הרצאה 5

II σ-אלגברה (עם יחידה) זאת מערכת קבוצות Σ

$$A_i \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

$$A \in \Sigma \Rightarrow \neg A \in \Sigma,\ \emptyset \in \Sigma$$

complement משלים

$$\Rightarrow \bigcap_i A_i = \neg\left(\bigcup_i \neg A_i\right) \in \Sigma$$

$A \cup \neg A = E$ יחידה, $E \in \Sigma$

III מידה measure $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$

$$\mu(\emptyset) = 0,\ \forall A_i;\ \mu(A) \geq 0$$

אם $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$

$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i)$$

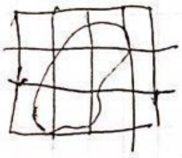
σ-אלגברה, של קבוצות סגורות ב-$\mathbb{R}^n$ (⇐ גם פתוחות)
נקראת אלגברת Borel, $E = \mathbb{R}^n$

~~...~~

מידה ב-Borel קבוצות – זאת (נפח)

$\mu(\mathbb{R}^n) = \infty$

יחידה: נפח



חלוקה של $\mathbb{R}^n$ לריבועים קטנים

IV השלמת לבג Lebesgue

G מדידה measurable

$\mu^*(G) = \inf \mu(A)$, $G \subset A$ מידה חיצונית, $\mu_*(G) = \sup \mu(A)$, $A \subset G$ פנימית

$$\mu(G) \overset{def}{=} \boxed{\mu_*(G) = \mu^*(G) \text{ כאשר מתקיים}}$$

(Jordan) הגדרה!

קבוצת Vitali! $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ נציג אחד מכל מנה,
היא לא מדידה,

Banach Tarski! 1924

$B \subset \mathbb{R}^3$ ball כדור $\rightarrow$ {מספר סופי של תת קבוצות} $\rightarrow B_1 \cup B_2$ שני כדורים מאותו נפח

↓ סיבובים הזזה

מידה נקראת שלמה אם
measure complete

אם $\mu(N)=0,\ S\subseteq N \Rightarrow S\in\Sigma$
$\mu(S)=0$

Volume + Borel σ-algebra is not complete

מידה נקראת σ-finite אם כל המרחב
אפשר לכתוב כאיחוד בן מניה
של קבוצות ממידה סופית.

המידה Lebesgue על ה σ-algebra
המינימלית המכילה את הבורליות
+ כל תת קבוצה של קבוצה ממידה 0.

V פונקציה מדידה לפי Lebesgue

$$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

מקור של כל קבוצה מדידה לפי Borel
הוא קבוצה מדידה לפי Lebesgue

בצורה סימבולית:

Lebesgue $\to$ Borel

דוגמאות:

$\mathbb{Q}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

מידה 0: $\mu(\mathbb{Q}) = \mu(\mathbb{Z}) = 0$ קו $\subset \mathbb{R}^n$ בכמ"ן

כל פונקציה אלמנטרית היא מדידה לפי Lebesgue

פונקציה מדידה לפי Borel:

Borel $\to$ Borel לפי Borel

פונקציה מדידה לפי בורל תמיד מדידה
לפי לבג Lebesgue.

$f_1(f_2)$ $\quad \mathbb{R}^m \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^k \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^n$

מדידה לפי Lebesgue $\quad$ Lebesgue $\quad$ Borel

מדידה לפי בורל
וגם לבג $\quad \mathbb{R}^m \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^k \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^n$

Borel $\quad$ Borel

לא תמיד מדידה!! $\quad \mathbb{R}^m \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^k \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^n$

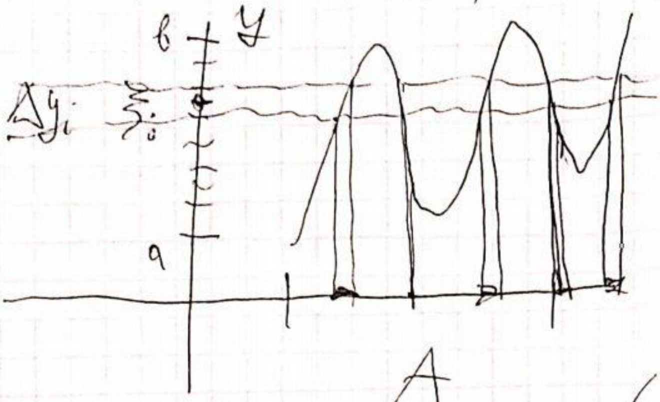
Lebesgue $\quad$ Lebesgue

Lebesgue אינטגרל VI

מדידה לפי ל.ב.

