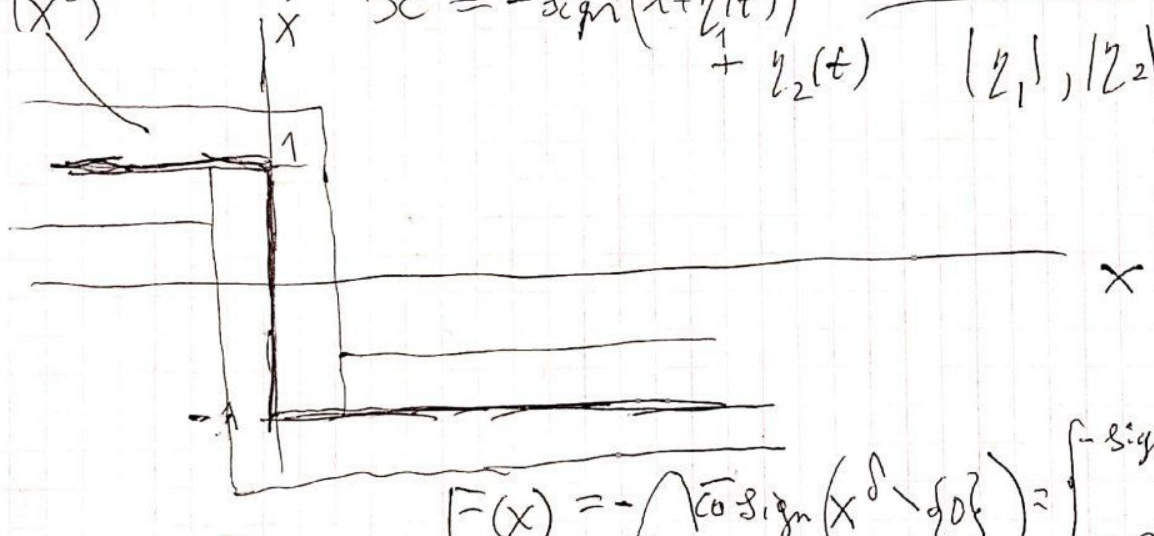
⇐ ההגדרה היא טבעית

hysteresis יכול להביא ערכים חדשים אך שלא מופיעים ב $F(x)$

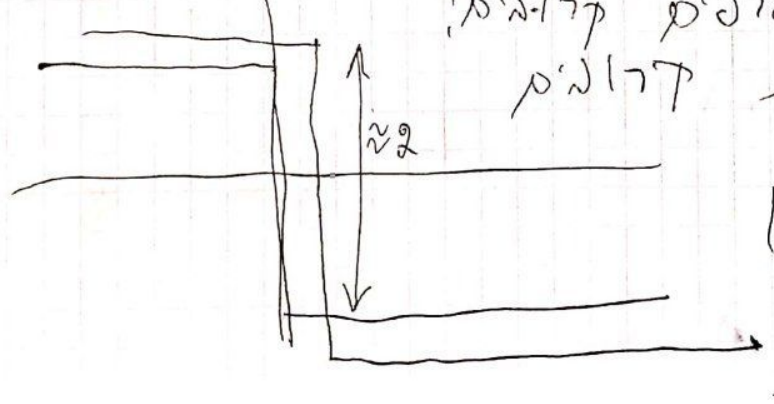


דוגמא

$$\dot{x} = -\operatorname{sign}\left(x + \eta_1(t)\right) + \eta_2(t) \qquad |\eta_1|, |\eta_2| \leq \varepsilon$$



$$F(x) = -\bigcap_{\delta > 0} \overline{co}\, \operatorname{sign}\left(x^\delta \setminus \{0\}\right) = \begin{cases} -\operatorname{sign} x & x \neq 0 \\ [-1, 1] & x = 0 \end{cases}$$



שני גרפים קרובים!

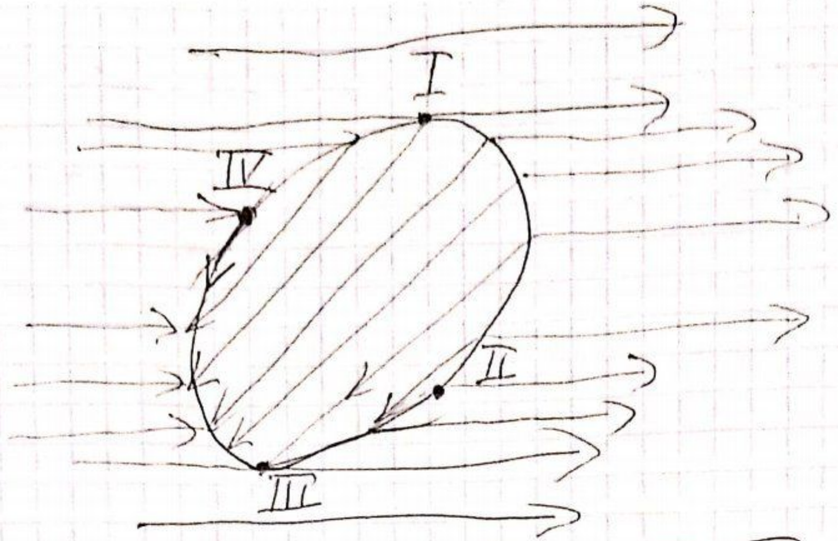
⇐ פתרונות קרובים

למרות ש

$$\left|\operatorname{sign}(x - \varepsilon) + [-\varepsilon, \varepsilon] - \operatorname{sign} x\right| \geq 2 - \varepsilon$$