נניח $f: A \to B \subset [a,b]$ [illegible]

מדידה לפי Lebesgue $A \in \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}$



$$I = \int_A f(x)\,dx$$

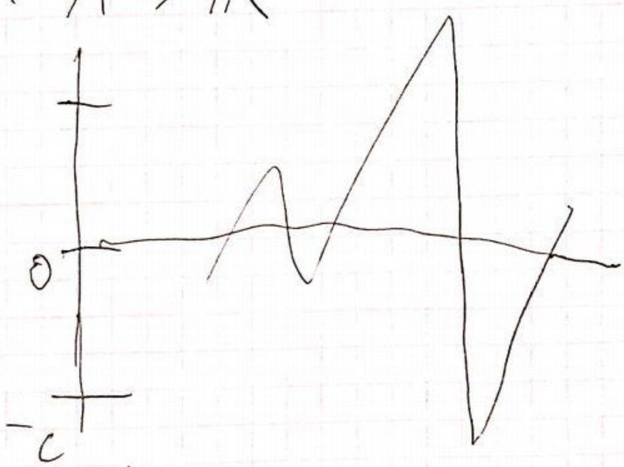
$$I = \lim_{\max|\Delta y_i| \to 0} \sum \xi_i \, \mu\left(f^{-1}(\Delta y_i)\right)$$

חלוקה בציר y

$$f: A \to \mathbb{R}$$

$$f_c = \begin{cases} c_1 & f(x) > c_1 \\ f(x) & |f(x)| \le c \\ -c_2 & f(x) < -c_2 \end{cases}$$

$c_1, c_2 > 0$



$$\int_A f(x)\,dx \overset{def}{=} \lim_{c_1, c_2 \to \infty} \int_A f_c(x)\,dx$$

VII

$x(t)$ פונקציה רציפה בהחלט (בקטע) אם ורק אם ~~ורק אם~~ היא גזירה כמעט בכל נקודה,
הנגזרת אינטגרבילית לפי Lebesgue
ו-

$$x(t) = t_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\,ds$$

בפרט כל פונקציה ליפשיצית היא רציפה בהחלט ומקיימת את הזהות

למשל $x(t) = |t|$

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ \text{אין} & t=0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$$

$$|t| = t_0 + \int_{t_0}^{t} |s|^{\cdot}\, ds \overset{t_0<0,\ t>0}{=} t_0 + \int_{t_0}^{0}(-1)\,ds + \int_{0}^{t} 1\, ds =$$

$$= \cancel{t_0 + |t_0|} + t = t$$

הכלה דיפרנציאלית

היעזר להגדיר את הפתרון של ODE עם צד ימין לא רציף עוברת דרך הכלה דיפרנציאלית Differential Inclusion (DI)

הגדרה $\dot{x} \in F(x) \subset \mathbb{R}^n$

פתרון הוא כל פונקציה $x(t)$ רציפה בהחלט לוקלית שהיא מקיימת את ההכלה כמעט בכל t

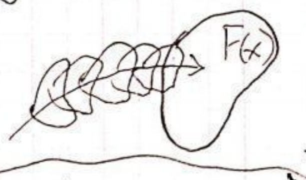
הגדרה הכלה $\dot{x} \in F(x)$ נקראת הכלת Filippov אם לכל x

1. $F(x)$ לא ריקה, חסומה וסגורה (קומפקטית)
2. קמורה convex
3. חצי-רציפה מלמעלה

upper semicontinuous

כלומר $\rho(x,y) = \|x-y\|$, $\rho(x,M) = \inf_{y\in M} \rho(x,y)$

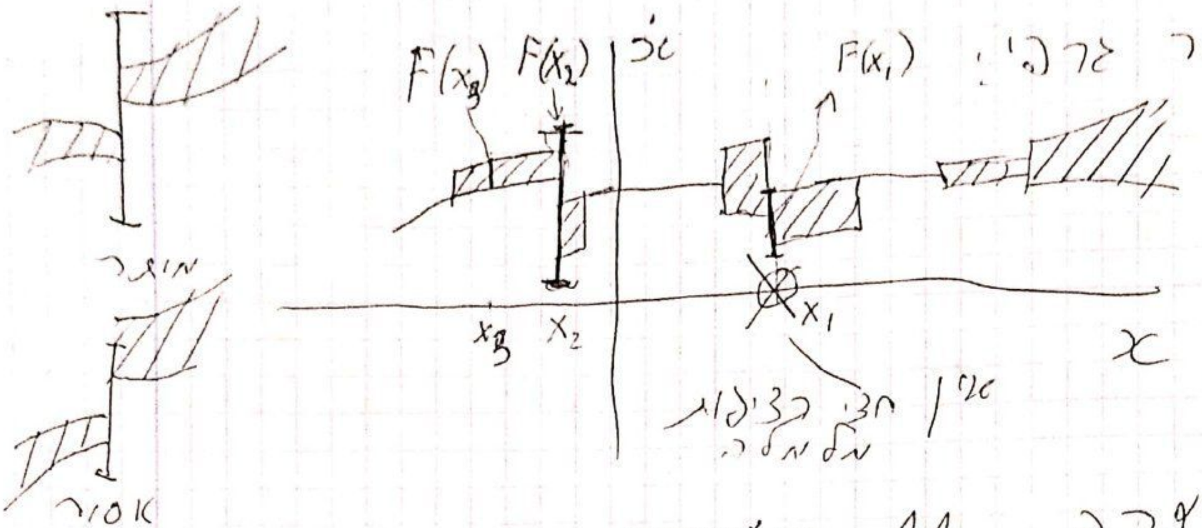
$$\lim_{x'\to x} \sup_{y\in F(x')} \rho(y, F(x)) = 0$$



הערה: מרחק Hausdorff

$$\rho(M,N) = \max\left[\sup_{x\in M} \rho(x,N),\ \sup_{y\in N} \rho(y,M)\right]$$

הסבר גרפי:



הגדרה M קמורה,

$$\forall k\ \forall x_1,x_2,\dots,x_k \in M\ \forall \alpha_1,\dots,\alpha_k \geq 0,\ \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k=1$$

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\dots+\alpha_k x_k \in M$$

צירוף קמור

סימון $\overline{M}$ - סגור של M, coM - קמור של M, $\overline{co}M$ - קמור סגור

הגדרה: $\overline{co}M$ זאת הקבוצה הקטנה ביותר שהיא קמורה, סגורה, ומכילה M.

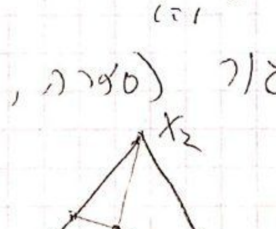
משפט Caratheodory

$M\subset\mathbb{R}^n$ חסום, סגור

אז:

$$coM=\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \exists k\leq n+1,\ x_1,\dots,x_k\in M:\ x=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i,\ \sum_i \alpha_i=1,\ \alpha_i\geq 0\right\}$$

מסקנה: coM סגור (ספירה, את-ספירה, מרכזים)



ל-M חסום מקבלים $\overline{co}M=co\overline{M}$

הוכחה: $\overline{M}\subset\overline{co}M \Rightarrow \underbrace{co\overline{M}}_{\text{קמור סגור}}\subset\overline{co}M \Rightarrow co\overline{M}=\overline{co}M$

משפט 1

$x_k : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

רציפות במידה שווה

$\dot{x}_k \in M$, M-חסומה , $M \in \{x \mid \|x\| \le L\}$

!לכל

$x_k \rightrightarrows x(t) \Rightarrow$ $x(t)$ רציפה במידה שווה

במידה שווה

ומקיים

$\cancel{\dot{x}(t) \in coM}$

$t \in [a,b]$ מ"ש $\dot{x}(t) \in \overline{co}\, M$

הוכחה:

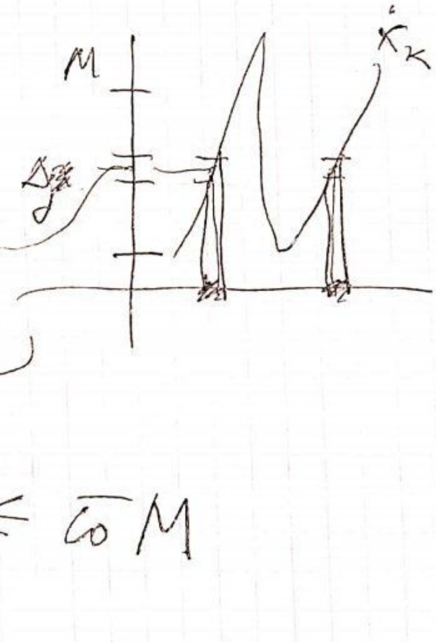
$$\left| x_k(t') - x_k(t'') \right| \le \left| \int_{t''}^{t'} \dot{x}_k \, dt \right| \le L\, |t' - t''|$$