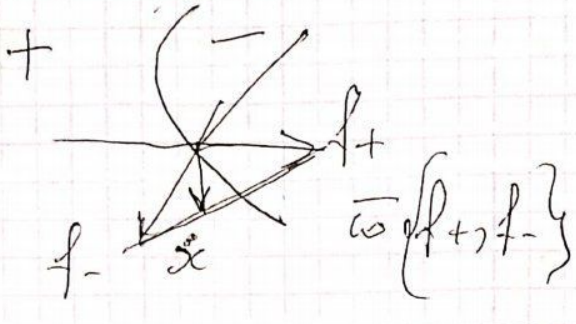
בנקודות מסוימות

דוגמא

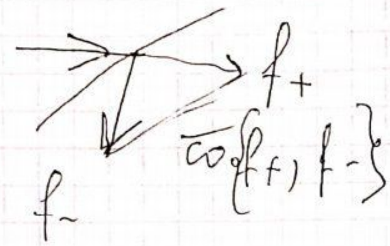


$$f(x)=\begin{cases} f_+ & \text{בחוץ} \\ f_- & \text{בפנים} \end{cases}$$

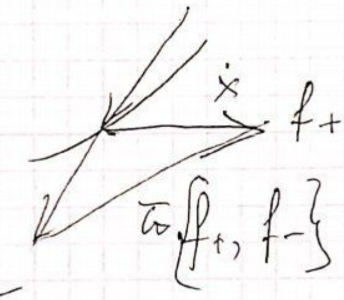
בקטע III,IV יש לנו SM



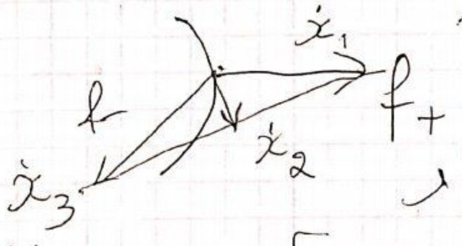
בקטע I,IV
שבירת קו
נכנסים פנימה



בקטע II,III
שבירת קו
יוצאים החוצה.



בקטע I,II



יש 3 אופציות
1. לצאת החוצה.
2. להישאר על השפה, ⟵ SM לא יציב
3. להיכנס פנימה

משוואות לא אוטונומיות

$$\dot x = f(t,x)$$

שיטה 1 (שאני מעריך)

f מדידה, לפי Lebesgue ב-(t,x)

וחסומה לוקלית (essentially)

$\Leftarrow$ מוסיפים משוואה, פיקטיבית $\dot t = 1$

מקבלים

$$\dot x \in \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\mu N=0} \overline{co}\, f\left((t,x)^\delta \setminus N\right)$$

לפי t,x

היא לא הואת הגדרת Carathéodory

שיטה 2 (Filippov)

$f: G \to \mathbb{R}^n$ מדידה, לפי Lebesgue +

כמעט לכל (t,x), ו-$t\in[\alpha,\beta]$, G-קומפקט

$$\exists m(t): \quad \|f(t,x)\| \le m(t), \quad \exists \int_\alpha^\beta m(t)\,dt < \infty$$

בדרך כלל מספיק $f(t,x)$ חסומה, לוקלית

essentially locally bounded

$$\Rightarrow \quad |f(t,x)| \le M$$

חוץ ממידה 0

אז ההגדרה, המקורית

$$F(t,x) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\mu N=0} \overline{co}\, f(t, x^\delta \setminus N)$$

לפי x בלבד

הוכחת קיום הפתרון שונה לחלוטין

מוכיחים ש

$$\overline{co}F(t,x^\delta)^\delta \Rightarrow \quad \dot x_k = \frac{1}{\mu(O^{\delta_k})} \int_{O^{\delta_k}} f(t,x+y)\,dy$$

משוואת Carathéodory

Sliding Mode (SM) Control

$$\dot{x} = f(x) \qquad (\dot{x} = f(t,x))$$

כל תנועה בקבוצת אי-רציפות של f
(הכוונה לאורך זמן) נקראת תנועה ב SM

Equivalent control

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\sigma(t,x), \quad \sigma : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^m, \quad u \in \mathbb{R}^m$$

נניח ש קיים סדר יחסי $r = (r_1, \dots, r_n)$

כידוע $r_1 + r_2 + \dots + r_n \le n$

$$\sigma^{(r)} = h(t,x) + g(t,x)u, \quad \sigma^{(r)} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \sigma_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ \sigma_m^{(r_m)} \end{pmatrix}$$

$$\det g \neq 0$$

$$u_{eq}(t,x) \overset{def}{=} -g^{-1}(t,x)\,h(t,x)$$

$$SM \;\; \sigma = 0 \Rightarrow \sigma^{(r)}(t,x,u) = 0 \quad u = u_{eq}(t,x)$$

(סדר אחר: t, x) $\hat{x} = (t,x), \quad \sigma = \sigma(\hat{x})$ לכורת!