$\Leftarrow$ רציפות במידה שווה $k \to \infty$ $|x(t') - x(t'')| \le L|t' - t''|$

$$q_{k,h} = \frac{x_k(t+h) - x_k(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \dot{x}_k(s)\, ds$$

$$= \lim_{\max|\Delta_j| \to 0} \frac{1}{h} \sum \dot{x}_{kj}\, \mu(\dot{x}_k^{-1}(\Delta_j))$$

$$\sum_j \mu\, \dot{x}_k^{-1}(\Delta_j) = h$$



$$\alpha_{kj} = \frac{\mu(\dot{x}_k^{-1}(\Delta_j))}{h}$$ נגדיר

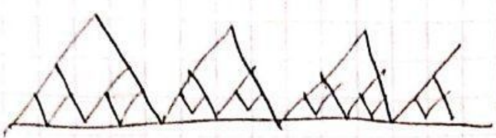
$$q_{kh} = \lim_{\max|\Delta_j| \to 0} \sum_k \alpha_{kj}\, \dot{x}_{kj} \in \overline{co}\, M$$

$$\lim_{k \to \infty} q_{kh} = \underbrace{\frac{x(t+h) - x(t)}{h}}_{q_h} \in \overline{co}\, M$$

$$\lim_{h \to 0} q_h = \dot{x}(t) \in \overline{co}\, M$$

מ.ש.ל. כמעט תמיד

דוגמא



$\dot{x}_k = \pm 1$

$x_k \rightrightarrows 0$

$\dot{x} = 0 \in \overline{co}\{-1,1\} = [-1,1]$

למה

תת-קבוצות של $\mathbb{R}^n$

$F:\mathbb{R}^n \to 2^{(\mathbb{R}^n)}$ פונקציה קבוצתית

המקיימת את תנאי Filippov

קומפקטית וחצי-רציפה מלמעלה,

אז $F(x)$ ~~[illegible]~~ חסומה

על כל קומפקט $x \in K \subset \mathbb{R}^n$.

הוכחה: בדיוק כמו בחדו"א

לכל נק' x יש סביבה Ω_x

$\forall y \in \Omega_x$: $F(y) \subset$ כדור המכיל $F(x)$

מסוים

$\Leftarrow$ כיסוי סופי של K ... מש.ל.

הגדרה: M^ε - ניפוח M ב-ε, $M \subset \mathbb{R}^n$

$$M^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, M) \le \varepsilon\}$$

M חסום $\Leftarrow$ M^ε סגורה $\Leftarrow$ קומפקט

$\overline{co}\, M^\varepsilon = co\, M^\varepsilon = (co\, M)^\varepsilon$ (Filippov)

הגדרה: δ-פתרון זה פתרון להכלה

delta

$$\dot{x}_\delta \in [co\, F(x^\delta)]^\delta$$

<u>למה 2.</u> $t\in[\alpha,\beta]$, $\dot x_k\in\left[co F(x^{\delta_k})\right]^{\delta_k}$

בקטע $x_k \rightrightarrows x$, $\delta_k\to 0$

אז $x(t)$ רציפה, בהחלט ב-$[\alpha,\beta]$

ומקיימת $\dot x\in F(x)$

<u>הוכחה</u>

$\forall t_0\in[\alpha,\beta]:\ x_0=\lim_{k\to\infty}x_k(t_0)$

$\forall\varepsilon>0$ ניקח סביבת x_0 כך שבה

$F(x)\subset F(x_0)^{\varepsilon}$ (מחצי-רציפות מלמעלה)

$t\in[\alpha_1,\beta_1]\subset[\alpha,\beta]$, $t_0\in$

$\dot x_k\in\left(co F(x^{\delta_k})\right)^{\delta_k}\subset\left(co F(x_0)^{\varepsilon}\right)^{\delta_k}$

$=\left(F(x_0)^{\varepsilon}\right)^{\delta_k}=F(x_0)^{\varepsilon+\delta_k}\subset F(x_0)^{2\varepsilon}$

$\dot x_k\in F(x_0)^{2\varepsilon}\Rightarrow \dot x\in\overline{co}F(x_0)^{2\varepsilon}=F(x_0)^{2\varepsilon}$ (למה 1)

($x(t)$ - רציפה, בהחלט)

כיוון שלכל $\varepsilon>0$ ⇐ $\dot x\in F(x_0)$ ב-t_0

אם $x(t)$ גזירה, ב-t_0

⇐ מתקיים $\dot x\in F(x)$

מ.ש.ל.