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}^{\cdot} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}}_{\hat{a}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}}_{\hat{b}} u = \hat{a} + \hat{b}u = \hat{a} + \hat{b}_1 u_1 + \dots + \hat{b}_m u_m$$

$$h = \begin{pmatrix} L_{\hat{a}}^{r_1}\sigma_1 \\ \vdots \\ L_{\hat{a}}^{r_m}\sigma_m \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} L_{\hat{b}_1} L_{\hat{a}}^{r_1-1}\sigma_1 & \dots & L_{\hat{b}_m} L_{\hat{a}}^{r_1-1}\sigma_m \\ & \ddots & \\ L_{\hat{b}_1} L_{\hat{a}}^{r_m-1}\sigma_m & \dots & L_{\hat{b}_m} L_{\hat{a}}^{r_m-1}\sigma_m \end{pmatrix}$$

SM $\Leftrightarrow$ zero dynamics

$$\sigma_1 = \dot{\sigma}_1 = \dots = \sigma_1^{(r_1-1)} = 0 \quad \dots \quad \sigma_m = \dot{\sigma}_m = \dots = \sigma_m^{(r_m-1)} = 0$$

קואורדינטות לוקליות ניתנות להשלמה

Zero dynamics: $\sigma \equiv 0$, $u = u_{eq}(t,x)$

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)\, u_{eq}(t,x)$$

הגדרה: כל פתרון שמוגדרים ל $u(t)$ נתון

מוגדר עד $t = \infty$

(Forward complete solutions)

פורמלית: יש קואורדינטות לוקליות

שמשיים u, $\sigma_i^{(j)}$, $i = 1,\dots,m$, $j = 0,\dots,r_i - 1$

$$\sigma_1 \equiv \dot{\sigma}_1 \equiv \dots \equiv \sigma_1^{(r_1-1)} \equiv 0, \dots, \sigma_m \equiv \dot{\sigma}_m \equiv \dots \equiv \sigma_m^{(r_m-1)} \equiv 0 \Leftrightarrow \sigma \equiv 0$$

הנחה: כל פתרון שמוגדרים ל $u(t)$ נתון

מוגדר עד $t = \infty$.

(Forward complete solutions)

(Filippov) הגדרה: $K_F[f](t,x) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\mu N = 0} \overline{co}\, f(t, x^\delta \setminus N)$

כאשר הזמן נכלל $x = (t, \bar{x})$

$$K_F f(t,x) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\mu N = 0} f(x^\delta \setminus N)$$

כדור עם רדיוס δ

סגור, עם קמפ כ.א.

נניח $u = U(t,x)$ פונקציה מדידה

וחסומה לוקלית

אז לפי הגדרה,

הגדרת Filippov - $\dot{x} \in K_F[a + bU](t,x)$

טענה, $a(t,x),\ b(t,x)$ רציפים $\Longleftarrow$

$$K_F[a+bU](t,x) = a(t,x)+b(t,x)K_F[U](t,x)$$

$$\bigcap_{\delta>0}\bigcap \overline{co}(a+bU)(x\,W_0) = a+b\bigcap_{\delta>0}\overline{co}\,U(x\setminus N_0)$$ לכל

כי קבוצת נקודות N_0 של נקודות שהן לא נק' רציפות
גדולה בימין
מסומנת לפי הרציפים

Filippov: M חסומה

$\overline{co}M = co\overline{M}$

היה לנו

$$a(t_*,x_*)+b(t_*,x_*)\vartheta_* = a(t_*,x_*)+b(t_*,x_*)\vartheta_{**}$$

פשוט יותר!

(אולי בשלב) מ.ש.ל.

__טענה:__ $a,b\in C^\infty$, קיים relative degree

אז קיים SM $\sigma\equiv0 \iff u_{eq}(t,x)\big|_{\sigma\equiv0}\in K_F(U)(t,x)$

__הוכחה:__

$$\sigma\equiv0 \Rightarrow \sigma^{(r)}=0 \iff u=u_{eq}(t,x)=g^{-1}(t,x)h(t,x)$$

$$\dot{x} = a+b\,u_{eq} \in K_F[a+bU] = a+bK_F[U]$$

פתרון Filippov

מ.ש.ל.