<u>משפט קיום פתרון לוקלי</u>

ה, כלל Filippov $\dot x\in F(x)$, $F: G\to 2^{R^n}$

נתון $\exists\ x(t_0)=x_0$ תנאי התחלה, $V=\{x \mid \|x-x_0\|\le b\}\subset G$ כדור

$m=\sup\{\|y\| \mid y\in F(x),\ x\in V\}$, $d=\frac{b}{m}$

⇐ הפתרון קיים ב $t\in[t_0-d,t_0+d]$

(לא יחיד)

קומה:

תזכורת! משפט Arzela - Ascoli

סדרת פונקציות $x_k(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall t_1,t_2\in[\alpha,\beta]$, ~~$\forall j_1,j_2$~~ $\forall k$ ~~$x_k(t_1)$~~

$$|t_1-t_2|<\delta \Rightarrow \|x_k(t_1)-x_k(t_2)\|<\varepsilon$$

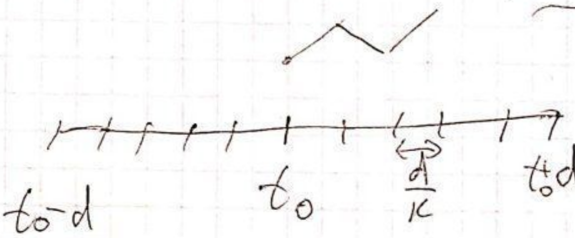
זה נקרא Equicontinuity

אז לסדרה $x_k(\cdot)$ קיימת תת-סדרה,

$$x_{k_\ell} \rightrightarrows x_* \quad \ell\to\infty,\ t\in[\alpha,\beta]$$

(x_* – רציפה (ומקיימת אלו תנאי של equicontinuity

הוכחת משפט Filippov



$t\in[t_j,t_{j+1}]$, $\dot x_k(t)\in F(x_k(t_j))^{\frac{dm}{k}}$

Ψ

Euler Integration $\quad x_k(t_{j+1})=x_k(t_j)+\dot x_k(t_j)\cdot\frac{d}{k}$, $\dot x_k(t_j)\in F(x_k(t_j))$

$\|\dot x_k(t_j)\|\le m$, $\dot x_k\in\left(\mathrm{co}\,F(x_k^{\frac{dm}{k}})\right)^{\frac{dm}{k}}$ צריך ליפשיציות

$\Leftarrow$ תכונת ליפשיץ $\Leftarrow$ equicontinuity

$\Leftarrow$ $\exists\, x_{k_\ell}\rightrightarrows x$

$\dot x\in F(x)$ $\Leftarrow$ למה 2

[illegible],

מקרה פרטי $\dot x=f(x)$, $f\in C$

משפט קיום הפתרון / לא צריך

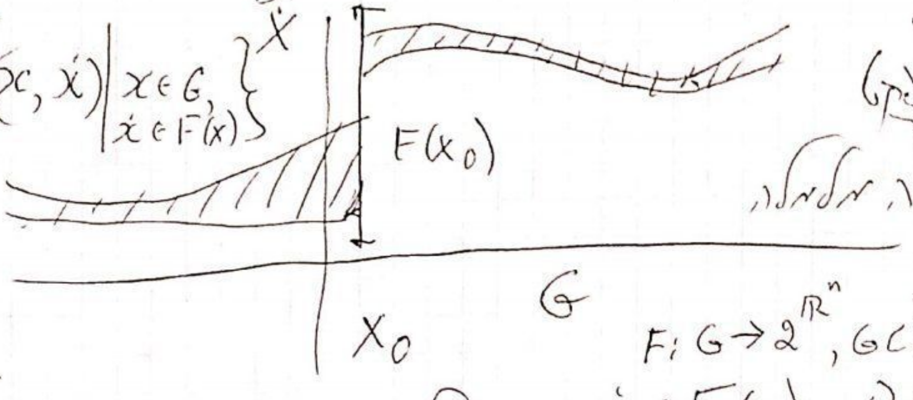
תכונת ליפשיץ / של f,

Filippov: $\dot{x} \in F(t,x)$ [illegible]

הכללות Filippov

תלות רציפה בתנאי התחלה וצד ימין

$$\Gamma = \left\{ (x, \dot{x}) \,\middle|\, \begin{matrix} x \in G, \\ \dot{x} \in F(x) \end{matrix} \right\}$$ גרף



$\dot{x} \in F(x)$

$F(x)$ - קומפקטית, $\neq \phi$

קמורה

חצי-רציפה מלמעלה

$F: G \to 2^{\mathbb{R}^n}, G \subset \mathbb{R}^n$

למה ~~רציפה מלמעלה~~ ~~[illegible]~~ $\dot{x} \in F(x)$

סגורה, חסומה, לא ריקה

חצי-רציפה מלמעלה $\Longleftrightarrow$ הגרף של F סגור

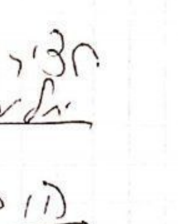
הוכחה 1. "$\Leftarrow$" ישנה חצי-רציפות מלמעלה

זאת אומרת $x_0 \in \partial G \cap G$

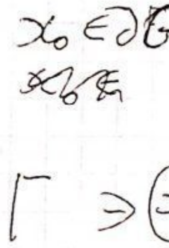
$x \to x_0 \Rightarrow \max_{y \in F(x)} \rho(y, F(x_0)) \to 0$

$\Gamma \ni (x_k, \dot{x}_k) \to (x_0, \dot{x}_0)$ צריך להוכיח:

$\dot{x}_k \in F(x_k) \Rightarrow \dot{x}_0 \in F(x_0)$



[illegible]

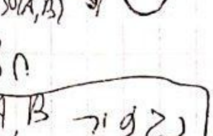


חצי-רציפות: $\rho(\dot{x}_k, F(x_0)) \to 0$

$\searrow \rho(\dot{x}_0, F(x_0))$ ''

[illegible] A, B - קומפקט:
$\rho(A,B) = \max_{a \in A} \rho(a, B)$

2. "$\Rightarrow$" הגרף סגור



$(x_k, \dot{x}_k) \to (x_0, \dot{x}_0) \Rightarrow (x_0, \dot{x}_0) \in \Gamma$

Γ

דרך שלילה: נניח אין חצי-רציפות מלמעלה,

חצי-רציפות: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in x_0^\delta: \rho(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$

אין חצי-רציפות מלמעלה: $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in x_0^\delta: \rho(F(x), F(x_0)) \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \boxed{\delta_k \to 0,\ x_k \to x_0,\ \dot{x}_k \in F(x_k) :\ \rho(\dot{x}_k, F(x_0)) \geq \varepsilon}$

קיימת תת-סדרה, $F(x)$ חסומה, ב-x^δ $\Rightarrow x_{k_\ell} \to x_0, \dot{x}_{k_\ell} \to \dot{x}_0 \Big| \Rightarrow (x_0, \dot{x}_0) \in \Gamma \Rightarrow \dot{x}_0 \in F(x_0)$

גרף סגור [illegible]

סתירה, $\rho(\dot{x}_{k_\ell}, F(x_0)) \to 0$

נניח פתרונות קיימים ב-G

$G\subset\mathbb{R}^n$ קומפקט, $t\in[a,b]$, $x(t)\in G$ 59

$\dot x\in F(x)$ - הכל, Filippov

<u>משפט</u> <u>תלות רציפה בגרף של הצד הימין</u>

1. $t\in[\alpha_k,\beta_k]\subset[a,b]$, $(\alpha_k,\beta_k)\to(\alpha,\beta)$, $\varepsilon_k\to0$

$$\dot x_{\varepsilon_k}\in\left(\mathrm{co}F(x^{\varepsilon_k})\right)^{\varepsilon_k} = \cancel{F(x^{\varepsilon_k})^{\varepsilon_k}}$$

אז קיים גבול ולכן: $\exists\{x_{\varepsilon_{k_e}}\}\rightrightarrows x_*$

כך ש- $x_{\varepsilon_{k_e}}\rightrightarrows x_*$, $\dot x_*\in F(x)$ $\forall[\alpha',\beta']\subset(\alpha,\beta)$

גם נכון $[\alpha_k,\beta_k]\to[\alpha,\beta]\Rightarrow[\alpha,\beta]$

2. $\forall\delta>0\ \exists\varepsilon>0\ \forall x_\varepsilon(\cdot)$ מקיים $\dot x_\varepsilon\in[\mathrm{co}F(x^\varepsilon)]^\varepsilon$, $t\in[\alpha,\beta]$

$\exists x_*(\cdot)$, $\dot x_*\in F(x_*)$, $\|x_*-x_\varepsilon\|_C<\delta$

$$=\max_{t\in[\alpha,\beta]}\|x_*(t)-x_\varepsilon(t)\|$$

<u>הוכחה:</u>

1. מרצף k חסומים כל x_{ε_k} מוגדרים ב-$[\alpha',\beta']$

$F(x)$ חסומה ב-G $\Leftarrow$ $\dot x_{\varepsilon_k}$ חסומים, $\forall t\ x_{\varepsilon_k}(t)\in G$ חסומים

משפט Arcela $\Leftarrow$ $\exists x_{k_e}\rightrightarrows x_*$

מלמה 2 $\Leftarrow$ x_* רציפה, מוגדרת, $\dot x_*\in F(x)$

2. <u>נניח בשלילה</u> נניח לא נכון

$\exists\delta>0\ \forall\varepsilon>0\ \exists x_\varepsilon(\cdot)$, $\dot x_\varepsilon\in(\mathrm{co}F(x^\varepsilon))^\varepsilon$, $t\in[\alpha,\beta]$

$\forall x_*(\cdot)$, $\dot x_*\in F(x_*)$ $\|x_*-x_\varepsilon\|_C\geq\delta$

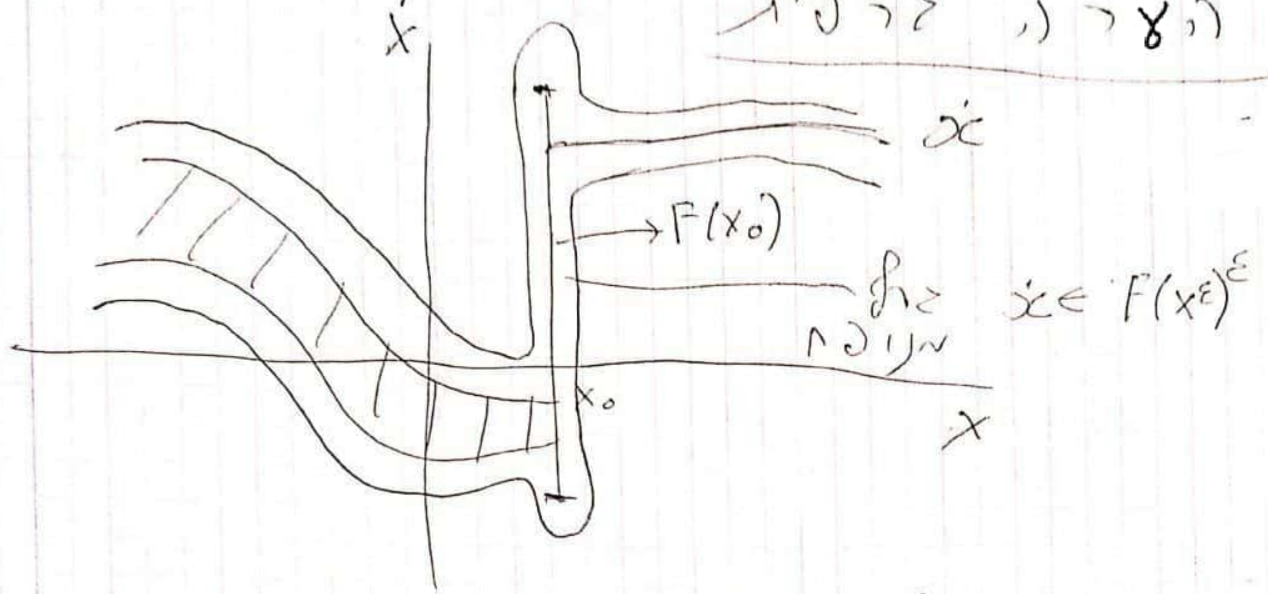
ניקח $\varepsilon_k\to0$, $\dot x_{\varepsilon_k}\in(\mathrm{co}F(x^{\varepsilon_k}))^{\varepsilon_k}$, $t\in[\alpha,\beta]$

$x_{k_e}\rightrightarrows\tilde x$, $\dot{\tilde x}\in F(\tilde x)$ Arzela - Ascoli

$\|x_{k_e}-\tilde x\|\to0$ <u>סתירה</u>

מ.ש.ל.

הערות, גרפיות

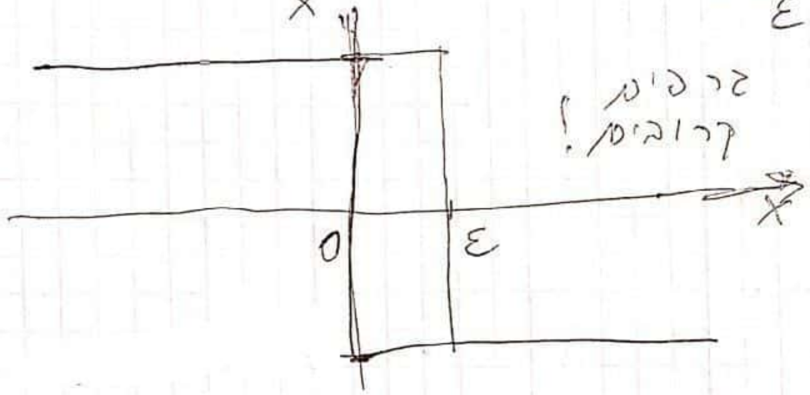


~~מקרה פרטי:~~ **דוגמא**

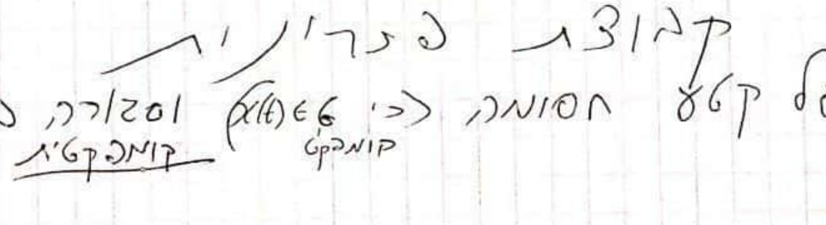
$x \in \mathbb{R}$

$$\dot x \in F(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} x & x \neq 0 \\ [-1,1] & x = 0 \end{cases}$$

$$\dot x \in F_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign}(x-\varepsilon) & x \neq \varepsilon \\ [-1,1] & x = \varepsilon \end{cases} = F(x-\varepsilon)$$



גרפים קרובים!



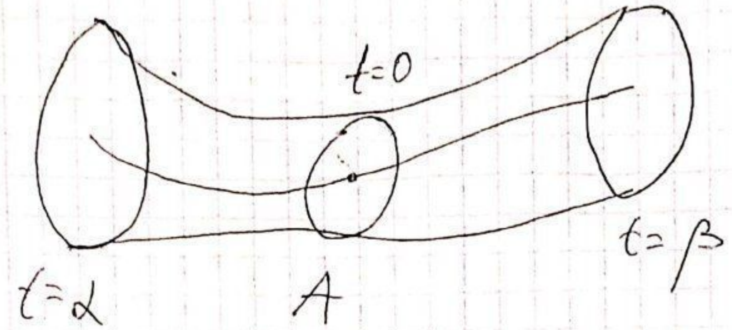
הפתרונות קרובים!

כלומר, קבוצת פתרונות מעל קטע חסומה (כי $\dot x(t) \in G$ קומפקטי) וסגורה, ב-C קומפקטית

משפט

קומפקטית , $A \subset G$

$\theta \in [\alpha, \beta]$ 61



$\forall x_0(\theta) \in A$ קיימים פתרונות $x(t) \in G$, $t \in [\alpha, \beta]$

$\Leftarrow$ א. קבוצת כל הפתרונות קומפקטית ב $C[\alpha, \beta]$

ב. קבוצת נקודות של כל הפתרונות קומפקטית ב $\mathbb{R}^n$

הוכחה:

א. סדרה $x_k(t)$ - פתרונות ב $[\alpha, \beta]$

לפי Arzela ישנה $x_{k_\ell} \rightrightarrows x_*$, $\dot{x}_* \in F(x_*)$

ב. ישנה סדרה $x_k(t_k)$

ישנה תת-סדרה, $x_{k_\ell} \rightrightarrows x_*$, $t_{k_\ell} \to t_*$ (נבחרים בנפרד)

$$\lim_{\ell \to \infty} x_{k_\ell}(t_{k_\ell}) = \lim_{t \to t_*} \lim_{\ell \to \infty} x_{k_\ell}(t) = x_*(t_*)$$

$$\|x_{k_\ell}(t_{k_\ell}) - x_*(t_*)\| \le \underbrace{\|x_{k_\ell}(t_{k_\ell}) - x_*(t_{k_\ell})\|}_{\to 0} + \underbrace{\|x_*(t_{k_\ell}) - x_*(t_*)\|}_{\to 0}$$

מ.ש.ל.

הערה: התנאי של G - קומפקט אפשר להחליף ב G - פתוחה (Filippov)

כולל $G = \mathbb{R}^n$

הגדרת Filippov (1958-60)

הגדרת Filippov המקורית

נתונה לנו המשוואה $\dot{x} = f(t,x)$

אנחנו נתרכז במקרה האוטונומי

(אחר כך נחזור גם למקרה עם הזמן)

$\dot{x} = f(x)$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

מדידה לפי Lebesgue וחסומה לוקלית

או locally essentially bounded

$\exists N: \mu N = 0$, $f|_{\mathbb{R}^n \setminus N}$ חסומה לוקלית

μ - מידת Lebesgue

הגדרה: פונקציה $x(t)$ נקראת פתרון של $\dot{x} = f(x)$ במובן Filippov אם היא פתרון של ההכלה

$$\dot{x} \in K_F[f](x) = \bigcap_{\mu N = 0} \bigcap_{\delta > 0} \overline{co}\, f(x^\delta \setminus N)$$

$\boxed{\text{Filippov Procedure}}$

וההגדרה נכונה גם ל- $f: G \to \mathbb{R}^n$

G - תחום פתוח

נסמן (Filippov)

הכלת Filippov - $\dot{x} \in K_F[f](x)$

נוכיח אותו

הגדרה: נקודה נקראת נק' צפיפות (density point) של קבוצה E מדידה לפי Lebesgue אם

$$\lim_{\delta \to 0+} \frac{\mu(E \cap x^\delta)}{\mu x^\delta} = 1$$